

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, В. С. Тоноян

Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с зубцами

Кручение стержня, поперечное сечение которого представляет круговой сектор, рассмотрели Сен-Венан [1, 2], Гринхилл [3], А. Н. Динник [4], А. Ш. Лошкин [5], В. Н. Лысков [6], Стивенсон [7], Н. Х. Арутюнян [8, 9], Шен Бей-Линь [10, 11] и другие.

Некоторые из них рассмотрели также кручение стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора [1, 2, 5, 6].

В настоящей работе рассматривается кручение стержней с поперечными сечениями в виде кольцевых секторов с краевыми зубцами (фиг. 1) и с центрально расположенным зубом (фиг. 6).

Точное решение этой задачи получено методом приведения задачи к бесконечным системам линейных уравнений, изложенным в работах Н. Х. Арутюняна [12] и др. [13, 14].

Решение представлено в виде рядов. Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Вычислены жесткости для некоторых случаев и напряжения. Из общего решения, для кругового и кольцевого секторов получаются компактные формулы для определения жесткостей при кручении и касательных напряжениях.

Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с краевыми зубцами

§ 1. Постановка задачи

Решение задачи о кручении призматических стержней в полярных координатах сводится к определению функции напряжения $U(r, \varphi)$, удовлетворяющей в области поперечного сечения стержня уравнению

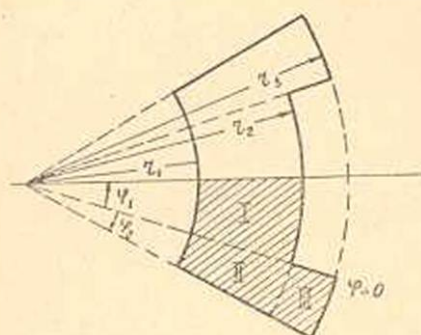
$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1.1)$$

и обращающейся в нуль на контуре этой области.

При помощи функции $U(r, \varphi)$ касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{z\varphi}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} Gz, \\ \tau_{z\varphi} &= -\frac{\partial U}{\partial r} Gz.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в виде кольцевого сектора, имеющего на наружной криволинейной части выточку или симметрично расположенные зубцы (фиг. 1).



Фиг. 1.

В силу симметрии профиля, достаточно рассмотреть только половину области сечения. Определенное в этой части области решение распространится на всю область сечения, если потребовать, чтобы нормальная производная функции $U(r, \varphi)$ на оси симметрии ($\varphi = \varphi_1$) равнялась нулю

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0. \quad (1.3)$$

Переходя к переменной

$$t = \ln \frac{r}{r_0}, \quad (1.4)$$

решение уравнения (1.1) ищем в форме

$$U[r(t), \varphi] = \Phi(t, \varphi) - \frac{r_0^2 e^{2t}}{2}, \quad (1.5)$$

где $\Phi(t, \varphi)$ — гармоническая функция.

Разбиваем рассматриваемую половину области сечения на простейшие области I, II, и III и полагаем, что функция $\Phi(t, \varphi)$ в этих областях принимает, соответственно, значения Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 .

Вспомогательные функции $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\Phi_1(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0, \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_2(t, -\varphi_2) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0, \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} &= \Phi_3(t, -\varphi_2) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

и условиям сопряжения

$$\Phi_1(t, 0) = \Phi_2(t, 0), \quad \Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_{t=0}, \quad (1.8)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}. \quad (1.9)$$

При этом использованы соотношения (1.5) и условия для функции $U(r, \varphi)$.

