ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 6, 1959 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

# Обобщение хаусдорфовского метода суммирования рядов

Настоящая работа в основном посвящена обобщениям хаусдорфовской теории моментов и хаусдорфовского или $H$— метода суммирования рядов (см. [1], [2], [3] и др.).

Работа состоит из трех параграфов.

Первый из них имеет подготовительный характер, где рассматриваются вопросы, связанные с известным обобщением многочленов С. Н. Бернштейна, во втором излагается обобщение хаусдорфовской теории моментов нецелых степеней аргумента, а в последнем приводится обобщение $H$— метода суммирования последовательностей (рядов).

## § 1. Некоторые свойства функции $\lambda_{m,n}(x)$

Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2\cdots<\gamma_n<\cdots\to\infty,\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty \tag{1.1}$$

и функции

$$\lambda_{m,n}(x)=\frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C\frac{x^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=n}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)}, \tag{1.2}$$

где $n=0, 1, \ldots, m$, $x\in[0, 1]$, а простой контур $C$, здесь и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя.

Теорема 1. *Для всякого* $x\in[0, 1]$ *справедливо*

а) $\lambda_{m,n}(x)\geqslant 0$, $\quad n=0, 1, 2, \ldots, m$,

б) $\lambda_{m,n}(0)=0$, $\quad n=1, 2, \ldots, m$, $\quad\lambda_{m,0}(0)=1$, $\quad\lambda_{m,n}(1)=0$,

$$n=0, 1, 2, \ldots, m-1,\quad \lambda_{m,m}(1)=1, \tag{1.3}$$

в) $\sum\limits_{n=0}^{m}\lambda_{m,n}(x)=1.$

Для доказательства а) заметим, что для

$$0=\alpha_0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots \text{ и } x\in[0, 1],$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha_\nu)} \geqslant 0,$$

см. [4], стр. 8.

С другой стороны,

$$\lambda_{m,n}(x) = x^{\gamma_n} \frac{\prod_{\nu=n+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{m-n}(\zeta+\alpha_\nu)} \geqslant 0,$$

где $\alpha_\nu = \gamma_{n+\nu} - \gamma_n$.

Справедливость утверждения б) следует из интегрального представления $\lambda_{m,n}(x)$.

Для доказательства в) имеем

$$\sum_{n=0}^{m}\lambda_{m,n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{m} \frac{\prod_{\nu=n+1}^{m}\gamma_\nu}{\prod_{\nu=n}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)} x^{-\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(1-\prod_{\nu=0}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right)\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta} = 1,$$

так как $\prod_{\nu=0}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} = 0$.

Теорема 2. *Для всякого* $x \in (0, 1]$

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{m,n}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.4}$$

Действительно, имеем

$$\lambda_{m,n}(x) < C_n x^{-\varkappa} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+\varkappa}, \tag{1.5}$$

где $\varkappa > 0$ — произвольное число, а $C_n$ зависит только от $n$.

Справедлива также следующая модификация теоремы 2. Обозначим

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{1}{\gamma_n}\prod_{\nu=n+1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+\frac{1}{2}}$$

и $\varepsilon_m = \max \varepsilon_{m,n}$, когда $n = 0, 1, 2, \ldots, m$. (1.6)

Заметим, что при $m\to\infty$, $\varepsilon_m \to 0$.

Теорема 2'. *Для всяких* $x \in (0, 1)$ *и* $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ *справедливо неравенство*

$$\lambda_{m,n}(x) \leqslant \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{1.7}$$

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\lambda_{m,n_1}(x) = (-1)^{m-n} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{x^\zeta d\zeta}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} (\zeta - \gamma_\nu')},$$

где $\gamma_\nu' = \gamma_\nu + \frac{1}{2}$.

В качестве контура $C$ возьмем окружность

$$\zeta = 2R\cos\varphi e^{i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad R > 2\gamma_m'.$$

Отметим на окружности $C$ точку $\zeta_0 = 2R\cos\varphi_0 e^{i\varphi_0}$,

где $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2R\varepsilon_m^{\gamma/_2}}$, тогда

$$\lambda_{m,n}(x) \leqslant 2x^{-\frac{1}{2}} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'} (J_{m,n}^*(x) + J_{m,n}^{**}(x)), \tag{1.8}$$

где

$$J_{m,n}^*(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu'}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\,d\varphi}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} \sqrt{4R(R-\gamma_\nu')\cos^2\varphi + \gamma_\nu'^2}},$$

$$J_{m,n}^{**}(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu'}{2\pi i} \int\limits_{0}^{\varphi_0} \frac{\exp\left(-2R\cos^2\varphi \ln\frac{1}{x}\right) R\,d\varphi}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} \sqrt{4R(R-\gamma_\nu')\cos^2\varphi + \gamma_\nu'^2}}.$$

Имеем

$$J_{m,n}^*(x) < \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu'}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} \gamma_\nu'} \frac{R}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right),$$

или

$$J_{m,n}^*(x) < \frac{1}{\gamma_n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_m^{\gamma/_2}}. \tag{1.9}$$

Оценим теперь $J_{m,n}^{**}(x)$.

Заметим, что

$$\min_{0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0} [4R(R-\gamma_\nu')\cos^2\varphi + \gamma_\nu'^2] = 4R(R-\gamma_\nu')\cos^2\varphi_0 + \gamma_\nu'^2.$$

а

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_m^{-\frac{2}{3}}}{2R},$$

$$\cos\varphi_0 = \sin\frac{\varepsilon_m^{-\frac{2}{3}}}{2R} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon_m^{-\frac{2}{3}}}{2R} = \frac{\varepsilon_m^{-\frac{2}{3}}}{\pi R}.$$

Это значит, что

$$J_{m,n}^{**}(x) \leqslant \frac{R\prod\limits_{\nu=n+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi\prod\limits_{\nu=n}^{m}\sqrt{(R-\gamma_\nu')\,\varepsilon_m^{-\frac{2}{3}}+\gamma_\nu'^2}}\int\limits_0^{\varphi_0}\exp\left(-2R\ln\frac{1}{x}\cos^2\varphi\right)d\varphi <$$

$$< \frac{R\,\varepsilon_m^{1/3}}{2\pi\sqrt{R-\gamma_n'}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{4}{\pi}R\ln\frac{1}{x}\varphi^2\right)d\varphi <$$

$$< \frac{\varepsilon^{1/3}}{4\sqrt{\pi\ln\frac{1}{x}}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R(R-\gamma_n')}} < \frac{\varepsilon^{1/3}}{4\sqrt{\ln\frac{1}{x}}},$$

но так как

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln(1-(1-x)) > 1-x,$$

то

$$J_{m,n}^{**}(x) < \frac{\varepsilon_m^{1/3}}{4\sqrt{1-x}}. \tag{1.10}$$

Из (1.8), в силу оценок (1.9) и (1.10), получаем

$$\lambda_{m,n}(x) < \frac{1}{2\gamma_n}\,\frac{\varepsilon_m^{-1/3}}{\sqrt{x}}\prod_{\nu=n+1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'} + \frac{\varepsilon_m^{1/3}}{2\sqrt{x(1-x)}},$$

