

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. П. Геонджян

К теории стесненного кручения сплошных
призматических стержней

В работе дается метод решения задачи кручения сплошного призматического стержня, на одном или на двух торцах которого имеются диафрагмы, устраняющие деформацию и искажения торцовых сечений в своих плоскостях. Крутящие моменты приложены к торцам стержня.

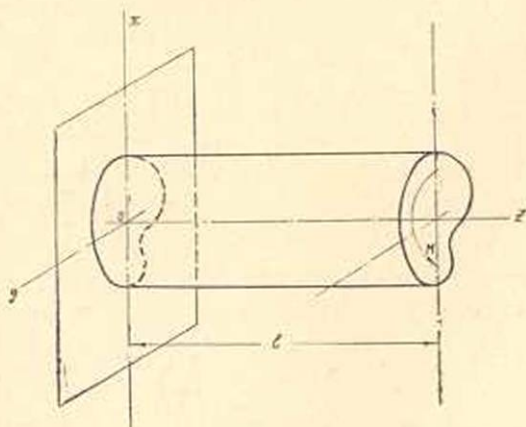
Предполагается, что закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня аналогичен закону деформации при свободном кручении того же стержня [1].

Кроме того предполагается, что известно решение задачи кручения рассматриваемого стержня по Сен-Венану. Рассматриваются лишь такие стержни, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии.

Стесненному кручению сплошных призматических стержней посвящен ряд работ [2—7].

§ 1. Построение решения задачи

Рассмотрим задачу кручения сплошного призматического стержня (фиг. 1), когда на основании $z = 0$ имеется диафрагма.



Фиг. 1.

Напряженное состояние представим в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 0, \\ \sigma_z &= -2f'(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= f''(z) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tau_{xz}^0, \\ \tau_{yz} &= f''(z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \tau_{yz}^0, \\ \tau_{xy} &= -f'''(z) \Phi(x, y).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь $f(z)$ и $\Phi(x, y)$ пока неизвестные функции, а τ_{xz}^0 и τ_{yz}^0 касательные напряжения свободного кручения.

Система напряжений (1.1) удовлетворяет условиям равновесия при любых $f(z)$ и $\Phi(x, y)$.

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних поверхностных сил, то на боковой поверхности будем иметь следующие условия

$$\begin{aligned}\tau_{xy}m &= 0, \\ \tau_{xy}l &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m &= 0,\end{aligned}\quad (1.2)$$

где $l = \cos(n, x)$, а $m = \cos(n, y)$ (n — внешняя нормаль к боковой поверхности).

Из (1.2) следует, что на контуре поперечного сечения стержня Γ

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n, y) = 0,$$

что эквивалентно следующим условиям

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (1.4)$$

Докажем, что система напряжений (1.1) в каждом поперечном сечении стержня статически эквивалентна паре сил, лежащей в плоскости данного поперечного сечения, то есть крутящему моменту.

Для этого достаточно доказать следующие соотношения

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \tau_z d\Omega &= 0, \\ \iint_{\Omega} x \sigma_z d\Omega &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} y \sigma_z d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) d\Omega &= \iint_{\Omega} (x \tau_{yz}^0 - y \tau_{xz}^0) d\Omega = M.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Подставляя значение σ_z из (1.1) в первое соотношение (1.5) и используя формулу Грина, получим

$$\iint_{\Omega} \sigma_z d\Omega = -2f'(z) \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} d\Omega = -2f'(z) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0,$$

так как $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ на контуре поперечного сечения стержня равняется нулю.

Аналогичным образом можно доказать и справедливость остальных соотношений (1.5).

§ 2. Определение функции $\Phi(x, y)$

Исходя из основного предположения, нормальное напряжение σ_z представим в виде

$$\sigma_z = f(z) \varphi(x, y) \tag{2.1}$$

где $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении того же стержня.

Из формул (1.1) и (2.1) следует

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \varphi(x, y). \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) математически утверждает тот факт, что среди класса функций $\{\Phi(x, y)\}$ существует некоторая функция $\Phi_1(x, y)$, смешанная производная которой, с точностью до постоянного множителя, совпадает с функцией деформации.