Функции $\Phi_i(t, \varphi)$ ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k t + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k t) \sin \alpha_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(0 < \varphi < \varphi_1, -t_1 < t < 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0, -t_1 < t < 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(3)} \operatorname{sh} \gamma_k \varphi + D_k^{(3)} \operatorname{ch} \gamma_k \varphi) \sin \gamma_k t, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0, 0 < t < t_2)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{\varphi_2}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}. \quad (1.13)$$

§ 2. Определение постоянных интегрирования

Пользуясь выражениями (1.10)–(1.12) и удовлетворив условиям (1.6) и (1.7), для постоянных интегрирования получим следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(1)} = & \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1} \operatorname{cth} \alpha_k t_1 - \frac{r_1^2}{\alpha_k \varphi_1 \operatorname{sh} \alpha_k t_1}, & B_k^{(1)} = & \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1}, \\ C_k^{(1)} = & -D_k^{(2)} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1, & D_k^{(1)} = & D_k^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(2)} &= B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \frac{r_1^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k \varphi_2 \operatorname{sh} \lambda_k t_1}, \\ C_k^{(2)} &= D_k^{(2)} \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 + \frac{r_2^2 \beta_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{t_1 (4 + \beta_k^2) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(3)} &= -B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k \varphi_2 \operatorname{sh} \lambda_k t_2}, \\ B_k^{(3)} &= B_k^{(2)}, \quad C_k^{(3)} = \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}, \\ D_k^{(3)} &= \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Подставляя эти значения в (1.10)–(1.12) и удовлетворив условиям (1.8), для определения постоянных $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} D_k^{(2)} &= \frac{2}{t_1 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p B_p^{(2)}}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} - \\ &- \frac{1}{\beta_k t_1 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \left\{ \frac{r_2^2 \beta_k^3 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{(4 + \beta_k^2) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} + \right. \\ &+ (-1)^{k+1} r_1^2 \left(\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \frac{\varphi_2}{2} \right) + r_2^2 \operatorname{th} \beta_k \varphi_1 \Big\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} B_k^{(2)} &= \frac{2}{\varphi_2 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{th} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p D_p^{(2)}}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} - \\ &- \frac{1}{\varphi_2 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left(\frac{r_1^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} + \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) + \right. \\ &+ \frac{r_2^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k^2 - 4} \left(\lambda_k \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{\lambda_k e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} + 2 \right) + \\ &+ \frac{r_2^2 (-1)^{k+1}}{\lambda_k^2 - 4} \left(\lambda_k \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{\lambda_k e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - 2 \right) \Big\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

($k = 1, 2, \dots$)

Произведя замену неизвестных

$$\begin{aligned} \lambda_k \varphi_2 B_k^{(2)} &= m Y_k - [1 + (-1)^{k+1}] r_2^2, \\ \beta_k t_1 D_k^{(2)} &= X_k - r_2^2 - (-1)^{k+1} r_1^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где m — постоянное число, подлежащее определению в дальнейшем, эту совокупность приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k, \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k, \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)}, \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$P_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k^2 + 4} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1}{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{4(-1)^{k+1}}{\lambda_k^2 - 4} \left(r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_1^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \right) + \frac{4[1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k^2 - 4} \left(r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r_2^2 \lambda_k}{\lambda_k^2 - 4} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda_k t_1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

§ 3 Исследование бесконечной системы (2.7)

Введя новые обозначения

$$\left. \begin{aligned} X_k &= Z_{2k-1}, \quad P_k = N_{2k-1}, \\ Y_k &= Z_{2k}, \quad Q_k = N_{2k}, \\ A_{2k-1, 2p} &= a_{kp}, \quad A_{2k, 2p-1} = b_{kp}, \quad A_{2k-1, 2p-1} = A_{2k, 2p} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

совокупность систем (2.7) можем записать в виде одной системы

$$Z_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} Z_n + N_i, \quad (i=1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Покажем, что система (3.2) (или системы (2.7)) вполне регулярна [15].

Рассмотрим отдельно два случая

а) $i=2k-1$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2k-1, n}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2m \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} =$$

$$= \frac{m}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2} \left(\operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 - \frac{1}{\beta_k \varphi_2} \right) \leq \frac{m}{2} (1 + e^{-2\beta_k \varphi_1}) \leq m, \quad (3.3)$$

в) $i = 2k$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2k, n}| = \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{2\gamma_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \gamma_k t_1 + \operatorname{cth} \gamma_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \gamma_k^2} =$$

$$= \frac{1}{m (\operatorname{cth} \gamma_k t_1 + \operatorname{cth} \gamma_k t_2)} \left(\operatorname{cth} \gamma_k t_2 - \frac{1}{\gamma_k t_2} \right) \leq \frac{1}{2m}. \quad (3.4)$$