или

$$\lambda_{m,n}(x) = \frac{\varepsilon_m^{1/3}}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Определение 1. Обозначим через $\Phi$ оператор, если он всякому квазимногочлену

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^{\gamma_n}$$

сопоставляет число

$$\Phi\left[P_m(x)\right] = \sum_{n=0}^{m} a_n \mu_n. \tag{1.11}$$

Обозначим

$$\lambda_{m,n} = \prod_{\nu=n+1}^{m}\gamma_\nu\sum_{\substack{j=n\\ \nu\neq j}}^{m}\frac{\mu_j}{\prod\limits_{\nu=n}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_j)},\quad n=0,1,2,\ldots,m. \tag{1.12}$$

Замечание 1. Имеет место равенство

$$\Phi\,[\lambda_{m,n}(x)] = \lambda_{m,n}\,.$$

Определение 2. Последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию (A), если выполняются неравенства

$$\sum_{n=0}^{m} |\lambda_{m,n}| < L, \; m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.13}$$

где $L$ — постоянная, не зависящая от $m$.

А. О. Гельфонд в работе [5] рассматривает обобщение классических многочленов С. Н. Бернштейна*, которые в наших терминах определяются так:

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена на $[0, 1]$ Квазимногочленом Бернштейна для этой функции назовем функцию

$$B_m^*(f, x) = \sum_{n=0}^{m} f(\tau_{m,n}^*)\,\lambda_{m,n}(x), \tag{1.14}$$

где

$$x \in [0, 1],\; \tau_{m,n}^* = \prod_{\nu=n+1}^{m}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad m = 1, 2, \ldots\,.$$

Там же доказано:

Если $f(x) \in C([0, 1])$, то при $m \to \infty$, $B_m^*(f, x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на всем $[0, 1]$.

Для удобства дальнейшего изложения мы внесем в определение функций $B_m^*(f, x)$ небольшое изменение, которое, хотя не меняет существа положения, но, как нам кажется, облегчает выкладки, связанные с ними.

Определение 3′. Квазимногочленом С. Н. Бернштейна функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, назовем функцию

$$B_m(f, x) = \sum_{n=0}^{m} f(\tau_{m,n})\,\lambda_{m,n}(x), \tag{1.14′}$$

где

$$x \in [0, 1],\; \tau_{m,n} = \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1}.$$

Покажем, что теорема А. О. Гельфонда остается в силе и для $\{B_m(f, x)\}$**.

---

* Смотри также [6].

** Отметим, что А. О. Гельфондом доказана теорема более сильная, чем приведенная выше, но и она остается в силе для $B_m(f, x)$; более того, теорему при этом можно доказать сравнительно проще, не выходя при этом из схемы доказательства классической теоремы С. Н. Бернштейна.

Для этого в силу теоремы А. О. Гельфонда нам достаточно показать, что при $f(x) \in C([0, 1])$

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} |B_m(f, x) - B_m^*(f, x)| = 0$$

равномерно для всех $x \in [0, 1]$.

Последнее утверждение в свою очередь будет доказано, если убедимся в том, что

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} |\tau_{m,n} - \tau_{m,n}^*| = 0$$

равномерно для $n = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Обозначим

$$\theta_{m,n} = \tau_{m,n}^* - \tau_{m,n} = \prod_{\nu = n+1}^{m} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} - \prod_{\nu = n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1}$$

и заметим, что при $n = 1, 2, \ldots, m-1$ справедливо тождество

$$\theta_{m,n} = \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \theta_{m,n+1} + \prod_{\nu=n+2}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1} \left[\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} + 1}\right],$$

$$\prod_{\nu=m+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1} = 1.$$

Повторяя ход соответствующих рассуждений работы [5] (см. стр. 115), заключаем, что

$$\max_{1 \leq n \leq m-1} |\theta_{m,n}| \leq \frac{C}{\gamma_{n+1}} \prod_{\nu=n+2}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1},$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная; знаем также, что

$$|\theta_{m,0}| = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1},$$

а

$$|\theta_{m,m}| = \left|\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} - \frac{\gamma_m}{\gamma_m + 1}\right| < \frac{C}{\gamma_m^2}.$$

Таким образом

$$\lim_{m \to \infty} (\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}) = 0$$

равномерно для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 3. *Если последовательность чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию* (A), *тогда*

$$\mu_n = \lim_{m \to \infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.15}$$

Лемма. *Для всякого $x$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_n)}{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu} \lambda_{m,k}(x) = x^{\gamma_n}. \tag{1.16}$$

Для доказательства рассмотрим сумму

$(\gamma_\nu - \gamma_n)$

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta + \gamma_m} + \frac{\gamma_m - \gamma_n}{(\zeta + \gamma_m)(\zeta + \gamma_{m-1})} + \cdots + \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_m)}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} (\zeta + \gamma_n)}.$$

$\zeta + \gamma_\nu$

Для краткости обозначим $\gamma_\nu - \gamma_n = \alpha_\nu$, $\zeta + \gamma_n = z$, тогда

$$S_n(\zeta) = \sum_{k=n}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \alpha_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (z + \alpha_\nu)} = \left(1 - \prod_{\nu=n}^{m} \frac{\alpha_\nu}{z + \alpha_\nu}\right) \frac{1}{z} = \frac{1}{z},$$

так как $\alpha_n = 0$.

Таким образом

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta + \gamma_n},$$

значит

$$x^{\gamma_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C S_n(\zeta)\, x^{-\zeta}\, d\zeta =$$

$$= \sum_{k=n}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_n)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (\zeta + \gamma_\nu)} = \sum_{k=n}^{m} \prod_{\nu=k+1}^{m} \frac{\gamma_\nu - \gamma_n}{\gamma_\nu} \lambda_{m,k}(x).$$

Этим лемма доказана.

Для доказательства теоремы применим оператор $\Phi$ к равенству (1.16).

Будем иметь

$$\mu_n = \Phi\left[x^{\gamma_n}\right] = \sum_{k=n}^{m} \prod_{\nu=k+1}^{m} \frac{\gamma_\nu - \gamma_n}{\gamma_\nu} \lambda_{m,k}. \tag{1.17}$$

С другой стороны,

$$B_m(x^{\gamma_n}) = \sum_{k=0}^{m} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m} \prod_{\nu=k+1}^{m} \left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1}\right)^{\gamma_n} \lambda_{m,k}(x). \tag{1.18}$$

Применяя теперь оператор Ф к (1.18), будем иметь

$$\Phi\left[B_m(x^{\gamma_n})\right]=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\lambda_{m,n}. \tag{1.19}$$

Из (1.17) и (1.19) получаем

$$\mu_n-\Phi[B_m(x^{\gamma_n})]=\sum_{k=n}^{m}\left[\prod_{\nu=k+1}^{m}\frac{\gamma_\nu-\gamma_n}{\gamma_\nu}-\prod_{\nu=k+1}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\right]\lambda_{m,k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=k+1}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\lambda_{m,k}. \tag{1.20}$$

Заметим, что для всякого $n$ при достаточно большом $m$

$$\theta_{m,k}=\left|\prod_{\nu=k+1}^{m}\left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_\nu}\right)-\prod_{\nu=k+1}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\right| \tag{1.21}$$

может быть сделано меньше любого заранее заданного числа $\varepsilon>0$.