Таким образом, для определения $\Phi(x, y)$ будем иметь дифференциальное уравнение (2.2) и на контуре поперечного сечения стержня следующие граничные условия

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \tag{2.3}$$

§ 3. Определение $f(z)$

Для нахождения функции $f(z)$ применим вариационное уравнение Кастильяно

$$\delta\Pi = \int \int (u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v) ds. \quad (3.1)$$

В нашем случае поверхностный интеграл исчезает, так как в сечении стержня $z=0$, ввиду стесненного кручения, упругие перемещения u, v, w равны нулю, а на остальной части поверхности стержня заданы лишь силы.

Таким образом, будем иметь

$$\delta\Pi = 0. \quad (3.2)$$

Для потенциальной энергии деформации, как известно, имеем:

$$\Pi = \int_0^l \int_{\Omega} \left[\frac{z_z^2}{2E} + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] d\Omega dz. \quad (3.3)$$

Подставляя значения напряжений из (1.1) в (3.3), получим

$$\Pi = \frac{1}{2G} \int_0^l \left[\frac{J_1}{2(1+\mu)} f''(z) + J_2 f''(z) + J_3 f''(z) + J_4 f'(z) + T \right] dz, \quad (3.4)$$

где

$$J_1 = \int_{\Omega} \varphi^2(x, y) d\Omega, \quad (3.5)$$

$$J_2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega, \quad (3.6)$$

$$J_3 = \int_{\Omega} \Phi^2(x, y) d\Omega, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= 2G\theta \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] d\Omega = \\ &= 4G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} d\Omega = 4G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$T = \int_{\Omega} (\tau_{xz}^0 + \tau_{yz}^0) d\Omega. \quad (3.9)$$

Здесь интегралы берутся по сечению стержня.

Подставляя (3.4) в (3.2), получим

$$\oint_0^l \left[\frac{J_1}{2(1+\mu)} f'^2(z) + J_2 f''^2(z) + J_3 f'''^2(z) + J_4 f''^2(z) + T \right] dz = 0. \quad (3.10)$$

Для вариационной задачи (3.10) уравнение Эйлера будет иметь следующий вид:

$$f^{VI}(z) - 2r^2 f^{IV}(z) + s^4 f''(z) = 0, \quad (3.11)$$

где

$$2r^2 = \frac{J_2}{J_3}; \quad s^4 = \frac{J_4}{2(1+\mu)J_3}. \quad (3.12)$$

Общий интеграл уравнения (3.11) можно представить в виде

$$f(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) + c_3 v_3(z) + c_4 v_4(z) + c_5 z + c_6. \quad (3.13)$$

Из (3.5) — (3.7) и (3.12) легко видеть, что $r \neq 0$ и $s \neq 0$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $s > r$

Функции $v_i(z)$ будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \cos \beta z, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \cos \beta z, \\ v_3(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \sin \beta z, \\ v_4(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \sin \beta z, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}. \quad (3.15)$$

Или в силу (3.12)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{2J_1}{(1+\mu)J_3}} + \frac{J_2}{J_3}}, \\ \beta &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{2J_1}{(1+\mu)J_3}} - \frac{J_2}{J_3}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

2) $s < r$

тогда

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \operatorname{sh} \lambda_1 z, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} \lambda_1 z, \\ v_3(z) &= \operatorname{sh} \lambda_2 z, \\ v_4(z) &= \operatorname{ch} \lambda_2 z, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Или в силу (3.12)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}} + \sqrt{\frac{J_2^2}{4J_3^2} - \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{J_1}{J_3}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}} - \sqrt{\frac{J_2^2}{4J_3^2} - \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{J_1}{J_3}}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

3) $s=r$, тогда

$$\begin{aligned}v_1(z) &= \operatorname{sh} rz, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} rz, \\ v_3(z) &= z \operatorname{ch} rz, \\ v_4(z) &= z \operatorname{sh} rz,\end{aligned}\quad (3.20)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}}. \quad (3.21)$$

Перейдем к выяснению граничных условий функции $f(z)$. Известно, что

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}. \quad (3.22)$$

Подставляя значение σ_z из (2.1) в (3.22) и учитывая, что $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, можно написать

