ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 5, 1959 Физико-математические науки

ФИЗИКА

С. А. Хейфец

Возбуждение фазовых колебаний частиц в электронном синхротроне шумами магнитного поля, частоты и напряжения ускоряющего поля

В настоящей работе приращение амплитуды фазовых колебаний, вызванное действием различных возмущений, вычислено с учетом адиабатического и излучательного затухания. Результаты получены в виде универсальных однопараметрических функций.

1. Уравнение фазовых колебаний

Уравнение фазовых колебаний с учетом возмущений имеет вид [1]:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\dot{E}}{E} + \frac{2\bar{P}_{\gamma s}}{E}\right)\dot{\varphi} + \Omega^2\varphi - \omega\alpha\frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E}(2n-1)\frac{r}{\rho} =$$

$$= -\omega\alpha\frac{p(t)}{E} + \frac{d}{dt}\Delta\omega - \frac{\omega\alpha}{H}\frac{d}{dt}\Delta H + \frac{\omega\alpha ec}{EL}\cos\Phi_s\,\Delta V_0 -$$

$$-\omega\alpha\frac{4\bar{P}_{\gamma s}}{E}\frac{\Delta H}{H} + \left(\frac{\dot{E}}{E} + \frac{2\bar{P}_{\gamma s}}{E}\right)\Delta\omega. \qquad (1)$$

Здесь $\Omega = (\omega\alpha e V_0 c \sin\Phi_s/EL)^{1/2}$ — частота фазовых колебаний, E — полная энергия электрона, ω, V_0 — частота и амплитуда напряжения ускоряющего поля, $\bar{P}_{\gamma s}$ — средняя мгновенная мощность излучения, $p(t)$ — флюктуационная часть мощности излучения, α — логарифмическая производная длины орбиты по импульсу, L, ρ — длина и радиус кривизны орбиты, r — радиальное отклонение от идеальной равновесной орбиты.

Не все члены уравнения (1) имеют одинаковый порядок. Действительно, обычно выполняется неравенство $\Omega \gg \bar{P}_{\gamma s}/E$. Поэтому последние два слагаемых много меньше других членов в правой части уравнения. В дальнейшем мы не будем их рассматривать. Член содержащий $r = r_{\text{пер}} + r_{\text{св}}$, после усреднения по длине орбиты, дает дополнительное затухание [2]. Так как $\langle n r_{\text{св}}\rangle = 0$ ввиду несоизмеримости частоты изменения функций n и $r_{\text{св}}$, то после усреднения получим:

$$<\omega\alpha\frac{\bar{P}_{\gamma s}}{\mathrm{E}}(2n-1)\frac{r}{\rho}>\sim\frac{\bar{P}_{\gamma s}}{\mathrm{E}}<\frac{(2n-1)\psi}{\rho}>\dot{\varphi}, \qquad (2)$$

где ψ — периодическое решение, определяемое равенством $r_{\text{пер}}=\psi\Delta\mathrm{E}/\mathrm{E}$.

Член, содержащий флюктуационную часть излучения $p(t)$, обуславливает раскачку фазовых колебаний. В электронном ускорителе он играет основную роль в динамике амплитуды фазовых колебаний. Его влияние с учетом затухания было рассмотрено в работе [3]. Наконец, остальные члены в правой части описывают влияние шумовой модуляции радио частоты, магнитного поля и амплитуды напряжения ускоряющего поля.

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\varphi=\frac{1}{2i}e^{i\int\limits_0^t\Omega dt'-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\gamma dt'}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\Omega}}\int\limits_0^t dt'F(t')\sqrt{\frac{E}{\Omega}}\,e^{-i\int\limits_0^{t'}\Omega dt''+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'}\gamma dt''}+\text{к. с.} \qquad (3)$$

Здесь $F(t)$ — означает возмущение, находящееся в правой части уравнения (1), $\gamma=\frac{2\bar{P}_{\gamma s}}{\mathrm{E}}\left[1-<\frac{(n-{}^1/_2)\psi}{\rho}>\right]$.