Взяв $m$ достаточно большим, в силу условия $(A)$ будем иметь также

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=k+1}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\lambda_{m,k}\right|<\varepsilon. \tag{1.22}$$

В силу (1.21) и (1.22) из (1.20) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\Phi[B_m(x^{\gamma_n})]=\mu_n,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{1.15'}$$

В частности, при $n=0$ имеем

$$\mu_0=\Phi\left[B(1)\right]=\sum_{k=}^{m}\lambda_{m,k}. \tag{1.15''}$$

## § 2. К теории моментов

Определение 4. Последовательность чисел $\{\mu_n\}$ называется моментной последовательностью, если существует функция с ограниченной вариацией $\alpha(t)$, такая, что

$$\mu_n=\int_0^1 t^{\gamma_n}d\alpha(t),\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где здесь и впредь последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию (1.1).

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность чисел $\{\mu_n\}$ была моментной последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию $(A)$.*

Необходимость, в силу теоремы 1, очевидна.

Достаточность, здесь и впредь в аналогичных случаях, доказывается приспособлением известного метода к нашему случаю, когда вместо обычных моментов рассматриваются обобщенные моменты (2.1), см. [7].

Обозначим

$$\alpha_m(0+) = \lambda_{m,0}, \quad \alpha_m(0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_m(\tau_{m,k}+) - \alpha_m(\tau_{m,k}-) = \lambda_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\alpha_m(1-) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{m,k}, \tag{2.2}$$

$$\alpha_m(1) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_{m,k} = \mu_0$$

и рассмотрим ступенчатую функцию $\alpha_m(t)$ с вышеуказанными скачками.

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k}.$$

С другой стороны, имеем

$$\Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \sum_{k=0}^{m} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k},$$

значит

$$\Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha_m(t).$$

Используя известный принцип выбора Хелли, из $\{\alpha_m(t)\}$ можем подобрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{m_j}(t)\}$ с предельной функцией $\alpha(t)$, имеющей ограниченную вариацию.

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha(t),$$

но

$$\lim_{m\to\infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \mu_n.$$

Этим теорема доказана.

Обозначим оператор

$$L_{m,t}(\mu)=\frac{\lambda_{m,[mt]}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,[mt]}(x)\,dx}, \tag{2.3}$$

где $t\in[0,1]$, $m=1,2,\ldots$, $[mt]$ — целая часть числа $mt$.

В частности, при $[mt]=k$ имеем

$$L_{m,\frac{k}{m}}(\mu)=\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}=\lambda_{m,k}\frac{\prod\limits_{\nu=k}^{m}(\gamma_\nu+1)}{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu}. \tag{2.3'}$$

Теорема 5. *Если последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию $(A)$, тогда существует*

$$\mu_\infty=\lim_{m\to\infty}\mu_m$$

и

$$\mu_n-\mu_\infty=\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^1 t^{\gamma_n}L_{m,t}(\mu)\,dt. \tag{2.4}$$

Действительно, заметим, что существует

$$\int\limits_0^1 t^{\gamma_n}L_{m,t}(\mu)\,dt \tag{2.4'}$$

и представим его в виде интегральной суммы Римана.

С этой целью разобьем $[0,1]$ на $m$ сегментов $\Delta_{m,0}$, $\Delta_{m,1},\ldots,$ $\Delta_{m,m-1}$ с точками разбиения

$$x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

так, чтобы имели

$$\partial л(\Delta_{m,k})=\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx=\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m}(\gamma_\nu+1)}.$$

Нетрудно заметить, что такое разбиение возможно, так как

$$\text{а)}\quad \sum_{k=0}^{m-1}\partial л(\Delta_{m,k})=\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx=1,$$

$$\text{б)}\quad \partial л(\Delta_{m,k})=\frac{1}{\gamma_k+1}\prod_{\nu=k+1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\to 0,\ \text{когда}\ m\to\infty \tag{2.5}$$

равномерно для всех $k$.

Заметим также, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \partial \lambda(\Delta_{m,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (\gamma_\nu+1)} = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\left(1+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1\gamma_2}+\cdots+\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(\gamma_\nu+1)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\right) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\left[\left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu+1}{\gamma_\nu}-1\right)+1\right] = \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1} = \tau_{m,n}.$$

Это значит, что $x_k = \tau_{m,k}$.

Возвращаясь к (2.4′), будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}\{\mu\}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_{m,k}^{\gamma_n} L_{m,\xi_{m,k}}\{\mu\}\,\partial\lambda(\Delta_{m,k}) + \varepsilon_{m,n}, \tag{2.6}$$

где $\tau_{m,k} \leqslant \xi_{m,k} \leqslant \tau_{m,k+1}$, $\varepsilon_{m,n} \to 0$, когда $m \to \infty$.

Подставляя значение $L_{m,\xi_{m,k}}\{\mu\}$ из (2.3) в (2.6), будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}\{\mu\}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}. \tag{2.6′}$$

Заметим теперь, что

$$\xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} \leqslant \tau_{m,k+1}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} =$$

$$= \prod_{\nu=k+2}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}\left[1-\left(\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+1}+1}\right)^{\gamma_n}\right] < \frac{C(\gamma_n)}{\gamma_{k+1}+1}\prod_{\nu=k+2}^{m}\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+1}\right)^{\gamma_n}.$$

Это значит, что, каким бы не было целое число $n > 0$, при $m \to \infty$

$$\xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} \to 0, \text{ равномерно для всех } k = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.7}$$

Представляя (2.6′) в виде

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}\{\mu\}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \sum_{k=0}^{m-1}\left(\xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n}\right)\lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}$$

и учитывая (2.7), в силу условия (A) будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}\{\mu\}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}^{*},$$

где
$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon^*_{m,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

С другой стороны, согласно теореме 3 имеем

$$\mu_n = \lim_{m\to\infty} \Phi\,[B_m(x^{\gamma_n})] = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \tau^{\gamma_\nu}_{m,} \lambda_{m,k} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[ \lambda_{m,m} + \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{\gamma_n}_{m,k} \lambda_{m,k} \right]. \tag{2.8}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\lambda_{m,m} = \int_0^1 x^{\gamma_m}\, d\alpha(x) = \mu_m.$$

Путем интегрирования по частям получаем

$$\mu_m = \{\alpha(1) - \alpha(1-)\} + \gamma_m \int_0^1 t^{\gamma_m - 1} \{\alpha(1-) - \alpha(t)\}\, dt.$$

Разбивая

$$\int_0^1 t^{\gamma_m - 1} \{\alpha(1-) - \alpha(t)\}\, dt$$

на два интеграла по $[0, 1-\varepsilon]$ и $[1-\varepsilon, 1]$, проводя соответствующие оценки, будем иметь

$$|\mu_m - \alpha(1) + \alpha(1-)| \leqslant \max_{t\in[0,1-\varepsilon]} |\alpha(1-) - \alpha(t)|\,(1-\varepsilon)^{\gamma_m} +$$

$$+ \gamma_m \max_{t\in[1-\varepsilon,1]} |\alpha(1-) - \alpha(t)| \int_{1-\varepsilon}^1 t^{\gamma_m - 1}\, dt,$$

или

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, |\mu_m - \alpha(1) + \alpha(1-)| = 0.$$

Это значит, что существует $\mu_\infty$ и

$$\mu_\infty = \alpha(1) - \alpha(1-). \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9), из (2.6′) и (2.7) получаем

$$\mu_n - \mu_\infty = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}\,\{\mu\}\, dt.$$

Этим теорема доказана.