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{f'(z) \varphi(x, y)}{E}.$$

Интегрируя получим

$$w = \frac{f(z) \varphi(x, y)}{E} + \Omega(x, y), \quad (3.23)$$

где $\Omega(x, y)$ — произвольная функция, которая определяется из условия:

$$w(x, y, 0) = 0. \quad (3.24)$$

В силу (3.24) из (3.23) для $\Omega(x, y)$ получим

$$\Omega(x, y) = - \frac{f(0) \varphi(x, y)}{E}. \quad (3.25)$$

Подставляя значение $\Omega(x, y)$ из (3.25) в (3.23), для w получим:

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) - f(0)]. \quad (3.26)$$

Напомним, что здесь $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении.

Будем предполагать, что при неограниченном увеличении длины стержня

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = 0. \quad (3.27)$$

Кроме того, естественно предположить, что при $l \rightarrow \infty$ деформация свободного торца стержня стремится к деформации того же стержня при свободном кручении, т. е.

$$w_{l \rightarrow \infty} = w^0 = \theta \varphi(x, y). \quad (3.28)$$

Используя уравнение (3.26) и имея в виду (3.27) и (3.28), получим

$$f(0) = -E\theta. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.26), для w будем иметь

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) + E\theta]. \quad (3.30)$$

Основание стержня $z = 0$ не искажается, т. е.

$$\gamma_{xy}|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \tau_{xy}|_{z=0} = 0.$$

Тогда из (1.1) вытекает

$$f'''(z) = 0. \quad (3.31)$$

Нормальные напряжения σ_z на свободном торце стержня равны нулю, а касательные напряжения, как было указано выше, распределены по тому же закону, что и при свободном кручении. Поэтому из (1.1) следует

$$f'(l) = 0, \quad (3.32)$$

$$f''(l) = 0. \quad (3.33)$$

Таким образом, окончательно для $f(z)$ получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} f(0) &= -E\theta, \\ f'''(0) &= 0, \\ f'(l) &= 0, \\ f''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

и следующее условие на бесконечности

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = 0. \quad (3.35)$$

Пологая $\epsilon_0 = 0$, из условий (3.34) и (3.35) определим постоянные интегрирования.

В первом случае, когда $s = r$, будем иметь:

$$c_1 = E\theta \frac{\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)(\beta \operatorname{sh} 2\alpha l - \alpha \sin 2\beta l)}{2[\beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}^2 \alpha l - \alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2) \sin^2 \beta l - 4\alpha^2\beta^2]},$$

Решение дифференциального уравнения (4.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), можно представить следующим образом

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int_{h(y)}^x \int_{g(x)}^y \xi \eta d\xi d\eta, \quad (4.3)$$

где

$$g(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad h(y) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\Phi(x, y) = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{16 (a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.4)$$

Здесь одновременно приведем значения геометрических характеристик эллиптического сечения.

Из (3.5)–(3.7), (4.1) и (4.4) получим

$$J_1 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^3 b^3}{24 (a^2 + b^2)^2}, \quad (4.5)$$

$$J_2 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^3 b^3}{384 (a^2 + b^2)^2}, \quad (4.6)$$

$$J_3 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^5 b^5}{1280 (a^2 + b^2)^2}. \quad (4.7)$$

2. *Прямоугольное сечение.* Пусть уравнение контура прямоугольника дано в следующем виде

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \quad (a > b).$$

Функция кручения Сен-Венана имеет вид

$$\varphi(x, y) = -xy + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (2.2), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} xy - \frac{16b^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}. \quad (4.9)$$

Решение (4.9), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), можно представить следующим образом

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2} \int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.8) в (4.10) и интегрируя, получим

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{8} (a^2 - x^2) (b^2 - y^2) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 2b^4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2b} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}\right)}{n^5}. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом приведем геометрические характеристики J_1 , J_2 , J_3 для прямоугольника

$$J_1 = \frac{4a^3b^3}{9} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^7 16b^6 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^8} \left[\frac{\pi a}{b} - \frac{3 \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n} + \frac{\pi a}{2b \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \right], \quad (4.12)$$

$$J_2 = \frac{2a^3b^3(a^2 + b^2)}{45} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^9 8b^8 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^9} \left[\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} - \frac{n\pi a}{2b} + \frac{1}{3} \left(\frac{n\pi a}{2b} \right)^3 \right], \quad (4.13)$$

$$J_3 = \frac{4a^5b^5}{225} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{11} 4b^{10} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^{11}} \left[4 \frac{n\pi a}{2b} - 5 \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} - \frac{2}{3} \left(\frac{n\pi a}{2b} \right)^3 + \frac{n\pi a}{2b \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \right]. \quad (4.14)$$