2. Среднеквадратичная амплитуда фазовых колебаний

Рассмотрим случай, когда возмущение может быть разложено в ряд Фурье:

$$F(t)=\sum_k C_k e^{2\pi ifkt}.$$

В этом случае

$$\varphi=\frac{1}{2i}\frac{\exp\left\{i\int\limits_0^t\Omega dt'-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\gamma dt'\right\}}{\sqrt{\mathrm{E}\Omega}}\times$$

$$\times\sum_k C_k\int\limits_0^t dt'\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\Omega}}\,e^{2\pi ifkt'-i\int\limits_0^{t'}\Omega dt''+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'}\gamma dt''}+\text{к. с.}$$

Очевидно, что основной вклад в интеграл, входящий в это выражение, дают те моменты времени, когда показатель экспоненты в подинтегральном выражении близок к нулю. Действительно, в противном случае под интегралом стоит осциллирующая функция, интеграл от которой близок к нулю.

С физической точки зрения такие моменты соответствуют резонансам возмущающей силы, так как мгновенное значение частоты колебаний совпадает с частотой одной из гармоник возмущения.

Разложим Ω вблизи точки t_k, определенной уравнением $\Omega(t_k) = 2\pi fk$, в ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$\Omega \simeq 2\pi fk + \dot{\Omega}(t_k)(t - t_k).$$

Тогда

$$\int_0^t dt' \sqrt{\frac{E}{\Omega}}\, e^{i\left(2\pi fkt' - \int_0^{t'} \Omega dt''\right) + \frac{1}{2}\int_0^{t'} \gamma dt''} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{\frac{E_k}{\Omega_k}}\, e^{\frac{1}{2}\int_0^{t_k} \gamma dt} \int_0^t e^{-\frac{i}{2}\dot{\Omega}_k (t' - t_k)^2} dt'.$$

Справа все функции вынесены из-под знака интеграла в момент $t = t_k$ (что отмечено индексом k). Последний интеграл можно выразить через интегралы Френеля [4]:

$$\int_0^t e^{-i\frac{\dot{\Omega}_k}{2}(t' - t_k)^2} dt' \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\dot{\Omega}_k}}\,(C - iS)$$

$$|C - iS| = \sqrt{2}.$$

Собирая вместе эти выражения, получим для φ:

$$\varphi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma dt'}}{\sqrt{E\Omega}} \sum_k |C_k| \sqrt{\frac{2\pi E_k}{\Omega_k \dot{\Omega}_k}}\, e^{\frac{1}{2}\int_0^{t_k} \gamma dt} \sin\left(\int_0^t \Omega dt' + \alpha_k\right). \qquad (4)$$

Возведем φ в квадрат и усредним по фазам прохождения через резонансы. Ввиду случайности этих фаз, среднее от перекрестных членов даст нуль, а квадраты синусов будут равны 1/2. Для среднеквадратичной фазы получим:

$$\overline{\varphi^2} = \pi \frac{e^{-\int_0^t \gamma dt'}}{E\Omega} \sum_k |C_k|^2 \frac{E_k}{\Omega_k \dot{\Omega}_k}\, e^{\int_0^{t_k} \gamma dt}. \qquad (5)$$

Так как $\Omega \gg 2\pi f$, то суммирование можно заменить интегрированием. Для этого совершаем замену

$$\frac{1}{\dot{\Omega}_k} = \frac{dt}{d\Omega} \simeq \frac{dt}{2\pi f}.$$

$$\overline{\varphi^2} = \pi \frac{e}{\dot{E}\Omega} \int_0^t dt' \frac{\dot{E}}{\Omega} \eta(t') e^{-\int_0^t \gamma dt' + \int_0^{t'} \gamma dt''}. \tag{6}$$

Здесь $\eta = |C_k|^2/2\pi f$ — аналог спектральной интенсивности шума. $\eta(t)$ зависит от времени потому, что амплитуды C_k являются функциями k, т. е. номера, по которому производится суммирование в (6).

