

МАТЕМАТИКА

А. Б. Персесян

Разложение по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

В в е д е н и е

В предлагаемой работе исследуется краевая задача типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом второго порядка.

Такая задача в несколько менее общей постановке рассматривалась Норкиным [1], однако им получены лишь асимптотические формулы для собственных функций, вопрос же о разложении по собственным функциям оставался открытым.

В § 1 ставятся взаимно-сопряженные краевые задачи для интегро-дифференциального оператора с запаздывающим аргументом и изучается асимптотика собственных функций и собственных значений.

В § 2 строится функция Грина рассматриваемого интегро-дифференциального оператора.

В § 3 строится биортогональная система собственных и присоединенных функций взаимно-сопряженных краевых задач и уточняются асимптотические формулы.

При определенных ограничениях в § 4 доказываются теоремы о разложении по собственным и присоединенным функциям, равносходимость с обычными рядами Фурье и сходимость в среднем.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своему учителю академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну за ценные советы и внимание при выполнении настоящей работы.

§ 1. Взаимно-сопряженные краевые задачи.

Асимптотические формулы

1. Рассмотрим на конечном отрезке $[0, l]$ интегро-дифференциальный оператор с запаздывающим аргументом

$$Ly = -y'' + \sum_{i=1}^m q_i(x) y(x - \Delta_i(x)) + \int_0^x K(x, t) y(t) dt, \quad (1.1)$$

где $\Delta_i(x) > 0$, $\Delta_i(l) < l$, $\Delta_i'(x) < 0 < 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

$q_i(x)$ — действительные функции, причем $q_i(x) \equiv 0$ при $x - \Delta_i(x) < 0$ ($0 \leq x \leq l$), а при $x - \Delta_i(x) > 0$ $q_i(x)$ непрерывны, ($i = 1, 2, \dots, m$).

Ядро $K(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$) действительно и удовлетворяет условию

$$\int_0^l \int_0^l |K(t_1, t)| dt_1 dt < +\infty. \quad (1.2)$$

Условия, налагаемые на функции $q_i(x)$ означают, что в точке $x=0$ нет запаздывания.

Обозначим

$$\varphi_i(x) = x - \Delta_i(x), \quad \varphi_i^{-1}(x) = \psi_i(x) = x + \Delta_i'(x) \quad (1.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Функции $\varphi_i^{-1}(x)$ существуют в силу условий, налагаемых на функции $\Delta_i(x)$, а $\Delta_i'(x) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые на $[0, l]$ функции. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l z(x) Ly(x) dx &= - \int_0^l z(x) y''(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_0^l q_i(x) z(x) y(x - \Delta_i(x)) dx + \\ &+ \int_0^l z(x) \int_0^x K(x, t) y(t) dt dx = \\ &= [y(x) z'(x) - y'(x) z(x)]_0^l - \int_0^l y(x) z''(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(l)} q_i(\psi_i(x)) y(x) z(\psi_i(x)) \psi_i'(x) dx + \\ &+ \int_0^l y(x) \int_x^l K(t, x) z(t) dt dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Обозначим

$$q_i''(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \psi_i(l) < x \leq l \\ q_i(\psi_i(x)) \psi_i'(x) & \text{при } 0 \leq x < \psi_i(l) \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Назовем оператор

$$L^*z = -z''(x) + \sum_{i=1}^m q_i^*(x) z(x + \Delta_i^*(x)) + \\ + \int_x^l K(t, x) z(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1^*)$$

сопряженным к L на $[0, l]$.

Так как из (1.4) следует, что для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ и $z(x)$

$$\int_0^l z(x) L y(x) dx = \int_0^l y(x) L^* z(x) dx + [y(x) z'(x) - y'(x) z(x)]_0^l \quad (1.4')$$

то операторы L и L^* естественно назвать взаимно-сопряженными. Заметим, что оператор L^* есть интегро-дифференциальный оператор с опережающим аргументом.

Рассмотрим следующие взаимно-сопряженные краевые задачи

$$(A) \quad \begin{cases} Ly = \lambda y & (1.6) \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 & (1.7) \\ y(l) \cos \beta + y'(l) \sin \beta = 0 & (1.8) \end{cases}$$

$$(A^*) \quad \begin{cases} L^*z = \lambda z & (1.6^*) \\ z(0) \cos \alpha + z'(0) \sin \alpha = 0 & (1.7^*) \\ z(l) \cos \beta + z'(l) \sin \beta = 0 & (1.8^*) \end{cases}$$

где α и β — действительные параметры.

Пусть $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ суть соответственно решения задач Коши

$$Ly = \lambda y; \quad y(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad y'(0, \lambda) = -\cos \alpha \quad (1.9)$$

$$L^*z = \lambda z; \quad z(l, \lambda) = \sin \beta, \quad z'(l, \lambda) = -\cos \beta. \quad (1.9^*)$$

Как известно [2], задачи (1.9) и (1.9^{*}) имеют на $[0, l]$ единственные решения. Методом вариации произвольных постоянных легко убедиться, что задача Коши (1.9) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) y(t - \Delta_i(t), \lambda) dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} (x-t) \int_t^l K(t, t_1) y(t_1, \lambda) dt_1 dt \quad (1.10)$$

или, после соответствующей замены переменных, следующему уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = & \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(x)} \sin \sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t)) q_i^*(t) y(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_x^t \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 y(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Аналогично задача (1.9*) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) = & \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l - x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l - x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(x)}^l \sin \sqrt{\lambda} (\varphi_i(t) - x) q_i(t) z(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^l \int_x^t \sin \sqrt{\lambda} (t_1 - x) K(t, t_1) dt_1 z(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.11^*)$$

Легко видеть, что решения интегральных уравнений (1.11) и (1.11*) являются целыми функциями от λ типа не выше l . С другой стороны, очевидно, что задачи (1.6)–(1.7) и (1.6*)–(1.8*) с точностью до постоянного множителя при неизвестной функции соответственно эквивалентны задачам (1.9) и (1.9*), а следовательно и уравнениям (1.11) и (1.11*).