§ 5. Определение нормального напряжения σ_z

Имея функции $\Phi(x, y)$ и $f(z)$ по (1.1) легко можно определить составляющие напряжения. Здесь мы будем заниматься лишь определением нормального напряжения σ_z вдоль оси стержня, которое представляет наибольший интерес при решении задачи стесненного кручения.

Из (2.1) для σ_z в сечении $z=0$ получим

$$\sigma_z|_{z=0} = f'(0) \varphi(x, y). \quad (5.1)$$

Максимальное значение σ_z получится в тех точках поперечного сечения стержня, где функция Сен-Венана $\varphi(x, y)$ достигает своего максимума, следовательно для сечения $z=0$ можем написать

$$|\sigma_z|_{\max} = |f'(0) \varphi_{\max}(x, y)|. \quad (5.2)$$

Приведем окончательные выражения для $|\sigma_z|_{\max}$ в трех ранее рассмотренных случаях

а) $s > r$

$$|\sigma_z|_{\max} = E\theta \left| \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) (\beta \operatorname{sh} 2\alpha l - \alpha \sin 2\beta l)}{\beta^2 (\beta^2 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}^2 \alpha l - \alpha^2 (\alpha^2 - 3\beta^2) \sin^2 \beta l - 4\alpha^2 \beta^2} \max [\varphi(x, y)] \right|. \quad (5.3)$$

б) $s < r$

$$|\sigma_z|_{\max} = E\theta \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l - \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2 - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4) \operatorname{ch} \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \operatorname{sh} \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l} \max [\varphi(x, y)] \right|. \quad (5.4)$$

в) $s = r$

$$|\tau_z|_{\max} = E\theta \frac{r (\operatorname{sh} 2rl - 2rl)}{1 + r^2 l^2 + 3 \operatorname{ch}^2 rl} |\varphi_{\max}(x, y)|. \quad (5.5)$$

В таблицах 1 и 2 приведены некоторые численные значения для

$$|\sigma_z|_{\max} \text{ и } |\tau_z|_{\max} \text{ при } \mu = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{l}{a} \geq 3.$$

Эллиптическое сечение

Прямоугольное сечение

Таблица 1

Таблица 2

a/b	2	10	∞
$\frac{ \sigma_z _{\max}}{E\theta b}$	0,616	1,179	1,225
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1,342	1,493	1,500
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	0,600	0,743	0,750
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	1,025	1,587	1,635
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	2,236	2,010	2,000
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$			

a/b	2	10	∞
$\frac{ \sigma_z _{\max}}{E\theta b}$	0,750	1,704	1,940
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1,387	1,872	2,121
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	0,697	0,750	0,750
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	1,074	2,272	2,586
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1,990	2,495	2,828
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$			

§ 6. Стесненное кручение стержней с двумя жесткими диафрагмами

Приведем решение задачи о стесненном кручении сплошного призматического стержня, на торцах которого имеются диафрагмы, устраняющие деформацию и искажения торцевых сечений в своих плоскостях. Крутящие моменты приложены на диафрагмах.

Расположим координатные оси так, как показано на фиг. 2. Напряжения примем в виде (1.1). Как и ранее, $\Phi(x, y)$ определяется из (2.2) и (2.3), а функция $f(z)$ из (3.11) и имеет следующий вид

* По Рейснеру.

$$f(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) + c_3 v_3(z) + c_4 v_4(z) + c_5 z + c_6. \quad (6.1)$$

Перейдем к выявлению граничных условий для рассматриваемого случая.