Замечая, наконец, что $\overline{\varphi^2}_{max} = 2\,\overline{\varphi^2}$, получим выражение для среднеквадратичной амплитуды фазовых колебаний:

$$\overline{\varphi^2}_{max} = 2\pi \frac{e}{\dot{E}\Omega} \int_0^t dt' \frac{\dot{E}}{\Omega} \eta e^{-\int_0^t \gamma dt' + \int_0^{t'} \gamma dt''}. \tag{7}$$

Если $\dot{E}$ можно приближенно считать постоянной, то функцию, входящую в (7), можно представить в универсальном виде. Учтя, что мощность излучения $\overline{P_{\gamma s}}$ пропорциональна четвертой степени энергии, легко получить, что

$$\int_0^t \gamma dt' = (1+\beta)\zeta; \tag{8}$$

где $\zeta = \overline{P_{\gamma s}}/\dot{E}$, а β константа, зависящая от параметров ускорителя. Переменная ζ в свою очередь пропорциональна четвертой степени энергии:

$$\zeta = (bE)^4. \tag{9}$$

Перейдем от интегрирования по t к интегрированию по ζ. Тогда для среднеквадратичной амплитуды фазовых колебаний получим:

$$\overline{\varphi^2}_{max} = \frac{\pi}{2\dot{E}bd^2} A_\beta(\zeta), \tag{10}$$

где d определено равенством

$$\Omega = d\zeta^{-1/8}(1+\zeta)^{1/2}, \tag{11}$$

а b из (9). Функция $A_\beta(\zeta)$ имеет вид:

$$A_\beta(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/8}(1+\zeta)^{1/2}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} du \frac{\eta(u)\, e^{(1+\beta)u}}{u^{1/8}(1+u)^{1/2}}. \tag{12}$$

Если в начале ускорения излучением можно пренебречь ($\zeta \ll 1$), то:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{2\pi b}{\dot{E} d^2} A_0 \tag{13}$$

$$A_0 = E^{-5/3} \int_{E_i}^{E} dE\, E^{2/3} \eta(E). \tag{14}$$

3. Возбуждение фазовых колебаний шумами

Рассмотрим увеличение амплитуды фазовых колебаний, вызванное наличием шумов в устройствах ускорителя.

Модуляция радиочастоты.

В этом случае, как следует из (1), функция

$$F(t) = \frac{d}{dt} \Delta\omega = 2\pi \frac{d}{dt} \Delta\nu.$$

Разложим $\Delta\nu$ в ряд Фурье:

$$\Delta\nu = \sum_k w_k^{\omega} \exp\{2\pi i f k t\}.$$

В этом случае функция η, входящая в (12), принимает вид:

$$\eta = \frac{2\pi d^2}{f} |w_k^{\omega}|^2 \frac{1+\zeta}{\zeta^{2/3}}.$$

Подставляя в (10) и (12), получим выражение для среднеквадратичной амплитуды, вызванной модуляцией частоты:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{\pi^2 |w^{\omega}|^2}{\dot{E} f b} A_{\beta}^{(1)}(\zeta),$$

$$A_{\beta}^{(1)}(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/3}(1+\zeta)^{1/2}} \int_0^{\zeta} du \frac{e^{(1+\beta)u}(1+u)^{1/2}}{u^{1/3}}. \tag{15}$$

При выводе (15) было предположено, что амплитуда w_k^{ω} постоянна в интересующем нас интервале частот: $w_k^{\omega} = w^{\omega}$.

Функция $A_{\beta}^{(1)}(\zeta)$ для $\beta = -0{,}30$; $-0{,}40$; $-0{,}70$ приведена на рис. 1 (кривые *a*, *б* и *b* соответственно).