2°. Из условия (1.8) следует, что собственные значения задачи (A) суть нули целой функции

$$\omega(\lambda) = y(l, \lambda) \cos \beta + y_x(l, \lambda) \sin \beta. \quad (1.12)$$

Аналогично собственные значения задачи (A*) совпадают с нулями целой функции

$$\omega^*(\lambda) = -z(0, \lambda) \cos \alpha - z_x(0, \lambda) \sin \alpha. \quad (1.12^*)$$

Справедлива

Лемма 1.1

$$\omega(\lambda) \equiv \omega^*(\lambda) \quad (1.13)$$

т. е. собственные значения задач (A) и (A*) совпадают. Кроме того, справедливо соотношение

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx = \frac{\omega(\lambda) - \omega(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (1.14)$$

$(\lambda \neq \mu).$

В частности

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda) dx = \omega'(\lambda). \quad (1.14')$$

Доказательство. Из формулы (1.4') имеем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx &= \int_0^l z(x, \mu) L y(x, \lambda) dx = \\ &= \omega(\lambda) - \omega^*(\mu) + \int_0^l y(x, \lambda) L^* z(x, \mu) dx = \\ &= \omega(\lambda) - \omega^*(\mu) + \mu \int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из формулы (1.15) при $\lambda = \mu$ следует формула (1.13), что, в свою очередь, влечет справедливость формул (1.14) и (1.14').

Установим асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задач (A) и (A*).

Лемма 1.2. При $0 \leq x \leq l$ и $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ &+ \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) &= \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l-x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ &+ \left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \beta}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| (l-x)}) \end{aligned} \quad (1.16^*)$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= -\sin \alpha \sin \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + \sin(\alpha - \beta) \cos \sqrt{\lambda} l - \\ &- \cos \alpha \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} + \left(\sin \alpha \sin \beta + \right. \\ &\left. + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| l}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

причем оценка порядков остаточных членов в формулах (1.16) и (1.16*) равномерна относительно $x \in (0, l)$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{\lambda} = \alpha + i\tau$

$$y(x, \lambda) = e^{|\tau|x} f(x, \lambda). \quad (1.18)$$

Тогда из (1.11) имеем

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) = & e^{-|\tau|x} \left(\sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_t^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 e^{-|\tau|(x-t)} f(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(x)} \sin \sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t)) q_i^*(t) e^{-|\tau|(x-t)} f(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Пусть

$$\mu(\lambda) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x, \lambda)|.$$

Из (1.19) имеем

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) \leq & |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| + \\ & + \frac{\mu(\lambda)}{|\sqrt{\lambda}|} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(1)} |q_i^*(t)| dt + \int_0^1 \int_t^1 |K(t_1, t)| dt_1 dt \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отсюда при достаточно большом $|\lambda|$ получим

$$\mu(\lambda) \leq M \left\{ |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| \right\}. \quad (1.21)$$

Или, согласно (1.18),

$$|y(x, \lambda)| \leq M_1 e^{|\tau|x} \left\{ |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| \right\}. \quad (1.22)$$

Подставляя оценку (1.22) снова в формулу (1.11), получим формулу (1.16). Формула (1.16*) доказывается аналогично.

Продифференцировав формулу (1.11) по x и учитывая оценку (1.16), получим, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} = & -\sin \alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \\ & + \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right) O \left(e^{|\tau|\sqrt{\lambda}|x|} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Наконец, из формул (1.16), (1.23) и (1.12) следует оценка (1.17). Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает существование бесконечного множества собственных значений задач (A) и (A*) и указывает их асимптотику.

Лемма 1.3. Вне достаточно большого круга $|\lambda| \leq R$ все собственные значения задач (A) и (A*) являются простыми корнями функции $\omega(\lambda)$, положительны и имеют вид

а) при $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ или $\sin \alpha = \sin \beta = 0$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0) \quad (1.24)$$

б) при $\sin \alpha = 0$, $\sin \beta \neq 0$ или $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta = 0$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0). \quad (1.25)$$

Доказательство. Формулы (1.24) и (1.25) получаются, как обычно, из леммы 1.2 (см., например, [3], гл. 1, § 1).

Применяя тот же метод, что и при доказательстве леммы 1.2, получим, что, например, при $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$

$$\omega'(\lambda) = -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} l + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{Jm\sqrt{\lambda} l}\right).$$

Согласно (1.24), при достаточно больших по модулю $|\lambda_n|$ будем иметь

$$\begin{aligned} \omega'(\lambda_n) &= -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + \\ &+ O\left(\frac{1}{n} e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $|\lambda_n|$ $\omega'(\lambda_n) \neq 0$, т. е. первое утверждение леммы.

Далее, пусть $\lambda_n = u_n + iv_n$ есть собственное значение задач (A) и (A*). Так как функции $q_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, m$), $K(x, t)$ и параметры α, β вещественны, то $\bar{\lambda}_n = u_n - iv_n$ также будет собственным значением задач (A) и (A*). Допустим, что $v_n \neq 0$. Пусть $y_n(x)$ есть собственная функция задачи (A), соответствующая собственному значению λ_n , а $\bar{z}_n(x)$ — собственная функция задачи (A*), соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}_n$. Согласно формуле (1.14) имеем

$$\int_0^l y_n(x) \bar{z}_n(x) dx = 0, \quad (n > n_0). \quad (1.26)$$

Учитывая асимптотические формулы (1.16), (1.16*) и (1.24), (1.25), получим, что из (1.26) следует (для простоты положим $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$)

$$\int_0^l \left\{ \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) x + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sin \beta \cos \left(\frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (l-x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} dx = 0, \quad (n > n_0).$$

т. е.

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0),$$

что невозможно для достаточно большого $n_0 > 0$. Лемма доказана.

§ 2. Функция Грина оператора с запаздывающим аргументом

В этом параграфе мы построим функцию Грина оператора L .