По (3.23) имеем

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} f(z) + \Omega(x, y). \quad (6.2)$$

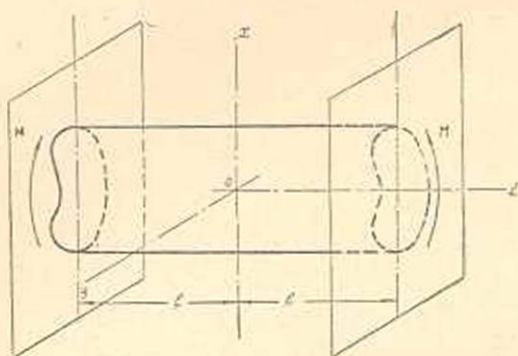
Но так как диафрагмы устраняют деформацию сечений, можем написать

$$w(x, y, z)|_{z=\pm l} = 0 \quad (6.3)$$

полагаем, что в сечении $z=0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w|_{z=0} = \theta \varphi(x, y). \quad (6.4)$$

Это вытекает из того факта, что, при неограниченном возрастании длины стержня, деформация среднего сечения будет стремиться к деформации того же стержня при свободном кручении.



Фиг. 2.

Кроме того, примем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(0) = 0. \quad (6.5)$$

Тогда, используя (6.2) и (6.4), можем написать

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w|_{z=0} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(x, y)}{E} f(0) + \Omega(x, y) \right] = \theta \varphi(x, y),$$

откуда, имея в виду (6.5), получим

$$\Omega(x, y) = \theta \varphi(x, y).$$

Подставляя значение $\Omega(x, y)$ в (6.2), получим

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) + E\theta]. \quad (6.6)$$

Из граничного условия (6.3) имеем

$$w|_{z=\pm l} = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(\pm l) + E\theta] = 0,$$

откуда

$$f(\pm l) = -\theta E. \quad (6.7)$$

Из (6.7) вытекает, что функция $f(z)$ четная и, следовательно, в силу (6.1) можем написать

$$f(z) = c_2 v_2(z) + c_4 v_4(z) + c_6. \quad (6.8)$$

Но так как торцовые сечения стержня в своих плоскостях не искажаются, то

$$\gamma_{xy}|_{z=\pm l} = 0 \quad \text{или} \quad \tau_{xy}|_{z=\pm l} = 0. \quad (6.9)$$

В силу (1.1) условие (6.9) примет вид

$$f'''(\pm l) = 0. \quad (6.10)$$

Используя граничные условия (6.7), (6.10) и (6.5), можем определить постоянные интегрирования. Подставляя эти постоянные в (6.8), будем иметь

$$f(z) = \frac{\theta E}{D} [v_2'''(l) v_4(z) - v_4'''(l) v_2(z)], \quad (6.11)$$

где

$$D = v_2(l) v_4'''(l) - v_4(l) v_2'''(l). \quad (6.12)$$

В силу (2.1) и (6.11) для нормального напряжения σ_z будем иметь

$$\sigma_z = \frac{E\theta}{D} [v_2'''(l) v_4'(z) - v_4'''(l) v_2'(z)] \varphi(x, y),$$

где D определяется из (6.12), а $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении того же стержня. Функции $v_2(z)$ и $v_4(z)$ при $s > r$, $s < r$ и $s = r$ соответственно имеют вид (3.14), (3.17) и (3.20).

§ 7. Определение жесткости при стесненном кручении

Под жесткостью C^* при стесненном кручении стержня будем подразумевать отношение крутящего момента M к среднему относительному углу закручивания стержня θ^* , т. е.

$$C^* = \frac{M}{\theta^*}. \quad (7.1)$$

Угол кручения ψ можно определить из уравнения работы крутящего момента

$$\frac{1}{2} M \psi = \Pi, \quad (7.2)$$

где Π — потенциальная энергия деформации всего стержня. С другой стороны по определению

$$\theta^* = \frac{\psi}{l}. \quad (7.3)$$

Из (7.2) и (7.3) получим

$$\frac{1}{2} M l \theta^* = \Pi. \quad (7.4)$$

При свободном кручении того же стержня будем иметь

$$C_0 = \frac{M}{\theta} \quad (7.5)$$

Используя (7.1), (7.4) и (7.5) легко получить формулу для жесткости C^* при стесненном кручении

$$C^* = \frac{\theta^2 I C_0^2}{2\pi} \quad (7.6)$$

Приведем двухстороннюю оценку для жесткости при стесненном кручении. По принципу Кастильяно из всех напряженных состояний, удовлетворяющих уравнениям равновесия и условиям на поверхности, на той части тела, где даны поверхностные силы, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщают телу действительно существующие напряжения.