При этом использованы соотношения (2.8), значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right) \quad (3.5)$$

и неравенства

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1,$$

$$\frac{1}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2} \leq \frac{1}{2} (1 + e^{-2\beta_k \varphi_1}) \leq 1. \quad (3.6)$$

Число m выбираем из равенства

$$\frac{1}{2m} = m, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.7)$$

Из (3.3), (3.4) и (3.7) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{in}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

то-есть система (3.2) вполне регулярна.

Легко видеть из (2.9) и (2.10), что свободные члены системы (3.2) ограничены сверху и при $i \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

§ 4. Определение функции напряжения

Подставляя значения (2.1)–(2.3) в (1.10)–(1.12), для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) получим выражения

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (t + t_1)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \sin \alpha_k \varphi -$$

$$- \frac{r_1^2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \sin \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (4.1)$$

$$(0 < \varphi < \varphi_1, \quad -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t}] \frac{\beta_k \sin \beta_k t}{4 + \beta_k^2} + \\ & + \frac{2r_1^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k t}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t, \quad (4.2) \end{aligned}$$

($-\varphi_2 < \varphi < 0, -t_1 < t < 0$)

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & -\frac{2r_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k t}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \frac{r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\varphi + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \frac{\gamma_k \sin \gamma_k t}{4 + \gamma_k^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi. \quad (4.3) \end{aligned}$$

($-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 < t \leq t_2$)

Заменяя в этих выражениях коэффициенты $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ через X_k и Y_k при помощи (2.6) и произведя некоторое преобразование, выражения (4.1)–(4.3) приведем к виду

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \\ & + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (4.4) \end{aligned}$$

($0 < \varphi < \varphi_1, -t_1 < t < 0$)

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi - \\ & - \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t, \quad (4.5) \end{aligned}$$

($-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0$)

$$\Phi_3(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi -$$

$$- \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{2it_2}}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{\varphi_2}{2}} \sin \gamma_k t \quad (4.6)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2).$$

§ 5. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении сплошного призматического стержня определяется формулой

$$C = 2G \int_{\Omega} U d\Omega = 4G \int_{\Omega^*} U d\Omega, \quad (5.1)$$

где Ω — область сечения стержня, Ω^* — половина области сечения.

Подставляя, согласно (1.5), выражения (4.4)–(4.6) в (5.1) и произведя интегрирование, для определения жесткости при кручении получим следующую формулу

$$C = 2G \left\{ \frac{\varphi_1}{4} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\varphi_2}{4} (r_3^4 - r_1^4) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4t_1} (r_2^2 - r_1^2)^2 - \right.$$

$$- \frac{\varphi_2}{4t_2} (r_1^2 - r_2^2)^2 - \frac{2r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k |1 + (-1)^{k+1} e^{-2it_1}|}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \left(\operatorname{th} \beta_k \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_2}{2} \right) -$$

$$- \frac{4mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{-2it_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \right.$$

$$- \left. \frac{e^{2it_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \frac{8r_1^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2it_1}|^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_2}{2} -$$

$$- \frac{16r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{2it_2}|^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2} \left. \right\}. \quad (5.2)$$

Решая бесконечные системы (2.7), мы получим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком и с недостатком. Пользуясь этими значениями неизвестных, можно получить по формуле (5.2) значения жесткостей с избытком и недостатком.

Из (5.2), переходя к пределу при $t_1 \rightarrow \infty$ ($r_1 = 0$), получим формулу для жесткости кругового сектора с зубцами

$$\begin{aligned}
 C = & 2G \left\{ \frac{\varphi_1 r_2^4}{4} + \frac{\varphi_2 r_3^4}{4} - \frac{\varphi_2}{4t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 - \right. \\
 & - \frac{4mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left(1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \\
 & - \frac{2r_2^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{X(z)}{z(z^2 + 4)} \left(\operatorname{th} z \varphi_1 + \operatorname{th} \frac{z \varphi_2}{2} \right) dz - \frac{8r_2^4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z \varphi_2}{2}}{z(z^2 + 4)^2} dz - \\
 & - \frac{16r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2} \Bigg\}. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Здесь неизвестные коэффициенты $X(z)$ и Y_k должны быть определены из систем, получаемых из (2.7) при $t_1 \rightarrow \infty$ соответствующим предельным переходом.