1°. Пусть функция $g(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$) при каждом фиксированном t есть решение следующей задачи Коши для интегро-дифференциального оператора с запаздывающим аргументом

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} + \int_t^x K(x, t_1) g(t_1, t) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m q_i(x, t) g(x - \Delta_i(x), t) = 0, \\ g(x, t)|_{x=t} = 0, \quad \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=t} = 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где

$$q_i(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < x < \psi_i(t) \\ q_i(x) & \text{при } \psi_i(t) \leq x < l \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.2)$$

Легко видеть, что, согласно [2], задача Коши (2.1) имеет единственное решение и эквивалентна интегральному уравнению

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x \left[\int_{t_1}^x K(t_2, t_1) (x - t_2) dt_2 \right] g(t_1, t) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m \int_t^x q_i(t_1, t) (x - t_1) g(\varphi_i(t_1), t) dt_1. \quad (2.3)$$

В свою очередь, легко проверить, что уравнение (2.3) эквивалентно следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x K(t_2, t_1) (x - t_2) dt_2 \int_{t_1}^x g(t_1, t) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(t)}^{\varphi_i(x)} q_i^*(t_1) (x - \varphi_i(t_1)) g(t_1, t) dt_1 \quad (2.4) \\ 0 \leq t \leq x \leq l.$$

Обозначив ядро интегрального уравнения (2.4) через $Q(x, t)$, получим

$$Q(x, t) = \int_t^x K(t_2, t_1) (x - t_1) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t) (x - \varphi_i(t)), \quad (2.4')$$

где функции $q_i^*(x, t)$ определяются из формул (2.2*) (см. ниже)

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x Q(x, t_1) g(t_1, t) dt_1. \quad (2.5)$$

Хотя ядро $Q(x, t)$, вообще говоря, разрывное, уравнение (2.5) имеет единственное решение, получаемое методом Вольтерра (см., например, [6], § 556).

Лемма 2.1. Если функция $g(x, t)$ есть решение задачи Коши (2.1) при фиксированном t ($0 \leq t \leq x \leq l$), то при фиксированном x ($0 \leq t \leq x \leq l$) функция $g(x, t)$ является решением следующей задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с опережающим аргументом

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t^2} + \int_t^x K(t_1, t) g(x, t_1) dt_1 + \\ & + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t) g(x, t + \Delta_i^*(t)) = 0 \\ & 0 \leq t \leq x \leq l \\ & g(x, t)|_{t=x} = 0, \quad \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (2.1'')$$

где

$$q_i^*(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_i(x) < t \leq x \\ q_i^*(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \varphi_i(x) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.2'')$$

Доказательство. Пусть $R(x, t)$ — резольвента уравнения (2.5). Тогда

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x R(x, u)(u - t) du. \quad (2.6)$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} = R(x, t). \quad (2.7)$$

Известно, что резольвента $R(x, t)$ удовлетворяет следующему уравнению (см., например, [6], § 559)

$$R(x, t) = Q(x, t) + \int_t^x R(x, t_1) Q(t_1, t) dt. \quad (2.8)$$

Из (2.2*), (2.4) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} R(x, t) = & \int_t^x K(t_1, t)(x - t_1) dt_1 + \\ & + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t)(x - \psi_i(t)) + \\ & + \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} \left\{ \int_t^{t_1} K(t_2, t)(t_1 - t_2) dt_2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m q_i^*(t_1, t)(t_1 - \psi_i(t)) \right\} dt_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$0 \leq t \leq x \leq l.$

Из (2.6) непосредственно следует, что

$$g(x, t)|_{t=x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} = -1. \quad (2.10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} dt_1 \int_t^{t_1} K(t_2, t)(t_1 - t_2) dt_2 = \\ & = \int_t^x K(t_2, t) dt_2 \int_{t_2}^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} (t_1 - t_2) dt_1 = \\ & = \int_t^x K(t_2, t) dt_2 \int_{t_2}^x R(x, t_1)(t_1 - t_2) dt_1 = \end{aligned}$$

$$= \int_t^x K(t_2, t) \{g(x, t_2) - (x - t_2)\} dt_2. \quad (2.11)$$

и при $x > \psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} q_i^*(t_1, t) (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(t) \int_{\psi_i(t)}^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(t) \left\{ \left[(t_1 - \psi_i(t)) \frac{\partial g(x, t_1)}{\partial t_1} \right]_{t_1 = \psi_i(t)}^x - \right. \\ & \quad \left. - g(x, t_1) \Big|_{t_1 = \psi_i(t)}^x \right\} = \\ &= q_i^*(t) \{ \psi_i(t) - x + g(x, \psi_i(t)) \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(i = 1, 2, \dots, m).$

Ясно также, что при $x < \psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) интеграл в левой части формулы (2.11) равен нулю. Но условие $x < \psi_i(t)$ означает, что $t > \varphi_i(x)$. Таким образом, учитывая обозначения (2.2*), имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t_1^2} q_i^*(t_1, t) (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(x, t) \{g(x, t + \Delta_i^*(t)) - (x - \psi_i(t))\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$(0 \leq t \leq x \leq l; i = 1, 2, \dots, m).$

Подставив формулы (2.11) и (2.12) в выражение (2.9) и учитывая соотношения (2.7) и (2.10), получим утверждение леммы 2.1.

2°. Приступим к построению функции Грина задачи (A). Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением задач (A) и (A*) (этого всегда можно добиться, принимая, если нужно, функцию $q_1(x) \equiv \text{const}$ и $\Delta_1(x) \equiv 0$). Пусть, далее, функция $f(x)$ имеет ограниченную вторую производную на $(0, l)$ и удовлетворяет краевым условиям задач (A) и (A*)

$$\begin{aligned} f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha &= 0 \\ f(l) \cos \beta + f'(l) \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим

$$Lf(x) \equiv h(x) \quad (2.14)$$

$$L^*f(x) \equiv h^*(x). \quad (2.14^*)$$

Введем функцию

$$G(x, t) = \begin{cases} c_0 y(x, 0) z(t, 0) & \text{при } 0 < x \leq t \leq l \\ c_0 y(x, 0) z(t, 0) + g(x, t) & \text{при } l > x > t > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

где $g(x, t)$ — решение задачи Коши (2.1) и

$$c_0 = \frac{-1}{\omega(0)} \quad (2.16)$$

(так как $\lambda = 0$ — не собственное значение, то $\omega(0) \neq 0$).

Теорема 2.1. Функция $G(x, t)$, определяемая формулой (2.15), является функцией Грина задачи (A), т. е. из (2.13) — (2.14) следует, что

$$f(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt. \quad (2.17)$$

В свою очередь, функция $G^*(x, t) \equiv G(t, x)$ является функцией Грина задачи (A*), т. е. из (2.13) — (2.14*) следует, что

$$f^*(x) = \int_0^l G(t, x) h^*(t) dt. \quad (2.17^*)$$

Доказательство. Составим функцию

$$f^*(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt \quad (2.18)$$

и покажем, что она удовлетворяет соотношениям (2.13) — (2.14). Тогда из того, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (A), будет следовать, что $f^*(x) \equiv f(x)$ ($0 < x < l$).