Введем теперь обозначение

$$\dot{\Delta}^k \mu_n = \sum_{j=0}^{k} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_{n+\nu}}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{k} (\gamma_{n+\nu} - \gamma_{n+j})} \mu_{n+j}. \tag{2.10}$$

Заметим, что

$$\dot{\Delta}^k \mu_n = \Phi\left[\lambda_{k+n,n}(x)\right] = \lambda_{k+n,n}, \tag{2.11}$$

а при $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\dot{\Delta}^k \mu_n = \binom{n+k}{n} \Delta^k \mu_n. \tag{2.12}$$

Определение 5. Последовательность $\{\mu_n\}$ называется абсолютно монотонной, если

$$\dot{\Delta}^k \mu_n \geqslant 0, \quad k, n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.13}$$

Теорема 6. *Для абсолютной монотонности последовательности* $\{\mu_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая и ограниченная на* $[0, 1]$ *функция* $\alpha(t)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.14}$$

Достаточность. Пусть функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда

$$0 \leqslant \int_0^1 \lambda_{k+n,n}(t)\, d\alpha(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_{n+\nu}}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{k} (\gamma_{n+\nu} - \gamma_{n+j})} \mu_{n+j} = \dot{\Delta}^k \mu_n.$$

Необходимость. Пусть $\dot{\Delta}^k \mu_n \geqslant 0$, $(n, k = 0, 1, 2, \cdots)$, тогда

$$\lambda_{m,n} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n} < L, \tag{2.15}$$

где $L > 0$—число, не зависящее от $m$.

Действительно,

$$\dot{\Delta}^{m-n} \mu_n = \Phi\left(\lambda_{m,n}(x)\right) = \lambda_{m,n},$$

следовательно,

$$\sum_{n=0}^{m} \dot{\Delta}^{m-n} \mu_n = \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n}.$$

С другой стороны, известно, что

$$\sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n}(x) = 1,$$

значит

$$\sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n} = \Phi\left(\sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n}(x)\right) = \Phi(1) = \mu_0. \tag{2.16}$$

Этим (2.15) доказана.

Повторяя конструкцию, приведенную в теореме 4, докажем существование возрастающей и ограниченной на $[0, 1]$ функции $\alpha(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Этим теорема доказана.

Из теорем 4 и 6 следует:

Теорема 4'. *Для того, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяла условию (A), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух абсолютно монотонных последовательностей.*

Ниже мы приводим обобщение теоремы А. Ф. Соловьева на случай нецелых моментов (см. [8], стр. 167).

Как известно, $f(x) \in L_M$ на $[a, b]$, если

$$\int_a^b M(f(t))\, dt < \infty,$$

где $M(u)$, $(-\infty < u < \infty)$ непрерывная выпуклая вниз четная функция, удовлетворяющая условиям:

$$M(0) = 0, \qquad \frac{M(u)}{u} \to \infty \quad \text{при} \quad u \to \infty.$$

Известно, что для всякой функции $M(u)$, удовлетворяющей вышеприведенным условиям, справедливо неравенство Иенсена

$$M\left(\frac{\int_a^b p(t)\, u(t)\, dt}{\int_a^b p(t)\, dt}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(t)\, M(u(t))\, dt}{\int_a^b p(t)\, dt}.$$

Определение 6. Последовательность $\{\mu_n\}$ при $\{\gamma_\nu\}$ удовлетворяет условию $(B)$, если существует постоянная $L$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{m} M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(t)\,dt}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(t)\,dt \leqslant L. \tag{2.17}$$

Теорема 7. *Условие* $(B)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\varphi(t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.18}$$

*где* $\varphi(t) \in L_M$ *на* $[0, 1]$.

Необходимость. Пусть $\varphi(t) \in L_M$, тогда

$$M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right) = M\left(\frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,M(\varphi(x))\,dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}.$$

Это значит, что

$$\sum_{k=0}^{m} M\left(\frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m}\int_0^1 M(\varphi(x))\,\lambda_{m,k}(x)\,dx,$$

или

$$\sum_{k=0}^{m} M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 M(\varphi(x))\,dx < \infty.$$

Достаточность. Пусть

$$\sum_{k=0}^{m} M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx < L.$$

По формуле Юнга имеем

$$\frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx} \leqslant N(1) + M\left(\frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right), \tag{2.19}$$

где $N(u)$ функция, дополнительная к функции $M(u)$.

Из (2.19) следует, что

$$|\lambda_{m,k}| \leqslant N(1)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx +$$

$$+ M\left(\frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx. \tag{2.19'}$$

Просуммируя (2.19′) по $k=0, 1, 2, \cdots, m$, получаем

$$\sum_{k=0}^{m} |\lambda_{m,k}| \leqslant N(1) + \sum_{k=0}^{m} M\left(\frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx,$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{m} |\lambda_{m,k}| \leqslant N(1) + L. \tag{2.20}$$

Отсюда, согласно теореме 4, следует существование функции $\varphi(t)$, имеющей на $[0, 1]$ ограниченную вариацию, такой, что

$$\int_0^1 x^{\lambda_n}\,d\varphi(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Покажем, что $\varphi(x)$ на $[0,1]$ удовлетворяет условию

$$\varphi(x) = c + \int_0^x g(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $g(t) \in L_M$ на $[0, 1]$.

Как известно (см. [9]), для этого необходимо и достаточно показать, что при всяком разбиении сегмента $[0, 1]$ точками

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1 \tag{2.21}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{\Delta\varphi(x_i)}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i \leqslant L,$$

где $L$ — постоянная, не зависящая от способа разбиения сегмента $[0, 1]$ и $n$.

С этой целью рассмотрим на $[0, 1]$, как в теореме 4, ступенчатую функцию $\varphi_m(x)$

$$\varphi_m(0) = 0,\ \varphi_m(0+) = \lambda_{m,0},$$

$$\varphi_m(\tau_{m,k}+) - \varphi_m(\tau_{m,k}-) = \lambda_{m,k},\quad k = 1, 2, \cdots, m-1,$$

$$\varphi_m(1-) = \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_{m,k},\quad \varphi_m(1) = \sum_{k=0}^{m}\lambda_{m,k}.$$

Как известно, из последовательности $\{\varphi_m(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке $[0, 1]$; не нарушая общности, будем считать, что последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ сама сходится к $\varphi(x)$.