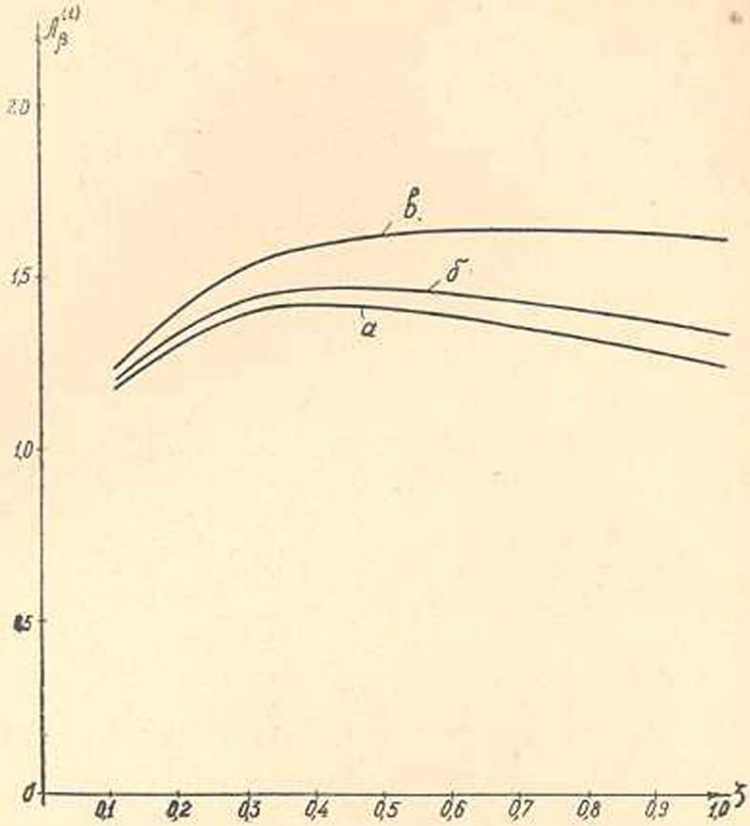

Рис. 1. Функция $A_\beta^{(1)}(\zeta)$. Кривые *а*, *б* и *в* соответствуют параметрам затухания β равным —0,30; —0,40; —0,70.

Модуляция амплитуды ускоряющего напряжения.

В этом случае

$$F(t) = \frac{\Omega^2}{\mathrm{tg}\Phi_s}\,\frac{\Delta V_0}{V_0}.$$

Разберем отдельно две возможности:

а) $\Delta V_0/V_0 = \sum\limits_k \text{ш}_{1k}^V \exp\{2\pi i f k t\}$,

б) $\Delta V_0 = \sum\limits_k \text{ш}_{2k}^V \exp\{2\pi i f k t\}$.

а) В первом случае будем считать, что не зависящей от k является амплитуда относительного шума: $\text{ш}_{1k}^V = \text{ш}_1^V$. Тогда аналогично (15) получим:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{d^2}{4\dot{E}fb\,\mathrm{tg}^2\Phi_s}|w_1^V|^2 A_\beta^{(2)}(\zeta)$$

$$A_\beta^{(2)}(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/2}(1+\zeta)^{1/2}}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} du \frac{e^{(1+\beta)u}(1+u)^{3/2}}{u^{1/2}}. \tag{16}$$

На рис. 2 приведены графики функции $A_\beta^{(2)}(\zeta)$ для трех значений параметра затухания $\beta = -0{,}30$; $-0{,}40$; $-0{,}70$ (кривые *а*, *б*, *в*)