Действительно, имеем

$$f^*(x) = c_0 y(x, 0) \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \int_0^x g(x, t) h(t) dt. \quad (2.19)$$

Откуда, учитывая свойства функции $g(x, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^*(x)}{dx^2} &= c_0 y_{xx}(x, 0) \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \\ &+ h(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} h(t) dt = h(x) + \\ &+ c_0 \left[\sum_{i=1}^m q_i(x) y(z_i(x), 0) + \int_0^x K(x, t) y(t, 0) dt \right] \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m q_i(x) \int_0^{\varphi_i(x)} g(\varphi_i(x), t) h(t) dt + \int_0^x \int_t^x K(x, t_1) g(t_1, t) dt_1 h(t) dt = \\
& = h(x) + \sum_{i=1}^m q_i(x) f^*(x - \Delta_i(x)) + \int_0^x K(x, t) f^*(t) dt \quad (2.20)
\end{aligned}$$

т. е.

$$L f^*(x) = h(x) \quad (2.21)$$

$$0 \leq x \leq l.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
f^*(0) \cos \alpha + \left. \frac{df^*(x)}{dx} \right|_{x=0} \sin \alpha = c_0 \{ y(0, 0) \cos \alpha + \\
+ y'_x(0, 0) \sin \alpha \} \int_0^l h(t) z(t, 0) dt = 0, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(l) \cos \beta + \left. \frac{df^*(x)}{dx} \right|_{x=l} \sin \beta = c_0 \{ y(l, 0) \cos \beta + \\
+ y'_x(l, 0) \sin \beta \} \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \int_0^l \left\{ g(l, t) \cos \beta + \right. \\
\left. + \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} \sin \beta \} h(t) dt. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Но из (2.1), (2.1*) и (2.3) следует, что функция

$$\Phi(t) \equiv g(l, t) \cos \beta + \left. \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} \sin \beta \quad (2.24)$$

удовлетворяет задаче Коши

$$L^* \Phi(t) = 0 \quad (2.25)$$

$$0 \leq t \leq l,$$

$$\Phi(l) = \sin \beta, \quad \Phi'(l) = -\cos \beta.$$

Значит

$$\Phi(t) \equiv z(t, 0) \quad (2.26)$$

$$0 \leq t \leq l.$$

Из (2.23), (2.26) и (2.16) следует, что

$$f^*(l) \cos \beta + \left. \frac{d}{dx} f^*(x) \right|_{x=l} \sin \beta = 0.$$

Следовательно, $f^*(x) \equiv f(x)$, т. е. функция $G(x, t)$ есть функция Грина задачи (A).

Пользуясь леммой 2.1, совершенно аналогичными выкладками можно показать, что функция $G^*(x, t) \equiv G(t, x)$ ($0 \leq t, x \leq l$) является функцией Грина задачи (A^*) . Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что задачи (A) и (A^*) соответственно эквивалентны следующим союзным интегральным уравнениям Фредгольма:

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x, t) y(t) dt, \quad (2.27)$$

$$z(x) = \lambda \int_0^l G(t, x) z(t) dt, \quad (2.27^*)$$

где $G(x, t)$ — функция Грина задачи (A) .

§ 3. Построение биортогональной системы и предварительное разложение. Уточнение асимптотических формул

1°. Согласно лемме 1.1 справедлива формула

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx = \frac{\omega(\lambda) - \omega(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (3.1)$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1 работы [4].

Пусть λ_n есть p_n -кратный нуль функции $\omega(\lambda)$. Поставим в соответствие каждому λ_n две последовательности функций

$$\frac{\partial^j y(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^j} \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1), \quad (3.2)$$

$$\text{и} \quad \sum_{k=0}^{p_n-j-1} \frac{b_{p_n-j-k-1}^{(n)}}{k! j!} \frac{\partial^k z(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^k} \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1), \quad (3.2^*)$$

где

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_n)^{p_n}}{\omega(\lambda)} \right\}_{\lambda = \lambda_n} \quad (k = 0, 1, \dots, p_n - 1).$$

Из леммы 1.3 следует, что при достаточно большом $|\lambda_n|$ имеем две функции

$$y(x, \lambda_n) \quad (3.3)$$

и

$$\frac{z(x, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}.$$

Пусть, далее, $\{y_k(x)\}$ и $\{z_k(x)\}$ ($k = 0, 1, \dots$) соответственно множества всех функций вида (3.2) и (3.2*), соответствующих всем нулям функции $\omega(\lambda)$ и пронумерованных в порядке возрастания модуля λ_n . Согласно теореме 1 работы [4], справедлива.

Лемма 3.1. Система $\{y_k(x), z_k(x)\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) биортогональна на $[0, l]$, т. е.

$$\int_0^l y_k(x) z_p(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ 1, & k = p. \end{cases} \quad (3.4)$$

Кроме того, если контур Γ_n содержит первые n нулей функции $\omega(\lambda)$ (включая их кратность), то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} d\lambda = \\ = \sum_{k=0}^n y_k(x) z_k(t) \quad 0 \leq x, t \leq l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $f(x) \in L_1(0, l)$ и C_n — пробегаямая в положительном направлении окружность радиуса $R_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n-1}}{2}$ ($n > n_0$). Согласно лемме 1.3, при достаточно большом n_0 на окружностях C_n нет нулей функции $\omega(\lambda)$.

Теорема 3.1. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на некотором интервале $\Delta \in [a, b]$ ($0 < a < b < l$) и $f(x) \in L_1(0, l)$, то

$$\frac{1}{2} f(x+0) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_x^l f(t) z_k(t) dt \quad (3.6)$$

и

$$\frac{1}{2} f(x-0) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x) \int_0^x f(t) y_k(t) dt \quad x \in \Delta. \quad (3.6^*)$$

Доказательство. Для определенности положим

$$\sin \alpha \neq 0, \quad \sin \beta \neq 0.$$

Учитывая равномерность оценок в формулах (1.16) и (1.16*) леммы 1.2, получим при $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in C_n$

$$\begin{aligned} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^l z(t, \lambda) f(t) dt = \\ = \frac{\left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x}\right) \right\}}{-\sin \alpha \sin \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + O\left(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| l}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_x^l f(t) \left\{ \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-t) - O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(l-t)}\right) \right\} dt = \\
& = \frac{\cos \sqrt{\lambda} x \int_x^l f(t) \cos \sqrt{\lambda} (l-t) dt}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l} + \\
& + O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^l e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(x-t)} |f(t)| dt \right\}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Пусть $x < l - \delta$ ($0 < \delta < l$), тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^l e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(x-t)} |f(t)| dt \right\} = \\
& = O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} e^{-|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \delta} \right\} + O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^{x+\delta} |f(t)| dt \right\}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Учитывая произвольность $\delta > 0$, из леммы 3.1 и формул (3.7) и (3.8) получим