Пусть теперь в сегменте $[0, 1]$ произведено произвольное разбиение (2.21) и пусть

$$\tau_{m,p} < x_i \leqslant \tau_{m,p+1},$$

$$\tau_{m,q} < x_{i+1} \leqslant \tau_{m,q+1},$$

или

$$\sum_{k=p+2}^{q}\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx < \Delta x_i < \sum_{k=p+1}^{q+1}\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx,$$

где, при заданных $x_i$ и $x_{i+1}$, $p$ и $q$ зависят от $m$ и $i$.

Переходя к пределу, когда $m \to \infty$, получаем

$$\Delta x_i = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=p+1}^{q}\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx. \tag{2.22}$$

Если заметить еще, что

$$\Delta\varphi(x_i) = \lim_{m\to\infty}[\varphi_m(x_{i+1}) - \varphi_m(x_i)] = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=p+1}^{q}\lambda_{m,k}, \tag{2.23}$$

то будем иметь

$$\frac{\Delta\varphi(x_i)}{\Delta x_i} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\lambda_{m,k}}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,dx}. \tag{2.24}$$

С другой стороны, применение неравенства Иенсена дает

$$M\left(\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\lambda_{m,k}}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)=M\left(\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)dx}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx},$$

или

$$M\left(\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\lambda_{m,k}}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\sum_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=p+1}^{q}M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx. \tag{2.25}$$

Из (2.25) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}M\left(\frac{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\lambda_{m,k}}{\sum\limits_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\sum_{k=p+1}^{q}\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{q}M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx. \tag{2.25'}$$

Переходя к пределу, когда $m\to\infty$, в силу (2.22), (2.23) и непрерывности $M(u)$ получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}M\left(\frac{\Delta\varphi(x_i)}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx}\right)\int\limits_0^1\lambda_{m,k}(x)\,dx\leqslant L.$$

Значит

$$\sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{\Delta\varphi(x_i)}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i \leqslant L.$$

Таким образом доказано, что

$$\varphi(x) = c + \int_0^x g(t)\,dx,$$

где $g(x) \in L_M$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; следовательно,

$$\mu_n = \int_0^1 x^{\gamma_n}\,d\varphi(x) = \int_0^1 x^{\gamma_n} g(x)\,dx,\ n = 0,\ 1,\ 2, \cdots.$$

Этим теорема доказана.

В случае, когда $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, теорема 7 совпадает с теоремой А. Ф. Соловьева (см. [8]).

Если считать, что $M(u) = |u|^p$, $p > 1$, то, как следствие теоремы 7, получается следующее обобщение теоремы Хаусдорфа.

Теорема 7'. *Для того, чтобы*

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\varphi(t)\,dt,\ n = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

*где* $\varphi(t) \in L^p([0,\ 1])$, $p > 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{m} |\lambda_{m,k}|^p \left\{\int_0^1 \lambda_{m,k}(t)\,dt\right\}^{1-p} < L,$$

*где* $L > 0$*—постоянная, не зависящая от* $m$.

Определение 7. Последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию $(C)$, если существует число $L > 0$ такое, что

$$|\lambda_{m,k}|\left(\int_0^1 \lambda_{m,k}(t)\,dt\right)^{-1} < L. \tag{2.26}$$

Теорема 8. *Условие* $(C)$ *необходимо и достаточно для того, чтобы*

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\varphi(t)\,dt,\quad n = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

*где* $\varphi(t)$*—ограниченная на сегменте* $[0,\ 1]$ *функция*

Необходимость условия следует из равенства

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 \lambda_{m,k}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Достаточность.

В силу (2.26)

$$|L_{m,t}\{\mu\}| \leqslant L.$$

Из последовательности $L_{m,t}\{\mu\}$ можно выделить подпоследовательность $L_{m_j,t}\{\mu\}$ и указать такую ограниченную функцию $\varphi(t)$, чтобы для всякой функции $\psi(t) \in L([0, 1])$ имели

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^1 L_{m_j,t}\{\mu\}\,\psi(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,\psi(t)\,dt.$$

С другой стороны, при $\psi(t) = t^{\gamma_n}$:

$$\mu_n - \mu_\infty = \int_0^1 t^{\gamma_n}\,\varphi(t)\,dt,$$

но из

$$\mu_m = \lambda_{m,m} = \int_0^1 t^{\gamma_m}\,\varphi(t)\,dt$$

следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = \mu_\infty = 0$, значит

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n}\,\varphi(t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Теорема доказана.

## § 3. Обобщенные хаусдорфовские средние

Определение 8. Назовем преобразование вида

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n} S_n \tag{3.1}$$

обобщенным хаусдорфовским преобразованием, короче $H$ — преобразованием.

Преобразование, согласно обозначению (2.10), можно записать так

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \Delta^{m-n}\,\mu_n S_n. \tag{3.1'}$$

Соответствующий метод суммирования последовательностей будем называть обобщенным хаусдорфовским методом суммирования и будем обозначать через $H$ или $H(\mu, \gamma)$.

Теорема 9. *Для регулярности метода $H(\mu, \gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\alpha(t)$ с ограниченной вариацией на* $[0, 1]$*, *удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$\alpha(0+) = \alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = 1. \tag{3.2}$$

Для доказательства заметим, что из общей теории линейных преобразований следует, что для регулярности метода $H(\mu, \gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=0}^{m} |\lambda_{m,n}| < L, \text{ где } L \text{ — абсолютная постоянная,}$$

$$\text{б)} \quad \lim_{m\to\infty} \lambda_{m,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.3}$$

$$\text{в)} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n} = 1.$$

Для выполнения условия а), согласно теореме 4, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\alpha(t)$ с ограниченной вариацией на [0,1], такая, что

$$\int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Для выполнения условия б), при $n = 0$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \lambda_{m,0}(x)\, d\alpha(x) = 0, \tag{3.4}$$

но, с другой стороны

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \lambda_{m,0}(x)\, d\alpha(x) = \alpha(0+) \tag{3.4'}$$

в чем легко убедиться интегрированием по частям и разбиением сегмента [0,1] на две части $[0, \delta]$, $[\delta, 1]$.

* Не нарушая общности можем предполагать, что $\alpha(0) = 0$

Из (3.4) и (3.4′) следует, что

$$\alpha(0+)=0.$$

Далее заметим, что

$$\sum_{n=0}^{m}\lambda_{m,n}=\mu_0,$$

значит для выполнения условия в) нужно, чтобы $\mu_0=1$, т. е.

$$\mu_0=\int_0^1 d\alpha(t)=1.$$

Последнее равенство, при условии $\alpha(0)=0$, равносильно тому, что $\alpha(1)=1$.