Таким образом, из (7.6) следует, что

$$C^* \leq C, \quad (7.7)$$

где C истинная жесткость.

С другой стороны, при применении принципа возможных перемещений Лагранжа, когда предварительно даются упругие перемещения, в том или ином частном виде (например, как это сделано у Н. В. Зволинского [4]) налагаются связи на вариации перемещений, что делает систему более жесткой. Следовательно, при приближенном решении задачи о стесненном кручении с применением вариационного принципа Лагранжа, жесткость стержня при кручении получится больше истинной, т. е.

$$C^{**} > C, \quad (7.8)$$

где C^{**} приближенное значение жесткости при кручении, полученное при применении принципа Лагранжа.

Таким образом, используя (7.7) и (7.8), можем дать двухстороннюю оценку жесткости при стесненном кручении

$$C^* \leq C \leq C^{**}. \quad (7.9)$$

Приведем один численный пример для стержня с эллиптическим поперечным сечением.

$$\text{Пусть } \frac{a}{b} = 10, \quad \frac{l}{a} = 3, \quad \nu = \frac{1}{3}.$$

Вычисляя жесткость по формуле (7.6), получим

$$C^* = 0.00318 Ga^4. \quad (7.10)$$

По Зволинскому [4] будем иметь

$$C^{**} = 0.00358 Ga^4. \quad (7.11)$$

Таким образом, можем написать

$$0.00318 Ga^4 \leq C \leq 0.00358 Ga^4. \quad (7.12)$$

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 IV 1959

Գ. Պ. Գյումրյան

ՀՈԾ ՊՐԻՋՄԱՅԱԶԵԿ ԶՈՂԵՐԻ ԿԱՇԿԱՆԴՎԱԾ ՈԼՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ արվում է հոծ պրիզմայաձև ձողի կաշկանդված ոլորման խնդրի լուծման մեթոդ, երբ ձողի մեկ կամ երկու հիմքերում կան դիաֆրագմաներ, որոնք թույլ չեն տալիս աղ կտրվածքների դեպլանացիա և աղճատում:

Ենթադրվում է, որ ձողի լայնական կտրվածքում նորմալ լարումների բաշխման օրենքը նման է ձողի ազատ ոլորման դեպլանացիայի օրենքին:

Դիտարկվում են ամբողջական կաշկանդված ոլորումը, որոնց լայնական կտրվածքներն ունեն համաչափության երկու առանցքներ:

Խնդրի լուծումը արվում է Կաստիրիանոյի վարիացիոն հավասարման օգտագործմամբ:

Աշխատության մեջ լուծված են ուղղանկյուն և էլիպսաձև կտրվածքներով պրիզմայաձև ձողերի կաշկանդված ոլորման խնդիրները:

Այդ դեպքերի համար հաշվված են նորմալ և շոշափող լարումները:

Աշխատության փերջում արված է կաշկանդված ոլորման դեպքում, ձողի կոշտության երկրորդանի գնահատական:

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожеевникова М. К., Новожилов В. В. Приближенная теория стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля, учитывающая искривления поперечных сечений. Известия АН СССР, серия ОТН, № 9, 1956, 72—83.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
3. Фенпелъ А. и Фенпелъ Л. Сила и деформация. т. II, ОНТИ, М.—Л., 1936.
4. Зволлинский Н. В. Приближенное решение задачи кручения упругого цилиндрического бруса с одним неизменяемым сечением. Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1939.
5. Непребко В. П. Стесненное кручение упругого параллелепипеда. Вестник Московского университета, № 6, 1956, 11—25.
6. Новинский Ю. Некоторые вопросы неравномерного кручения призматических стержней, решенные в напряжениях. Бюл. Польской АН, отд. 4, № 3, 1956, 149—154.
7. Рейснер Э. О неоднородном кручении цилиндрических стержней. Сб. пер. Механика, № 5, 1953.