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < R_n} y_k(x) \int_x^l f(t) z_k(t) dt = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^l f(t) z(t, \lambda) dt d\lambda = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l} \int_x^l \cos \sqrt{\lambda} (l-t) f(t) dt d\lambda. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Пользуясь известным методом, восходящим к Коши (см., например, [5]), из (3.9) получим формулу (3.6). В случае, когда $\sin \alpha = 0$ или $\sin \beta = 0$, метод доказательства тот же.

Аналогично доказывается формула (3.6*).

2°. Введем обозначение функции типа Миттаг-Лефлера

$$E_p(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k p^{-1})}, \quad (p > 0, -\infty < \mu < +\infty).$$

Как известно [7], при $\mu < 3$ справедлива оценка

$$|E_{\frac{1}{2}}(-u, \mu)| \leq A(1+u)^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad u \geq 0 \quad (3.10)$$

где $A > 0$ постоянная, не зависящая от u .

Лемма 3.2. Пусть функция $f(x, \lambda)$ непрерывна на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $\lambda \geq R > 0$. Кроме того, пусть

$$|f(x, \lambda)| \leq M_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

где M_1 не зависит от x и λ .

Тогда при $1 < \mu < 3$

$$\left| \int_0^x f(t, \lambda) (x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu) dt \right| \leq \quad (3.11)$$

$$\leq M_2 \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

где M_2 — постоянная, не зависящая от x и λ .

Доказательство. При $1 < \mu < 3$ имеем

$$(1+u)^{\frac{1-\mu}{2}} = u^{\frac{1-\mu}{2}} \left(\frac{u}{1+u} \right)^{\frac{\mu-1}{2}} \leq u^{\frac{1-\mu}{2}}. \quad (3.12)$$

Значит, оценку (3.10) можно переписать в виде

$$|E_{\frac{1}{2}}(-u, \mu)| \leq A u^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad u \geq 0. \quad (3.13)$$

Отсюда

$$|(x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu)| \leq A \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq t \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

или

$$\left| \int_0^x f(t, \lambda) (x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu) dt \right| \leq$$

$$\leq A \lambda^{\frac{1-\mu}{2}} \int_0^x |f(t, \lambda)| dt \leq A M_1 l \lambda^{\frac{1-\mu}{2}} = M_2 \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Так как M_2 от λ не зависит, то оценка (3.11) справедлива при $\lambda \geq R$ и $0 \leq x \leq l$. Лемма 3.2 доказана.

При некоторых дополнительных предположениях уточним полученные выше асимптотические формулы.

Лемма 3.3. Пусть функции $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) имеют почти всюду на $[0, l]$ ограниченные первые производные и

$$K(x, t) = \frac{K_1(x, t)}{(x-t)^2}, \quad 0 \leq \sigma < 1, \quad 0 \leq x, t \leq l \quad (3.14)$$

причем

$$\text{или} \quad \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right| dx \leq M < +\infty, \quad 0 \leq t \leq l \quad (3.14')$$

$$\text{или} \quad \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \right| dt \leq M < +\infty, \quad 0 \leq x \leq l$$

где M не зависит от x и t .

Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$) справедливы уточненные асимптотические формулы

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = & \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_0^x \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} + \\ & + \frac{\cos \alpha}{2\lambda} \left\{ \int_0^x \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) = & \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l-x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{\sin \beta}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_x^l \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (l-x - \Delta_i^*(t)) q_i^*(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} - \\ & - \frac{\cos \beta}{2\lambda} \left\{ \int_x^l \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (l-x - \Delta_i^*(t)) q_i^*(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.15^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = & -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \beta \sin \sqrt{\lambda} l + \sin(\alpha - \beta) \cos \sqrt{\lambda} l - \\ & - \cos \alpha \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2} \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (l - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \\ & \left. + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (l - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(|\lambda|^{\frac{s-1}{2}}\right) \Bigg\} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2\lambda} \left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \\
& \left. + O\left(|\lambda|^{\frac{s-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

причем оценка остаточных членов в формулах (3.11) и (3.11*) равномерна при $x \in [0, l]$.

Доказательство. Из леммы 1.2 имеем при $\lambda \rightarrow +\infty$, ($\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) y(t - \Delta_i(t)) dt = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) \left\{ \sin \alpha \left[\cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \left[\sin \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \right] \right\} dt \quad (3.17) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) \cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - 2t + \Delta_i(t)) q_i(t) dt = \\
& = \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} x \int_0^x \cos [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt - \\
& - \frac{1}{2} \cos \sqrt{\lambda} x \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \quad (3.18) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) \sin \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) q_i(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cos \sqrt{\lambda} x \int_0^x \cos [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} x \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \quad (3.19) \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 dt = O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right). \quad (3.20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 &= \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) \frac{K_1(t_1, t)}{(t_1 - t)^2} dt_1 = \\
&= \int_0^x K_1(t_1, t) dt_1 \int_0^{t_1} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 = \\
&= K_1(x, t) \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 - \\
&- \int_0^x \left(\int_0^{t_1} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 \right) \frac{\partial}{\partial t_1} K(t_1, t) dt_1. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^x (t_2 - t)^{-2} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) dt_2 = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{k+\frac{1}{2}} (x-t)^{2k+2-\sigma}}{\Gamma(2k+3-\sigma)} = \\
&= (x-t)^{2-\sigma} \sqrt{\lambda} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2; 3-\sigma). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Так же и

$$\int_0^x (t_2 - t)^{-2} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) \int_t^{t_1} (t_2 - t)^{-\sigma} \cos \sqrt{\lambda} (t_1 - t_2) dt_2 + \\
&+ \cos \sqrt{\lambda} (x - t_1) \int_t^{t_1} (t_2 - t)^{-\sigma} \sin \sqrt{\lambda} (t_1 - t_2) dt_2 = \\
&= \Gamma(1 - \sigma) \sin [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] (t_1 - t)^{1-\sigma} E_{\frac{1}{2}} [-\lambda (t_1 - t)^2; 2 - \sigma] + \\
&+ \Gamma(1 - \sigma) \sqrt{\lambda} \cos [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] (t_1 - t)^{2-\sigma} E_{\frac{1}{2}} [-\lambda (t_1 - t)^2; 3 - \sigma]. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Из формул (3.21), (3.22) и (3.23) с учетом условия (3.14') и из леммы 3.1 следует утверждение (3.20).