Таким образом

$$\alpha(0)=\alpha(0+)=0,\ \alpha(1)=1. \tag{3.5}$$

Нетрудно, наконец, заметить, что

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{m,n}=0,\ n=0,1,2,\ldots .$$

Действительно, согласно теореме 2 имеем

$$|\lambda_{m,n}|\leqslant\int_0^{\delta}\lambda_{m,n}(x)\,|d\alpha(x)|+\int_{\delta}^{1}\lambda_{m,n}(x)\,|d\alpha(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\delta}|d\alpha(x)|+\max_{x\in[\delta,1]}\lambda_{m,n}(x)\int_0^1|d\alpha(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\delta\max_{x\in[0,\delta]}|\alpha(t)|+C_n\delta^{-x}\prod_{\nu=n+1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+x},\quad x>0.$$

При фиксированном $n$ и достаточно большом $m$ будем иметь

$$|\lambda_{m,n}|<\varepsilon(m),\quad \text{где}\quad \varepsilon(m)\to 0,\quad \text{когда}\quad m\to\infty.$$

Определение 9. Моментную последовательность $\{\mu_n\}$ назовем регулярной моментной последовательностью при заданной последовательности $\{\gamma_\nu\}$, если выполняются условия (3.3).

В силу определения 9, теорема 9 сформулируется еще так:

Теорема 9′. *Для регулярности метода $H(\mu,\gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ (при заданной последовательности $\{\gamma_\nu\}$) была регулярной моментной последовательностью.*

Обозначим через $H_{1,2}S = H_2H_1S$ результат последовательного применения к последовательности $\{S_n\}$ двух регулярных преобразований $H_1$ и $H_2$, где

$$H_1 = H(\mu, \gamma) \text{ и } H_2 = H(\mu', \gamma).$$

Теорема 10. *Преобразование $H_{1,2}S = H_2H_1S$ также является обобщенным хаусдорфовским преобразованием и*

$$H_{1,2} = H(\mu\cdot\mu', \gamma). \tag{3.6}$$

Для доказательства теоремы составим

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k = \sum_{k=0}^{n} S_k \int_0^1 \lambda_{n,k}(x)\, d\alpha(x), \tag{3.7}$$

$$t_m^* = \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n}^* t_n = \sum_{n=0}^{m} S_n \int_0^1 \lambda_{m,n}(u)\, d\beta(u), \tag{3.8}$$

где

$$\lambda_{m,n}^* = \prod_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu \sum_{j=n}^{m} \frac{\mu_j'}{\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\neq j}}^{m} (\gamma_j - \gamma_\nu)}$$

и рассмотрим

$$t_m^* = \sum_{n=0}^{m} \left( \sum_{k=0}^{n} S_k \int_0^1 \lambda_{n,k}(x)\, d\alpha(x) \right) \int_0^1 \lambda_{m,n}(u)\, d\beta(u). \tag{3.9}$$

Из (3.9) после изменения порядка суммирования получаем

$$t_m^* = \sum_{k=0}^{m} S_k \sum_{n=k}^{m} \int_0^1 \lambda_{n,k}(x)\, d\alpha(x) \int_0^1 \lambda_{m,n}(x)\, d\beta(u). \tag{3.9'}$$

Упростим теперь сумму

$$\sigma_{m,k} = \sum_{n=k}^{m} \int_0^1 \lambda_{n,k}(x)\, d\alpha(x) \int_0^1 \lambda_{m,n}(u)\, d\beta(u). \tag{3.10}$$

Имеем

$$J_{m.}\ (\zeta, z) = \sum_{n=k}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} \cdot \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} (z + \gamma_\nu)} =$$

$$= \prod_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{\prod\limits_{\nu=k}^{n} (\zeta + \gamma_\nu) \prod\limits_{\nu=n}^{m} (z + \gamma_\nu)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (z+\gamma_\nu)} \sum_{n=k}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k}^{n-1} (z+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=k}^{n} (\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (z+\gamma_\nu)} \left[1 - \prod_{\nu=k}^{m} \frac{z+\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right] \frac{1}{\zeta - z}. \tag{3.11}$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{n=k}^{m} \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{-\zeta} d\zeta \int_{C_1} u^{-z} J_{m,k}(\zeta, z)\, dz;$$

значит в силу (3.11)

$$\sum_{n=k}^{m} \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{u^{-z}\, dz}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (z+\gamma_\nu)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[1 - \prod_{\nu=k}^{m} \frac{z+\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right] \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Используя свободу выбора контура $C$ ($C$ — охватывает окрестности точек $-\gamma_k, -\gamma_{k+1}, \ldots, -\gamma_m$), возьмем его таким, чтобы $z \in C_1$ оказался во внешней к контуру $C$ области, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Это значит, что

$$\sum_{n=k}^{m} \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) = -\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_1} u^{-z}\, dz \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{(\zeta - z) \prod\limits_{\nu=k}^{m} (\zeta+\gamma_\nu)}. \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.12) следует, что

$$\sigma_{m,k} = -\int_0^1 d\beta(u)\frac{\prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_1} u^{-z}\,dz\int_0^1 d\alpha(x)\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^{-\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-z)\prod_{\nu=k}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$= -\int_0^1 d\beta(u)\frac{\prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_1} u^{-z}\,dz\int_0^1 \sum_{j=k}^{m}\frac{x^{\gamma_j}}{(-\gamma_j-z)\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}\,d\alpha(x) =$$

$$= \int_0^1 d\beta(u)\frac{\prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_1} u^{-z}\sum_{j=k}^{m}\frac{\mu_j}{(z+\gamma_j)\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}. \tag{3.13}$$

Из (3.10) и (3.13) следует, что

$$\sigma_{m,k} = \int_0^1 \prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu\sum_{j=k}^{m}\frac{\mu_j u^{\gamma_j}}{\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}\,d\beta(u) =$$

$$= \prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu\sum_{j=k}^{m}\frac{\mu_j}{\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}\int_0^1 u^{\gamma_j}\,d\beta(u) =$$

$$= \prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu\sum_{j=k}^{m}\frac{\mu_j\cdot\mu_j'}{\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}.$$

Если обозначить

$$\lambda_{m,k}^{**} = \prod_{\nu=k+1}^{m}\gamma_\nu\sum_{j=k}^{m}\frac{\mu_j\mu_j'}{\prod_{\substack{\nu=k\\ \nu\neq j}}^{m}(-\gamma_j+\gamma_\nu)}, \tag{3.14}$$

тогда (3.9′) перепишется так

$$t_m^{*} = \sum_{k=0}^{m}\lambda_{m,k}^{**}S_k. \tag{3.9''}$$

Этим теорема доказана.

Из теоремы 10 следует

Теорема 10′. *Повторное применение преобразований* $H_1 = H(\mu, \gamma)$, $H_2 = H(\mu', \gamma)$ *есть* $H$ *преобразование и справедливо равенство*

$$H_{1,2} S = H_{2,1} S. \tag{3.15}$$

Обозначим теперь

$$\tilde{\lambda}_{n,k} = \prod_{\nu=k+1}^{n} \gamma_\nu \sum_{j=k}^{n} \frac{\mu_j^{-1}}{\prod\limits_{\substack{\nu=k \\ \nu \neq j}}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_j)}, \tag{3.16}$$

а преобразование

$$\tilde{t}_n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}_{n,k} S_k$$

через $\tilde{H}$.