§ 6. Жесткости кругового и кольцевого секторов

Из (5.3), снова переходя к пределу при $t_2 \rightarrow 0$ ($r_3 = r_2$), получим формулу для жесткости кругового сектора с центральным углом $\alpha = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$.

$$\begin{aligned}
 C = & 2Gr_2^4 \left[\frac{\alpha}{8} - \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z\alpha}{2} dz}{z(z^2 + 4)^2} \right] = \\
 = & Gr_2^4 \frac{8\alpha^3}{\pi^4} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \left(k + \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2} = Gr_2^4 K(\alpha). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

При этом использованы значения интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z\alpha}{2} dz}{z(z^2 + q^2)^2} = \frac{\alpha\pi}{8q^3} - \frac{\alpha^3}{q\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \left(k + \frac{\alpha q}{\pi} \right)^2}, \quad (6.2)$$

и неизвестных

$$X(z) = \frac{4r_2^2 \operatorname{ch} z \varphi_1}{(z^2 + 4) \operatorname{ch} z (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad Y_k = 0, \quad (6.3)$$

которые получаются из систем (2.7) соответствующим предельным переходом при $r_3 = r_2$ и $r_1 = 0$.

Формула (6.1) совпадает с формулами Стивенсона А. С. [7] и Арутюняна Н. Х. [8, 9], выведенными ими для жесткости кругового сектора другими способами.

Формулу (6.1) можно записать также и в виде

$$K(\alpha) = \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\psi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\psi\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right) - C_0 \right] + \\ + \frac{2\alpha}{\pi^2} \left[\psi'\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right) - \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \right], \quad (6.4)$$

где использовано значение ряда

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+z)^2} = \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{\pi^2}{8} + \psi'(z) - \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{z}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{z} \left[\psi\left(\frac{z}{2}\right) - 2\psi(z) - C_0 \right] \right\}. \quad (6.5)$$

Здесь $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ — соответственно первая и вторая производные гамма-функции, а C_0 — постоянная Эйлера [16].

Из (5.2), при $t_2 = 0$, получаем также формулу для жесткости стержня с сечением в виде кольцевого сектора с центральным углом $\alpha = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$

$$C = Gr_2^4 K(\lambda; \alpha), \quad \lambda = \frac{r_1}{r_2}, \quad (6.6)$$

где

$$K(\lambda; \alpha) = \frac{\alpha}{4} (1 - \lambda^4) - \frac{\alpha}{4t_1} (1 - \lambda^2)^2 - \\ - \frac{16}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]^2}{\beta_k^2 (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \alpha}{2}. \quad (6.7)$$

При этом использованы следующие значения неизвестных

$$X_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k^2 + 4} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1}{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad Y_k = 0, \quad (6.8)$$

получаемые из систем (2.7) соответствующим предельным переходом при $r_3 = r_2$.

§ 7. Численные примеры

В качестве численных примеров рассмотрены стержни с сечениями в виде кольцевого сектора с краевыми зубцами и без зубцов.

В таблицах 1 и 2 для жесткости кольцевого сектора даются значения коэффициента $K(\lambda, \alpha)$, вычисленные по формуле (6.7). В этих же таблицах, для сравнения, приведены также значения этого же коэффициента, вычисленные в работе Лыскова [6] и по Сен-Венану [2].