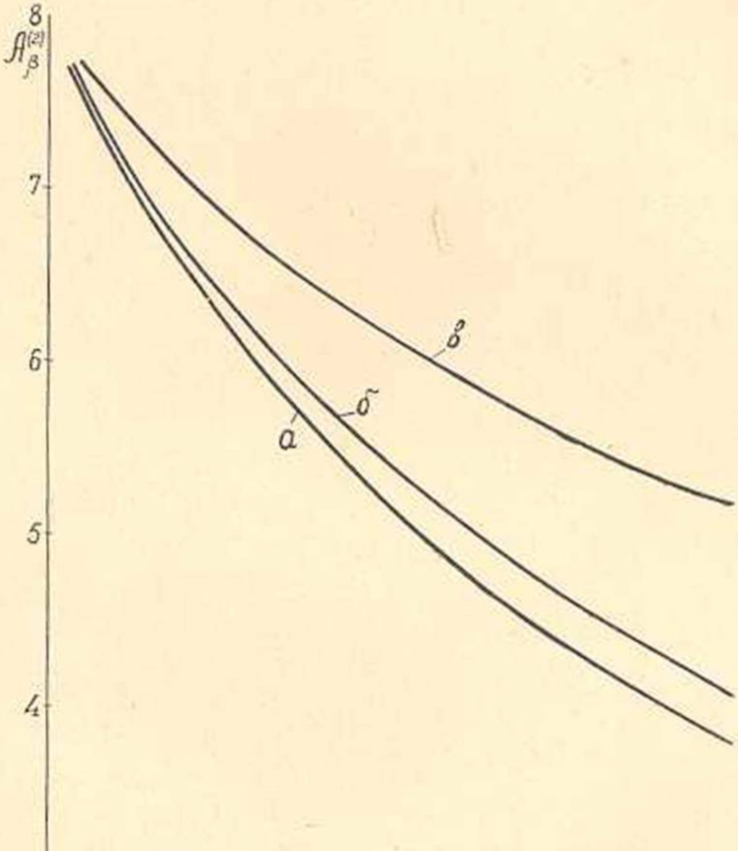

Рис. 2. Функция $A_\beta^{(2)}(\zeta)$. Кривые *а*, *б* и *в* соответствуют параметрам затухания β равным $-0{,}30$; $-0{,}40$; $-0{,}70$.

б) Во втором случае примем, что не зависящей от k является амплитуда абсолютного шума: $w_{2k}^V = w_2^V$. Тогда:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{b\Omega_0^4}{4\dot{E}fd^2\,\mathrm{tg}^2\Phi_s}\frac{|w_2^V|^2}{V_{00}^2}A_\beta^{(3)}(\zeta)$$

$$A_\beta^{(3)}(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/2}(1+\zeta)^{1/2}}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} du \frac{e^{(1+\beta)u}}{u^{1/2}(1+u)^{1/2}}. \tag{17}$$

Здесь введены обозначения Ω_0, V_{00} — частота фазовых колебаний и амплитуда ускоряющего напряжения в начальный момент.

На рис. 3 приведены графики функций $A_\beta^{(3)}(\zeta)$ для значений параметра затухания $\beta = -0{,}30;\ -0{,}40;\ -0{,}70$ (кривые *а*, *б*, *в*).