Подставив формулу (1.16) в выражение (1.11), получим при $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$)

$$\begin{aligned}
y(x, \lambda) &= \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^m \sin [\sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t))] q_i^*(t) + \right. \\
&+ \left. \int_t^x \sin [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] K(t_1, t) dt_1 \right\} \left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} t - \right. \\
&- \left. \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} + \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) O(1) \right\} dt. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (3.17), (3.18), (3.19), а также формулу (3.20) получим утверждение (3.15) леммы.

Формула (3.15*) доказывается аналогично. Для доказательства формулы (3.16) заметим, что из (1.11) следует при $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} &= -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \\
&+ \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^m \cos [\sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t))] q_i^*(t) + \right. \\
&+ \left. \int_t^x \cos [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] K(t_1, t) dt_1 \right\} y(t, \lambda) dt. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Пользуясь асимптотической формулой (3.15), из (3.25) и (1.12) получим формулу (3.16) леммы.

§ 4. Теорема о разложении

В этом параграфе ограничимся, для определенности, случаем $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$. Остальные случаи получаются аналогично.

1°. Опираясь на результаты 2° § 3, получим некоторые формулы для собственных функций и собственных значений.

Лемма 4.1. Если функции $K(x, t)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) удовлетворяют условиям леммы 3.3, то все собственные значения и собственные функции, начиная с некоторого номера, имеют вид

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} + \frac{C_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \quad (n \geq n_0) \quad (4.1)$$

$$y(x, \lambda_n) = \sin \alpha \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{\alpha_n(x)}{n} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \frac{\sin \alpha}{2n} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(0)}^x \sin \left\{ \frac{\pi n}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \quad (4.2) \\ (0 \leq x \leq l, n \geq n_0)$$

$$\frac{z(x, \lambda_n)}{w'(\lambda_n)} = \frac{2}{l \sin \alpha} \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{\alpha_n^*(x)}{n} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \frac{1}{2n \sin \alpha} \sum_{i=1}^m \int_x^{\varphi_i(l)} \sin \left\{ \frac{\pi n}{l} (x + \Delta_i^*(t)) \right\} q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \quad (4.2^*) \\ (0 \leq x \leq l, n \geq n_0),$$

$$C_n = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\pi \sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(0)}^l \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt, \quad (4.3)$$

$$\alpha_n(x) = \frac{\sin \alpha}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^x q_i(t) dt - C_n x \sin \alpha - \cos \alpha, \quad (4.4)$$

$$\alpha_n^*(x) = \frac{\sin \beta}{2} \sum_{i=1}^m \int_x^l q_i^*(t) dt - C_n (l - x) \sin \beta - \cos \beta, \quad (4.4^*)$$

причем порядок остаточных членов в формулах (4.2) и (4.2*), равномерен при $x \in [0, l]$.

Доказательство. Согласно лемме 1.3, имеем

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} + \delta_n \right)^2, \quad (4.5)$$

где

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \cos \sqrt{\lambda_n} l} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos [\sqrt{\lambda_n} (l - \Delta_i(t))] q_i(t) dt \right\} + O\left(\lambda_n^{-\frac{\pi-2}{2}}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Или, согласно (4.5),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = & \frac{l}{\pi n} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left[l \left(\frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \right] \sum_{i=1}^m \int_0^l \sin \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt \right\} + \\ & + O(n^{\pi-2}) = \frac{l}{\pi n} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt \right\} + O(n^{\pi-2}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.5) и (4.7) непосредственно следует формула (4.1).

Формулы (4.2) и (4.2*) получаются подстановкой оценки (4.1) соответственно в формулы (3.15), (3.15*) и (3.16). Лемма доказана.

Из леммы 4.1 и (3.15) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, \lambda_n)}{\partial x} = & -\frac{\pi n}{l} \sin \alpha \sin \frac{\pi n}{l} x + z_n(x) \cos \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \frac{\pi}{2l} \sum_{i=1}^m \int_0^x \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + O(n^{\pi-1}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$0 \leq x \leq l$

где оценка остаточного члена равномерна при $x \in [0, l]$.

Пусть

$$z_n(x, t) \equiv \sum_{k=0}^n y_k(x) z_k(t) -$$

$$-\frac{1}{l} - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t. \quad (4.9)$$

Справедлива

Лемма 4.2. При $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$

$$|\sigma_n(x, t)| \leq M < +\infty, \quad (0 \leq x, t \leq l, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.10)$$

Доказательство. Из формул (4.2) и (4.2*) имеем

$$\begin{aligned} \frac{y(x, \lambda_k) z(t, \lambda_k)}{w'(\lambda_k)} &= \frac{2}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{2\alpha_k(x)}{lk \sin \alpha} \sin \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{1}{lk} \cos \frac{\pi k}{l} t \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(0)}^x \sin \left\{ \frac{\pi k}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + \\ &+ \frac{\alpha_k^*(x) \sin \alpha}{k} \cos \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{\cos \frac{\pi k}{l} x}{2k} \sum_{i=1}^m \int_x^{\varphi_i(l)} \sin \left\{ \frac{\pi k}{l} (x + \Delta_i^*(t)) \right\} q_i(t) dt + O(k^{-2}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где порядок остаточного члена равномерен при $x, t \in [0, l]$.

Но ввиду формулы

$$\sin \frac{\pi k}{l} u \cos \frac{\pi k}{l} v = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi k}{l} (u+v) + \sin \frac{\pi k}{l} (u-v) \right\}$$

и равномерной ограниченности на отрезке $[0, \pi]$ сумм вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (n = 1, 2, \dots, x \in [0, \pi]) \quad (4.12)$$

(см., например, [3], стр. 36), из формул (4.11), (4.3), (4.4), (4.4*), учитывая (3.3), получим лемму.

2°. В этом пункте мы будем полагать, что функции $K(x, t)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) удовлетворяют условиям леммы 3.3.