Таблица 1

$\lambda = \frac{r_1}{r_2}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$K(\lambda; 2\pi)$ По Лыскову	0,878	0,725	0,570	0,394	0,291	0,183	0,101	0,045	0,014	0,0019	0
$K(\lambda; 2\pi)$ По формуле (6.7)	0,878	0,726	0,570	0,421	0,293	0,184	0,102	0,045	0,015	0,0021	0

Таблица 2

α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
$K\left(\frac{1}{2}; \alpha\right)$ по Сеп-Венану	0,0196	0,0524	0,0854	—
$K\left(\frac{1}{2}; \alpha\right)$ по формуле (6.7)	0,0169	0,0565	0,0942	0,1844

В таблице 3 приводятся вычисленные по формуле (5.2) жесткости стержней с сечениями в виде полукольца с зубцами (фиг. 2) и хомута (фиг. 3) с размерами

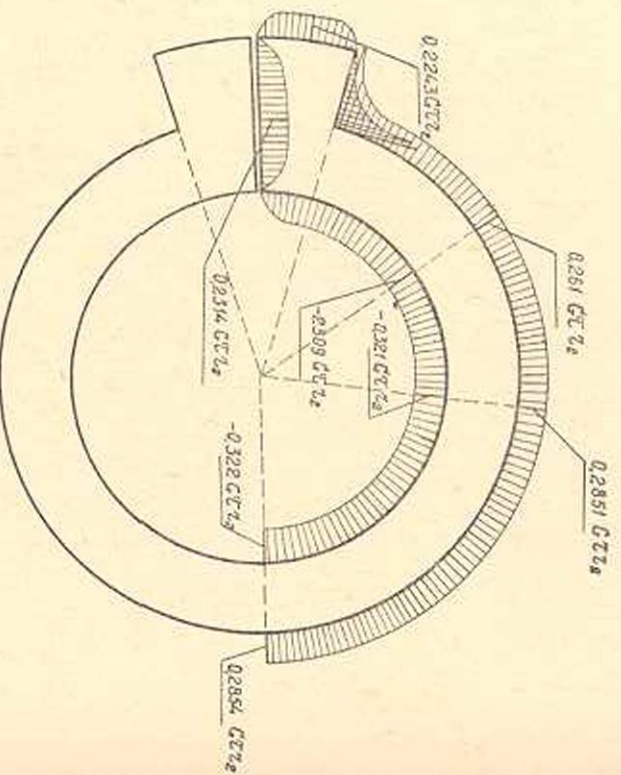
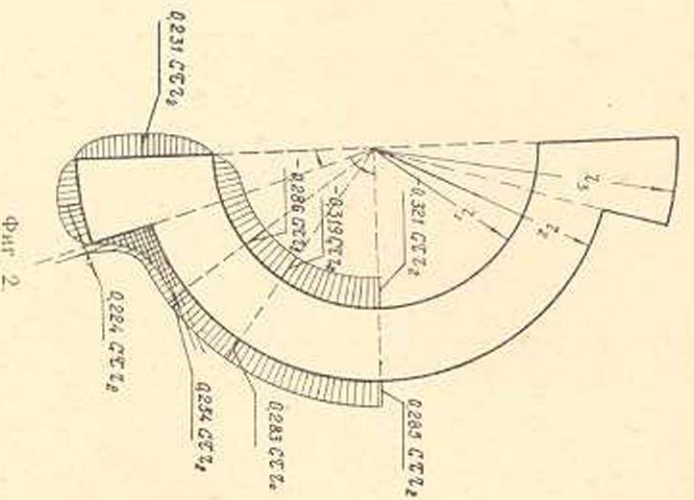
$$\frac{r_1}{r_2} = 0,7; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,3; \quad \varphi_2 = 0,3 = 17^\circ 11' 19'' \quad (7.1)$$

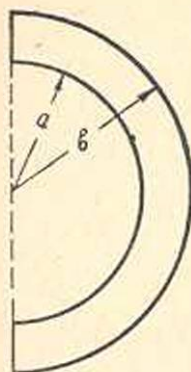
для двух случаев $\left(\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \right)$.

В этой же таблице, для сравнения, приводятся также жесткости стержней с сечениями в виде полуколец $\left(\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} = 0,7 \text{ и } \frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{7}{13} \right)$ и колец с трещинами таких же размеров (фиг. 4 и 5).