Теорема 11. *Последовательное применение преобразований* $\tilde{H} H = H \tilde{H}$ *есть тождественное преобразование, т. е.*

$$\tilde{t}_m = \sum_{n=0}^{m} \tilde{\lambda}_{m,n} t_n = \sum_{n=0}^{m} \tilde{\lambda}_{m,n} \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k = S_m. \tag{3.17}$$

Для доказательства теоремы, согласно (3.9″), имеем

$$t_m^* = \sum_{k=0}^{m} \lambda^*_{m,k} S_k,$$

где

$$\lambda^*_{m,k} = \prod_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{\nu=k \\ \nu \neq j}}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_j)}.$$

Нам остается заметить, что

$$\lambda^*_{m,k} = \begin{cases} 0, \text{ когда } 0 \leqslant k \leqslant m-1, \\ 1, \text{ когда } k = m. \end{cases}$$

Действительно, нетрудно заметить, что

$$\lambda^*_{m,k} = \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Но последний интеграл равен нулю для всех $k=0, 1, 2, \cdots, m-1$, а

$$\lambda_{m,m}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta+\gamma_m}=1.$$

Это значит, что

$$\tilde{t}_m=\sum_{k=0}^{m}\lambda_{m,k}S_k=S_m. \tag{3.17}$$

Доказанная теорема показывает, что $\tilde{H}=H^{-1}$, следовательно, ее можно сформулировать еще так

Теорема 11′. *Справедливо равенство*

$$HH^{-1}S=H^{-1}HS=S.$$

Последняя теорема в силу теоремы 9 показывает, что известная теорема о сравнении мощностей двух хаусдорфовских методов суммирования (см. [10], стр. 324) переносится и на случай обобщенных методов суммирования, а именно:

Теорема 12. *Пусть $H=H(\mu, \gamma)$, $H'=H(\mu', \gamma)$ два регулярных обобщенных хаусдорфовских метода, для которых $\mu_n\neq 0$, $\mu'_n\neq 0$, $n=0, 1, 2, \cdots$,* тогда:

а) *для того чтобы $H_1\supset H$, необходимо и достаточно, чтобы $\left\{\frac{\mu'_n}{\mu_n}\right\}$ была регулярной моментной последовательностью;*

б) *для равносильности методов $H$ и $H_1$ необходимо и достаточно, чтобы $\left\{\frac{\mu'_n}{\mu_n}\right\}$ и $\left\{\frac{\mu_n}{\mu'_n}\right\}$ были регулярными моментными последовательностями.*

В частности, для того чтобы метод $H$ был равносилен тождественному, необходимо и достаточно, чтобы $\{\mu_n\}$ и $\left\{\frac{1}{\mu_n}\right\}$ были регулярными моментными последовательностями.

Доказательство следует из

$$H_2S=H_1HH^{-1}S=H_1H^{-1}HS=H_1H^{-1}(HS). \tag{3.18}$$

Если обозначить

$$H_1(z)=\int\limits_0^1 t^z\,d\alpha(t),\quad H_2(z)=\int\limits_0^1 t^z\,d\beta(t), \tag{3.19}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 9, то последняя теорема может быть сформулирована так:

Теорема 12′. *Пусть $H_1=H(\mu, \gamma)$ и $H_2(\mu', \gamma)$ определены по* (3.19), *тогда:*

а) *для того чтобы* $H_2 \supset H_1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $H_1(z)$, $H_2(z)$, $Re(z) > 0$, $\delta(t)$, *где* $H_1(\gamma_n) = \mu_n$, $H_2(\gamma_n) = \mu'_n$, *а* $\delta(t)$ *на* $[0, 1]$ *имеет ограниченную вариацию*, $\delta(0) = \delta(0+) = 0$, $\delta(1) = 1$, $V_a^b \delta(1) = 1$, *и*

$$\frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \int_0^1 t^z \, d\delta(t); \tag{3.20}$$

б) *для равносильности методов* $H_1$ *и* $H_2$ *необходимо и достаточно, чтобы кроме вышеуказанных функций существовала еще функция* $\delta_1(t)$, *обладающая всеми свойствами функции* $\delta(t)$, *такая, что*

$$\frac{H_1(z)}{H_2(z)} = \int_0^1 t^z \, d\delta(t). \tag{3.20'}$$

$$\frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \int_0^1 t^z \, d\delta_1(t). \tag{3.21}$$

Последняя теорема остается в силе (в соответствующей формулировке) и тогда, когда конечное или даже бесконечное множество (ненарушающее единственность функции $\delta(t)$) элементов последовательности $\{\mu_n\}$ равно нулю.

Это утверждение следует из теоремы Фукса (см. [3], стр. 64—76), если там обычные моменты заменить моментами (3.2) и заметить, что нигде в теореме по существу не использована целочисленность степеней моментов, а также справедливость утверждения:

$$\text{если } H \subset H' \quad \text{и} \quad \mu_n = 0, \text{ то и } \mu'_n = 0.$$

Ниже мы приводим доказательство последнего утверждения. Имеем

$$t_m = \int_0^1 \sum_{k=0}^m S_k \lambda_{m,k}(x) \, d\alpha(x); \tag{3.22}$$

Допустим теперь, что

$$S_k = \begin{cases} \prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \dfrac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n}, & m = n+1, n+2, \cdots \\ 0, & 0 \leqslant k \leqslant n \end{cases} \tag{3.23}$$

и рассмотрим

$$J_m(\zeta) = \sum_{k=n}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{m} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=k}^{m} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_m)} S_k, \quad \prod_{\nu=n+1}^{n} \gamma_\nu = 1,$$

или

$$J_m(\zeta) = \prod_{\nu=n}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n} \left( \frac{S_n}{\gamma_n} + \frac{\zeta + \gamma_{n+1} - \gamma_n}{\gamma_n \gamma_{n+1}} S_{n+1} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m-2} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n)}{\prod\limits_{\nu=n}^{m-1} \gamma_\nu} S_{m-1} + \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m-1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n)}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} \gamma_\nu} S_m \right).$$

В силу (3.23) получаем

$$J_m(\zeta) = \prod_{\nu=n}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n} \left[ \frac{1}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} + \frac{\zeta + \gamma_{n+1} - \gamma_n}{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(\gamma_{n+2} - \gamma_n)} + \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\prod\limits_{\nu=n}^{m-1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n)}{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_n)} \right] =$$

$$= \prod_{\nu=n}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n} \left[ \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n}{\gamma_\nu - \gamma_n} - 1 \right] \frac{1}{\zeta}. \tag{3.24}$$

Заметим теперь, что

$$t_m = \int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) \frac{1}{2\pi i} \int_C J_m(\zeta)\, t^{-\zeta}\, d\zeta =$$

$$= \int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) \left( \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\nu=n+1}^{m} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_n)} \right) = \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n} \int_0^1 t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) -$$

$$-\int_0^1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=n}^{m} (\zeta+\gamma_\nu)} \, d\alpha(t) = \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n} \mu_n - \lambda_{m,n}.$$

Таким образом окончательно получаем

$$t_m = \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n} \mu_n - \lambda_{m,n}. \tag{3.25}$$

Известно, что

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{m,n} = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \mu_n \lim_{m\to\infty} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n}$$

и равняется бесконечности, если $\mu_n \neq 0$.