Докажем теорему о разложении по биортогональной системе $\{y_k(x), z_k(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), построенной в 1° § 3.

Теорема 4.1. Для каждой функции $f(x)$, имеющей интегрируемую вторую производную на $[0, l]$ и удовлетворяющей краевым условиям задачи (A), справедливы разложения

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \quad (4.13)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) dt, \quad (4.13^*)$$

причем ряды справа сходятся равномерно на отрезке $x \in [0, l]$.

Доказательство. Пусть

$$Lf(x) = h(x). \quad (4.14)$$

Тогда, согласно теореме 2.1

$$f(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt, \quad (4.15)$$

где $G(x, t)$ — функция Грина задачи (A).

Ряд

$$f^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \quad (4.16)$$

сходится равномерно при $0 < x \leq l$, так как из (3.3) и (4.7) имеем

$$|y_k(x)| \leq M, \quad |z_k(x)| \leq M \quad (4.17)$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad k = 0, 1, 2, \dots),$$

а из (3.3) и (4.15) следует, что при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^l f(t) z_k(t) dt &= \frac{1}{\omega'(\lambda_k)} \int_0^l f(t) z(t, \lambda_k) dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_k \omega'(\lambda_k)} \int_0^l h(t) z_k(t) dt = O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Известно, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \cos kt}{k}, \quad 0 \leq x < \pi \quad (4.20)$$

равномерно сходится при $0 < \varepsilon \leq t \leq \pi - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ — любое) (см., например, [3], стр. 36 и [8], § 1.23), а из (4.12) следует, что его частные суммы равномерно ограничены при $t \in [0, \pi]$.

Продифференцировав почленно ряд (4.16) и учитывая свойства ряда (4.20), из (4.8) и (3.3) получим, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k'(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt$$

равномерно сходится на каждом отрезке вида $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$ и его частные суммы равномерно ограничены при $x \in [0, l]$. Следовательно функция $f^*(x)$ имеет на $[0, l]$ непрерывную ограниченную производную.

Из теоремы 3.1 имеем

$$f^*(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x f(t) z_k(t) dt. \quad (4.21)$$

С другой стороны, из равномерной сходимости ряда (4.16) и биортонormalности систем $\{y_k(x), z_k(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f^*(t) z_k(t) dt = \\ &= \frac{f^*(x)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x f^*(t) z_k(t) dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Обозначим

$$u(x) \equiv f^*(x) - f(x). \quad (4.23)$$

Тогда из (4.21) и (4.22) получим

$$\frac{u(x)}{2} = - \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x u(t) z_k(t) dt. \quad (4.24)$$

Так как функция $u(x)$ имеет на $[0, l]$ непрерывную ограниченную производную, то ряд (4.24), согласно формуле (4.11), сходится равномерно на каждом отрезке вида $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$.

В частном случае, когда $K(x, t) \equiv 0$, $q_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $\sin \alpha = 1$, $\sin \beta = 1$, из теоремы 3.1 получим

$$\frac{u(x)}{2} = \frac{1}{l} \int_0^x u(t) dt + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi k}{l} x \int_0^x u(t) \cos \frac{\pi k}{l} t dt, \quad (4.25)$$

где ряд справа также сходится равномерно на каждом отрезке вида $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$.

Из (4.24) и (4.25) имеем

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_0^x \varepsilon_n(x, t) u(t) dt + \varepsilon_n(x), \\ (0 \leq x \leq l, n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.26)$$

где

$$\varepsilon_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{при } x \in [\varepsilon, l - \varepsilon] \quad (\varepsilon > 0 - \text{любое})$$

и

$$|\varepsilon_n(x)| \leq K \quad \text{при } x \in [0, l], \quad n = 1, 2, \dots$$

Уравнение (4.26) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u(x)$, следовательно

$$u(x) = \int_0^x R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \varepsilon_n(x), \quad (4.27)$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad n = 1, 2, \dots)$$

где $R_n(x, t)$ — резольвента уравнения (4.26).

Но из леммы (4.2) следует (см., например, [5]), что

$$|R_n(x, t)| \leq M e^{Mt}, \quad (4.28)$$

$$(0 \leq x, t \leq l, \quad n = 1, 2, \dots)$$

следовательно при $0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$ и $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$

$$|u(x)| = \left| \int_0^x R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \int_x^{l-\varepsilon} R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_n(x) \right| \leq K M e^{Mt} \varepsilon + M e^{Mt} \int_0^{l-\varepsilon} |\varepsilon_n(t)| dt + |\varepsilon_n(x)|. \quad (4.29)$$

Устремив в формуле (4.29) $n \rightarrow \infty$ и учитывая произвольность ε , получим, что

$$u(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

следовательно

$$f^*(x) \equiv f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Таким образом, формула (4.13) доказана. Формула (4.13*) доказывалась совершенно аналогично. Теорема доказана.

3°. Теорема 4.1 легко уточняется с использованием леммы 4.2 (см., например, [4], гл. 1, § 4).

Теорема 4.2. Если $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$, то для любой абсолютно интегрируемой на $(0, l)$ по Лебегу функции $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt - \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{l} x \int_0^l \cos \frac{\pi k}{l} t f(t) dt \right\} = 0 \quad (4.30)$$

равномерно во всем интервале $(0, l)$.

Такая же теорема справедлива и при разложении по системе $\{z_k(x)\}$, $(k=0, 1, 2, \dots)$. В случае, когда $\sin \alpha = 0$ или $\sin \beta = 0$, разложение по биортогональной системе сравнивается с разложением в ряд Фурье по функциям $\sin nx$ ($n=1, 2, \dots$) или по функциям $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Из теоремы о равносходимости следуют следующие теоремы:

Теорема 4.3. Если $f(x) \in L_2(0, l)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt \right|^2 dx = 0, \quad (4.31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) dt \right|^2 dx = 0. \quad (4.31^*)$$

Теорема 4.4. Пусть $f(x), g(x) \in L_2(0, l)$. Тогда справедливо обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_0^l f(x) g(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* b_k, \quad (4.32)$$

где

$$a_k = \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \\ b_k = \int_0^l g(t) z_k(t) dt, \quad (4.33)$$

$$a_k^* = \int_0^l f(t) y_k(t) dt,$$

$$b_k^* = \int_0^l g(t) y_k(t) dt$$

$$(k=0, 1, 2, \dots).$$

Справедлива также

Теорема 4.5. Для каждой функции $f(x) \in L_2(0, l)$ справедливы обобщенные неравенства Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq M \int_0^l |f(x)|^2 dx, \quad (4.34)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^*|^2 \leq M \int_0^l |f(x)|^2 dx, \quad (4.34^*)$$

где

$$a_k = \int_0^l f(t) z_k(t) dt \quad a_k^* = \int_0^l f(t) y_k(t) dt \quad (4.35)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

а постоянная $d_0 < M < +\infty$ не зависит от $f(x)$ (где $d_0 = \frac{2}{l \sin^2 \alpha}$).