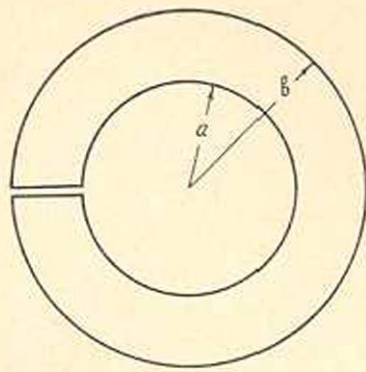
Таблица 3

	$\frac{a}{b}$	Кольцевой сектор $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} = 0,7$	Кольцевой сектор с краевыми зубцами			Кольцевой сектор $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{7}{13}$
			с недост.	с избытк.	среднее	
Жесткости	$\frac{\pi}{2}$	0,033	0,103	0,105	0,104	0,257
$\frac{C}{Gr_2^4}$	π	0,045	0,127	0,131	0,129	0,513





Фиг. 4.



Фиг. 5.

§ 8. Определение напряжений

Пользуясь соотношениями (1.2), (1.5) и (4.4)–(4.6), для определения касательных напряжений τ_{rz} и $\tau_{z\varphi}$ в сечении стержня, получим следующие формулы

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{t_1 r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (8.1)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} - r_2^2 e^{2t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \cos \beta_k t \right], \quad (8.2)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[\frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{ch} \beta_k \varphi}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t - \right. \\ \left. - \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t - \right. \\ \left. - \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \cos \lambda_k \varphi \right], \quad (8.3)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} - r_2^2 e^{2t} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{sh} \beta_k \varphi}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \cos \beta_k t + \\
& + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \cos \beta_k t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi \Bigg] \quad (8.4) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}(t, \varphi) = & - \frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[- \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \cos \lambda_k \varphi + \right. \\
& + \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{sh} \gamma_k \left(\frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{(\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \gamma_k \frac{\varphi_2}{2}} \sin \gamma_k t \Bigg] \quad (8.5) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = & - \frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[\frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} - r_2^2 e^{2t} - \right. \\
& - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{(\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}} \cos \gamma_k t - \\
& - \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi \Bigg] \quad (8.6) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2).
\end{aligned}$$

В качестве примера по этим формулам вычислены напряжения $\tau_{z\varphi}$ для стержней с сечениями в виде полукольца с зубцами (фиг. 2) и хомута (фиг. 3), приведенных в параграфе 6.

На фигурах 2 и 3 приводятся эпюры распределения этих напряжений в рассматриваемых сечениях.

В частном случае, когда мы имеем стержень с сечением в виде кругового сектора ($r_1 = 0$, $r_3 = r_2$, $2(\varphi_1 + \varphi_2) = \alpha$), для определения максимальных касательных напряжений $\tau_{z\varphi}$ на криволинейной части контура сечения получаем формулу

$$\tau_{z\varphi} \left(0, \frac{\alpha}{2} \right) = G\tau r_2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[\psi \left(\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{4} \right) - \psi \left(\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{3}{4} \right) \right] \right\} \quad (8.7)$$

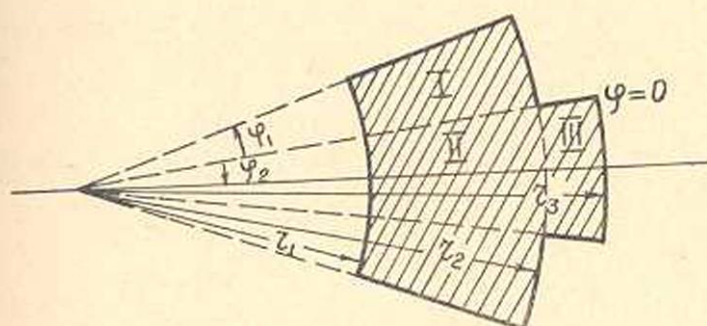
Некоторые значения этих напряжений, вычисленные по формуле (8.7), приводятся в таблице 4. В этой же таблице, для сравнения, приводятся значения тех же напряжений, вычисленные Сен-Венаном [2].