Если теперь положить $\mu_n = 0$, а $\mu'_n \neq 0$, хотя $H' \supset H$, то для нашего примера соответственно получим

$$t_m \to 0, \quad (H)$$

$$t'_m \to \mu'_n \lim_{m\to\infty} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_n} = \infty, \ (H').$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Покажем теперь, что полученное в [4] обобщение чезаровского метода суммирования входит в рассматриваемый в настоящей работе метод суммирования как частный случай.

Теорема 14. *Обобщенный чезаровский метод суммирования является* $H(\mu, \alpha)$ *методом при* $\alpha_n = \gamma_n - \gamma_1$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\alpha(x) = \gamma_1 \int_0^1 u^{\gamma_1 - 1} \, du.$$

Действительно,

$$\lambda^*_{m,n} = -\gamma_1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta+\gamma_1} \Big|_{x=0}^{1} d\zeta}{(\zeta - \gamma_1) \sum\limits_{\nu=n}^{m} (\zeta + \alpha_\nu)} =$$

$$= -\gamma_1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{d\zeta}{(\zeta-\gamma_1)\prod\limits_{\nu=n}^{m}(\zeta+\alpha_\nu)} =$$

$$= -\gamma_1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{d\zeta}{(\zeta-\gamma_1)\prod\limits_{\nu=n}^{m}(\zeta+\alpha_\nu)} = \gamma_1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m} \alpha_\nu}{\prod\limits_{\nu=n}^{m}(\gamma_1+\alpha_\nu)} =$$

$$= \frac{\gamma_1}{\gamma_n} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu-\gamma_1}{\gamma_\nu} = C_{m,n}. \tag{3.26}$$

С другой стороны,

$$S_m^{(1)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_1)} S_{n-1}}{\prod\limits_{\nu=2}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}} = \sum_{n=1}^{m} C^*_{m,n} S^*_n, \tag{3.27}$$

$$C^*_{m,n} = \gamma_1 \frac{\prod\limits_{\nu=n+1}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{\prod\limits_{\nu=n}^{m}\gamma_\nu} = \frac{\gamma_1}{\gamma_n} \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{\gamma_\nu-\gamma_1}{\gamma_\nu}, \tag{3.28}$$

$$S^*_n = S_{n-1}.$$

Из (3.26) и (3.28) следует, что

$$C^*_{m,n} = C_{m,n} = \lambda^*_{m,n}$$

и

$$S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*_{m,n} S^*_n = t_m. \tag{3.29}$$

Отметим также, что можно получить аналог известного неравенства, связывающего $\sum\limits_{n=0}^{m} |t_n|^r$ и $\sum\limits_{n=0}^{m} |S_n|^r$ (см. [10], стр. 339-340).

В заключение заметим, что можно освободиться от ограничения

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n < \cdots.$$

допуская равенства некоторых из соседних $\gamma_k$, в этом случае очевидно, что $\lambda_{m,n}$ определится не по (1.12), а так:

пусть

$$\cdots < \gamma_k = \gamma_{k+1} = \cdots = \gamma_{k_1-1} < \gamma_{k_1} \leqslant \cdots;$$

обозначим

$$\omega_n(x) = x^{\gamma_k} (\ln x)^{n-k}, \; n = k, \; k+1, \ldots, k_1 - 1,$$

тогда прямое вычисление покажет, что

$$\lambda_{m,n}(x) = \sum_{n=0}^{m} a_{m,n} \omega_n(x),$$

а

$$\lambda_{m,n} = \sum_{n=0}^{m} a_{m,n} \mu_n,$$

где

$$\mu_n = \int_0^1 \omega_n(x) \, d\alpha(x), \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 III 1959

Հ. Վ. Բադալյան

## ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՀԱՈՒՍԴՈՐՖՅԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Այս աշխատության մեջ հիմնականում շարադրված է շարքերի (հաջորդականությունների) հանրագումարման Հաուսդորֆյան մեթոդի հետևյալ ընդհանրացումը։*

*Դիցուք տրված են թվերի* $\{\mu_n\}$, $\{\gamma_n\}$ *և* $\{S_n\}$ *հաջորդականությունները, որտեղ*

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n < \cdots \to \infty, \; \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty:$$

*Դիտարկվում է հաջորդականությունների հետևյալ ձևափոխությունը (հանրագումարման մեթոդը).*

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \lambda_{m,n} S_n, \qquad (H^*)$$

որտեղ

$$\lambda_{m,n} = \prod_{\nu=n+1}^{m} \gamma_\nu \sum_{j=n}^{m} \frac{\mu_j}{\prod\limits_{\substack{\nu=n \\ \nu\neq j}}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_j)};$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ $(H^*)$ ձևափոխությունը համընկնում է Հաուսդորֆյան կամ կարճ $(H)$ ձևափոխության հետ։

Աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ $(H^*)$ ձևափոխությունը պահպանում է $(H)$ ձևափոխության բոլոր հիմնական հատկությունները։ Նշենք նաև, որ նա իր մեջ, որպես մասնավոր դեպք ընդգրկում է Չեզարոյան միջին գումարների մեր կողմից այլ հարցի կապակցությամբ ստացված ընդհանրացումը նույնպես։

Աշխատությունը բաղկացած է երեք պարագրաֆներից։ Առաջին պարագրաֆն ունի ընդհանուր բնույթ, որտեղ դիտարկվում են Ս. Ն. Բեռնշտեյնի բազմանդամների ընդհանրացման հետ կապված հարցեր։

Երկրորդ պարագրաֆը նվիրված է մոմենտների Հաուսդորֆյան տեսության ընդհանրացմանը, երբ դիտարկվում են ֆունկցիաների ոչ ամբողջ աստիճան մոմենտները։

Երրորդ պարագրաֆում շարադրված է հաջորդականությունների հանրագումարելիության Հաուսդորֆյան մեթոդի ընդհանրացումը։

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hausdorff F.* Summationsmethoden und Momentfolgen I, II. Mathematische Zeitschrift, Vol. 9, 1921.
2. *Rogosinski W. W.* On Hausdorff's methods of Summability. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 38, 1942.
3. *Fuchs W. H. J.* A Theorem on Hausdorff's Methods of Summation. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, Vol. 16, Nos 61–2, 1945.
4. *Бадалян Г. В.* Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XI, № 2, 1958.
5. *Гельфонд А. О.* К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна. Известия АН СССР, серия математическая, 14, 1950.
6. *Widder D.* V. Hirschman J. J. Jr.– Generalized Bernstein Polinomials. Duke Math. Journ., 16 1949.
7. *Widder D. V.* The Laplace Transform. Princeton, Princeton University Press, 1946.
8. *Соловьев А. Ф.* Обобщения одной теоремы Хауслорфа. УМН, том XIII, вып. 6 (84), 1958.
9. *Медведев Ю. Т.* Обобщение одной теоремы Ф. Рисса. УМН, VIII, вып. 6 (58), 1953.
10. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Москва, 1951.