Доказательство. По теореме 4.3

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k(x). \quad (4.36)$$

Обозначим

$$\tilde{L}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k z_k(x). \quad (4.37)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ d_0 \sum_{k=0}^n \overline{a_k y_k(x)} + \sum_{k=0}^n \bar{a}_k (z_k(x) - d_0 \overline{y_k(x)}) \right\} = \\ &= d_0 \bar{f}(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l f(t) \sum_{k=0}^n \overline{z_k(t)} \{z_k(x) - d_0 \overline{y_k(x)}\} dt. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Используя свойства ряда (4.20), из (3.3), (4.1) и (4.2) так же, как и при доказательстве леммы 4.1, получаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k(t)} \{d_0 \overline{y_k(x)} - z_k(x)\} \quad (4.39)$$

$$0 \leq x, t \leq l$$

равномерно сходится в каждом квадрате вида $(0 < \varepsilon \leq t \leq l - \varepsilon, 0 \leq x \leq l)$ и его частные суммы равномерно ограничены при $0 \leq x, t \leq l$.

Поэтому, обозначив

$$Q(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k(t)} [z_k(x) - d_0 \overline{y_k(x)}] \quad (4.40)$$

из (4.38) имеем

$$\tilde{L}f(x) = d_0 \overline{f(x)} + \int_0^t \overline{f(t)} Q(x, t) dt, \quad (4.41)$$

где

$$|Q(x, t)| \leq K < +\infty \quad (0 \leq x, t \leq l).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{L}f(x) \in L_2(0, l). \quad (4.42)$$

С другой стороны, из (4.36), (4.37) и (4.41) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 &= \int_0^l f(x) \tilde{L}f(x) dx = \\ &= d_0 \int_0^l |f(x)|^2 dx + \int_0^l f(x) \int_0^t \overline{f(t)} Q(x, t) dt dx \leq \\ &\leq d_0 \int_0^l |f(x)|^2 dx + K \left\{ \int_0^l |f(x)| dx \right\}^2 \leq \\ &\leq (d_0 + lK) \int_0^l |f(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Обозначив $d_0 + lK = M$, получим формулу (4.34). Формула (4.34*) доказывается аналогично.

В заключение заметим, что все результаты пункта 3° § 4 легко можно перенести на случай, когда функции $K(x, t)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и постоянные α и β комплекснозначны.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 VI 1959

2. Բ. Ներքերում

ՈՒՂԱՑՈՂ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ՄԻ ԻՆՏԵԳՐՈՎԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ
ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՎԵՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է հետևյալ հրկու փոխադարձ-համալուծ եզրային խնդիրը՝

$$(A) \begin{cases} -y'' + \int_0^x K(x, t) y(t) dt + \sum_{i=1}^m q_i(x) y(x - \Delta_i(x)) = \lambda y \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \\ y(l) \cos \beta + y'(l) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

որտեղ $\Delta_i(x) \geq 0$, $\Delta_i'(x) \leq \theta < 1$ և $q_i(x) \equiv 0$, երբ $x - \Delta_i(x) < 0$
 $(i = 1, 2, \dots, m)$

$$(A^*) \begin{cases} -z'' + \int_x^l K(t, x) z(t) dt + \\ + \sum_{i=1}^m q_i^*(x) z(x + \Delta_i^*(x)) = \lambda z \\ z(0) \cos \alpha + z'(0) \sin \alpha = 0 \\ z(l) \cos \beta + z'(l) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

որտեղ $x + \Delta_i^*(x) = \varphi_i^{-1}(x)$ ($\varphi_i(x) \equiv x - \Delta_i(x)$) ($i = 1, 2, \dots, m$):

Որոշվում են (A) և (A^*) խնդիրների սեփական ֆունկցիաների ասիմպտոտական հատկությունները և կառուցվում է (A) խնդրի Գրինի ֆունկցիան, որի միջոցով (A) և (A^*) խնդիրները համապատասխանաբար բերվում են հետևյալ երկու համասեռ ինտեգրալ հավասարումներին՝

$$y(x) = \lambda \int_0^x G(x, t) y(t) dt$$

$$z(x) = \lambda \int_0^l G(t, x) z(t) dt:$$

(A) և (A^*) խնդիրների սեփական ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է $\{y_k(x), z_k(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) բիօրթոգոնալ սխառն և $q_i(x)_{(i=1,2,\dots,m)}$ և $K(x, t)$ ֆունկցիաների վրա որոշ սահմանափակումներ զննելուց հետո ստացվում է վերածում ըստ արդ սխառնմի:

Բերենք թեորեմներից մեկը:

Թեորեմ. Եթե $q_i^*(x) \in L_1(0, l)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) և

$$K(x, t) = \frac{K_1(x, t)}{(x - t)^2}, \quad 0 \leq x < l$$

որտեղ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \in L_1(0, l) \quad (t = \text{const}),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \in L_1(0, l) \quad (x = \text{const}),$$

$$\sup_{x \in [0, l]} \int_0^l |f(x)| dx \in L_2(0, l) \text{ и } \sup_{t \in [0, \infty)} \int_0^l |f(x)| dx \in L_2(0, l)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt \right|^2 dx = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Норкин С. Б. О краевой задаче типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Изв. Высших уч. зав., математика, № 6 (7), 1958.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.—Л., 1951.
3. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.—Л., 1950.
4. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. О построении некоторых специальных биортогональных систем. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1959.
5. Titchmarsh E. C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford, 1946.
6. Гурса Курс математического анализа. М.—Л., ГТТИ, 1933.
7. Джрбашян М. М. Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Лефлера. Изв. АН АрмССР, XIX, № 3, 1954.
8. Зигмунд Тригонометрические ряды. М.—Л., ГОНТИ, 1939.