Таблица 4

α		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
$\tau_{\varphi}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	по Сен-Венану	0,452	0,622	0,719	—
$G\tau r_z$	по точной формуле (8.7)	0,4522	0,6324	0,7268	0,8488

Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с центральным зубцом

Рассмотрим кручение стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора, имеющего на наружной криволинейной части центрально расположенный зубец (фиг. 6).



Фиг. 6.

§ 9. Постановка и решение задачи

В силу симметрии профиля функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем только в половине области сечения (фиг. 6). Разбиваем эту область на простейшие области I, II и III и полагаем, что $\Phi(t, \varphi)$ в этих областях принимает значения Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 , которые для нашего профиля должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \Phi_1(t, \varphi_1) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0, \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0, \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} &= \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, 0) &= \Phi_2(t, 0), \quad \Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right)_{t=0} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}. \quad (9.3)$$

Решая уравнение задачи при условиях (9.1) и (9.2), для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\beta_k (\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi, \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi - \\ & - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_2 + \varphi)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2)$$

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (9.7)$$

Постоянные коэффициенты, входящие в выражения (9.4)–(9.6), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k, \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9.8)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)}, \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{mt_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

$$P_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (9.10)$$

$$Q_k = -\frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{2r_2^2 \lambda_k}{\lambda_k^2 - 4} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda_k t_1} + \frac{1}{\lambda_k^2 - 4} \left(r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) \right\}. \quad (9.11)$$

Сумма модулей коэффициентов систем (9.8) оценивается неравенствами

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| &= \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} = \\ &= \frac{m}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1} \left(\operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 - \frac{1}{\beta_k \varphi_2} \right) < m = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| &= \frac{2\lambda_k}{mt_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} = \\ &= \frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{1}{\lambda_k t_1} \right) < \frac{1}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

а свободные члены этих систем ограничены сверху и при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

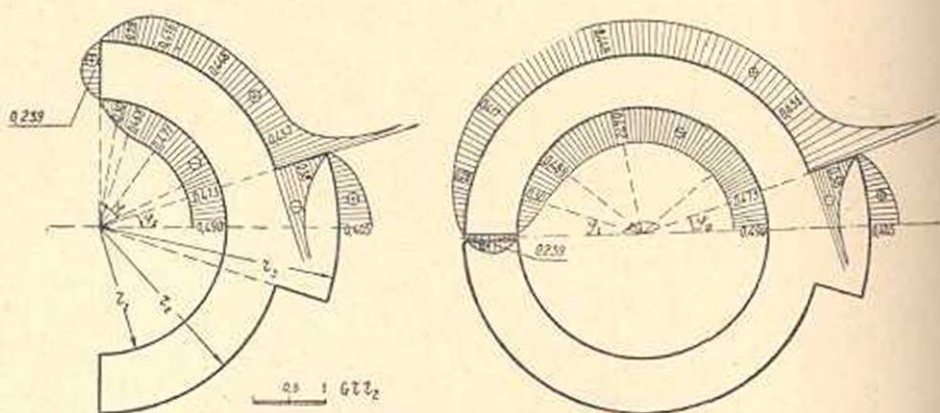
§ 10. Определение жесткости при кручении

Пользуясь формулой (5.1) и выражениями (1.5), (9.4)–(9.6), для жесткости при кручении рассматриваемого профиля получим следующую формулу

$$\begin{aligned} C &= 4G \left\{ \frac{\varphi_1}{8} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\varphi_2}{8} (r_3^4 - r_1^4) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{8t_1} (r_2^2 - r_1^2)^2 - \right. \\ &- \frac{\varphi_2}{8t_2} (r_3^2 - r_1^2)^2 - \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \left(\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_1}{2} \right) - \\ &- \frac{mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \Big) - \frac{4r_2^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}|^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_1}{2} - \\
 & - \frac{4r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_2}|^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2 \Big\}. \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

В качестве численного примера по формуле (10.1) вычислены жесткости стержней с сечениями в виде полукольца с центральным зубцом (фиг. 7) и кольца с трещиной и центральным зубцом (фиг. 8) для случая, когда



Фиг. 7.