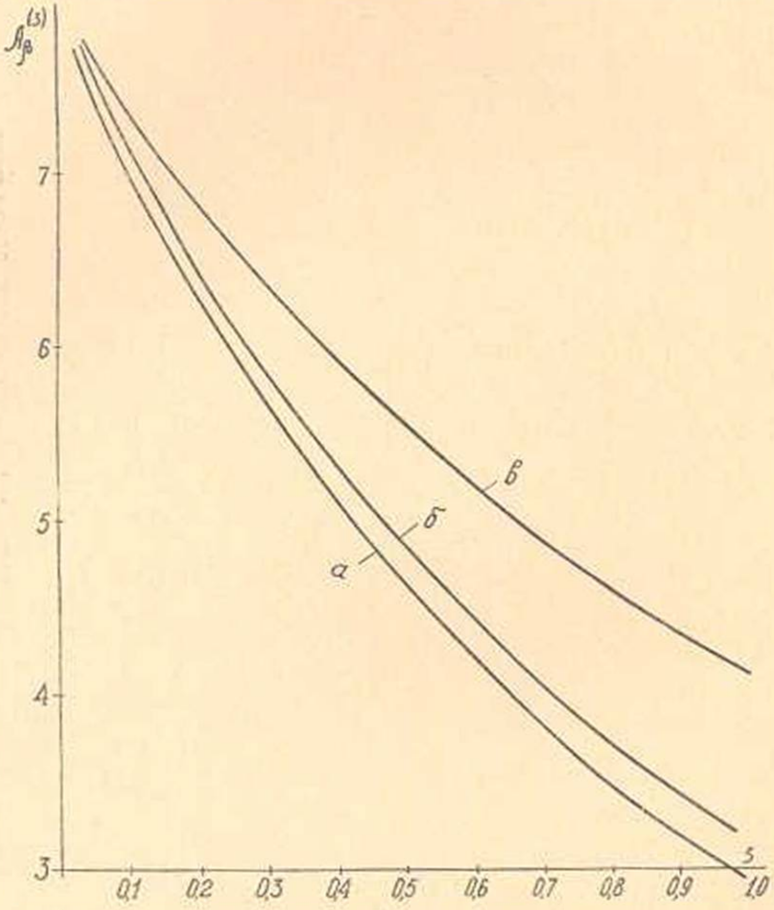

Рис. 3. Функция $A_\beta^{(3)}(\zeta)$. Кривые *а*, *б* и *в* соответствуют параметрам затухания β равным $-0{,}30$; $-0{,}40$; $-0{,}70$.

Модуляция напряженности магнитного поля.

Этот тип возмущения дает в правой части уравнения (1) член:

$$F(t) = \frac{\omega\alpha}{H}\frac{d}{dt}\Delta H.$$

Если магнитное поле модулировано из-за модуляции питающего напряжения V_M, то

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Delta H = \frac{\Delta V_M}{V_M}.$$

Разложив $\Delta V_M / V_M$ в ряд Фурье

$$\Delta V_M/V_M = \sum_k w_k^H \exp\{2\pi i f k t\}.$$

и приняв, что амплитуды w_k^H не зависят от k получим:

$$\overline{\varphi^2}_{max} = \frac{\omega^2 a^2 b \dot{E}}{4 d^2 f} |w^H|^2 A_\beta^{(3)}(\zeta), \tag{18}$$

где функция $A_\beta^{(3)}$ определена в (17).

Автор приносит Ю. Ф. Орлову глубокую благодарность за участие в обсуждении работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1959 г.

Մ. Ա. Խեյֆեց

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ, ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՑՆՈՂ ԴԱՇՏԻ ԱՂՄՈՒԿՆԵՐՈՎ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՖԱԶԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԳՐԳՌՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՍԻՆԽՐՈՏՐՈՆՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ հաշված է ֆազային տատանումների ամպլիտուդայի աճը տարբեր գրգռումների ազդեցության հետևանքով, հաշվի առնելով ադիաբատիկ և ճառագայթային մարումները: Արդյունքները ստացված են ունիվերսալ մեկ պարամետրանի ֆունկցիաների տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдин Л. Л. Кошкарев Д. Г.* Synchrotron oscillations in strong-focusing accelerators (Linear theory). Nuovo Cimento, 2, 1251, 1955.
Синхротронные колебания в сильнофокусирующем ускорителе (линейная теория), ЖЭТФ, 11, 803 1956.
2. *Орлов Ю. Ф., Тарасов Е. К.* Затухание колебаний в электронном циклическом ускорителе, ЖЭТФ, 34, 651 1958.
3. *Орлов Ю. Ф., Тарасов Е. К.* Возбуждение колебаний в электронном циклическом ускорителе квантовыми флуктуациями излучения. ПТЭ, 5, 17, 1958.
4. Таблицы интегралов Френеля, М., 1953, изд. АН СССР.