Фиг. 8.

$$\frac{r_1}{r_2} = 0,7; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,3; \quad \varphi_2 = 0,3 = 17^\circ 11' 19''. \quad (10.2)$$

Значения жесткости с избытком и с недостатком для этих двух случаев $\left(\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \right)$ приведены в таблице 5.

Таблица 5

		Кольцевой сектор с центральным зубцом		
		с недостатком	с избытком	среднее
Жесткости	$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$	0,078	0,080	0,079
$\frac{C}{Gr_2^4}$	$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$	0,089	0,091	0,090

Сравнивая эти значения с жесткостями профилей (фиг. 2 и 3), приведенными в таблице 3, мы видим, что жесткость кольцевого сектора с краевыми зубцами больше жесткости такого же кольцевого сектора, имеющего центральный зубец соответствующего размера.

На фигурах 7 и 8 приводятся также и эпюры напряжений.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 25 VI 1959

Բ. Լ. Աբրահամյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ԱՏԱՄՆԵՐՈՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍՔԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ
ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Հոդվածում դիտարկվում է ատամներով օղակալին սեկտորի տեսքի լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը, երբ ատամները դասավորված են սիմետրիկ ձևով կողմնալին դիրքով (գծ. 1) և երբ ատամքն ունի կենտրոնական դիրք (գծ. 6):

Այս խնդրի ճշգրիտ լուծումն ստացված է օժանդակ ֆունկցիաների ներածուման եղանակով:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է շարքերով: Ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերված է անվերջ գծալին հավասարումների սիստեմների լուծման: Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները լիովին սեղուկյալ են: Մի քանի դեպքերի համար հաշվված են ոլորման կոշտութունները և լարումները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Сен-Венан (Saint-Venant). Sur la torsion des prismes à base mixtiligne, et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. Comptes Rendus t. 87, 1878, № 23, 849—854.
2. Сен-Венан (Saint-Venant). Exemples du calcul de la torsion de prismes a base mixtiligne. Comp. Rend. t. 87, 1878, № 24, 893—899.
3. Гринхилл (Greenhill A.). Mess. of Math., Vol. 9, 1879, p. 35.
4. Динник А. Н. Известия Донск. политехн. инст. Новочеркасск, том 1, отд. II, 1912; том II, отд. II, 1913, стр. 309.
5. Локшин А. Ш. Кручение вала секторного сечения. Изв. Днепропетровского горн. института, 1928.
6. Лысков В. Н. Влияние радиальной трещины при кручении сплошного и трубчатого круглого вала. Изв. Донск. политехнического института, том XIV, 1930.
7. Стивенсон А. С. (Stevenson). Flexure with shear and associated torsion in Prisms of Uni-Axial and Asymmetric cross-sections, Phil. Trans. Roy. Soc., London, (A), 237, 1938, 161—229.
8. Арутюнян Н. Х. О кручении эллиптического кольцевого сектора. ПММ, т. XI, № 5, 1947, 543—546.
9. Арутюнян Н. Х. Приближенное решение некоторых задач о кручении анизотропных стержней. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. 2, 1948, стр. 41—56.
10. Шэн Бей-Линь (Shang Pei-Lin). Note on the torsional rigidity of cylinders of circular sector cross-sections. ZAMP, 1955, Bd. 6, №5, 416—419.
11. Шэн Бей-Линь (Shang Pei-Lin). Note on the torsional rigidity of semi-circular bars. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 9, 1951, 309—310.
12. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, вып. I, 1949, 107—112. ДАН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948, 67—74.
13. Абрамян Б. Л. Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 3, 1959, 109—116.

14. Абрамян Б. Л. О кручении круглого цилиндрического стержня, имеющего продольные полости. ДАН АрмССР, том XXVIII, № 5, 1959, 201—211.
15. Канторович Л. В., Крылов Б. И. Приближенные методы высшего анализа М.—Л., 1949.
16. Эмде Ф. и Янке Е. Таблицы функций. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.