

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

К расчету трехслойной ортотропной оболочки

1. Рассмотрим тонкую трехслойную оболочку, составленную из однородных ортотропных слоев. Пусть в каждой точке каждого слоя одна из плоскостей упругой симметрии параллельна внешним параллельным поверхностям оболочки, а остальные две — перпендикулярны линиям главной кривизны координатной поверхности.

За координатную поверхность принимаем срединную поверхность среднего слоя. Пусть α и β являются криволинейными ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки.

Считаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $A(\alpha, \beta)$ и $B(\alpha, \beta)$, а также главные кривизны координатной поверхности $k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2(\alpha, \beta)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные [1, 2].

Предположим также, что слои после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Здесь, следуя [1], в основу кладутся следующие предположения:

а) в каждом слое нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины,

б) при определении деформаций* $e_{\alpha\alpha}^i$ и $e_{\beta\beta}^i$ пренебрегаем напряжением σ_γ^i по сравнению с σ_α^i и σ_β^i ,

в) при определении деформаций $e_{\alpha\gamma}^i$ и $e_{\beta\gamma}^i$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}^i$ и $\tau_{\beta\gamma}^i$ не отличаются от соответствующих напряжений, найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом.

Касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}^i$ и $\tau_{\beta\gamma}^i$, в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, могут быть получены аналогично работам [1, 3] и имеют вид:

$$\tau_{\alpha\gamma}^0 = -(\gamma + \delta_0) E_1^0 + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) E_3^0 - E_5,$$

$$\tau_{\beta\gamma}^0 = -(\gamma + \delta_0) E_2^0 + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) E_4^0 - E_6.$$

* В дальнейшем индекс сверху показывает номер слоя, причем 0, I, II относятся соответственно к среднему, нижнему и верхнему слоям.

$$\tau'_{xy} = -(\delta_1 + \gamma) E'_1 - \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \gamma^2) E'_3, \quad (1.1)$$

$$\tau'_{yz} = -(\delta_1 + \gamma) E'_2 - \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \gamma^2) E'_3,$$

$$\tau''_{xy} = (\delta_2 - \gamma) E''_1 - \frac{1}{2} (\delta_2^2 - \gamma^2) E''_3,$$

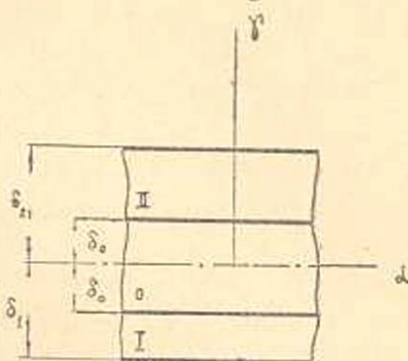
$$\tau''_{yz} = (\delta_2 - \gamma) E''_2 - \frac{1}{2} (\delta_2^2 - \gamma^2) E''_4,$$

где

$$\begin{aligned} E_1^i &= \left(B_{11}^i \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{66}^i \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u_0 + (B_{12}^i + B_{66}^i) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ &+ (k_1 B_{11}^i + k_2 B_{12}^i) \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha}, \\ E_2^i &= (B_{12}^i + B_{66}^i) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(B_{66}^i \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22}^i \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v_0 + \\ &+ (k_1 B_{12}^i + k_2 B_{22}^i) \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$E_3^i = \left[B_{11}^i \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] w_0,$$

$$E_4^i = \left[(B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + B_{22}^i \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w_0,$$



Фиг. 1.

$$E_5 = (\delta_1 - \delta_0) E'_1 + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_0^2) E'_3,$$

$$E_6 = (\delta_1 - \delta_0) E'_2 + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_0^2) E'_3,$$

$2\delta_0$, $\delta_1 - \delta_0$, $\delta_2 - \delta_0$ — толщины соответственно среднего, нижнего и верхнего слоев (рис. 1).

B_{jk}^i — известные коэффициенты упругости i -го слоя [1, 4]. u_0 , v_0 , w_0 — перемещения точек координатной поверхности оболочки соответ-

ственно по осям α , β и γ , в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом.

Напряжения (1.1), как нетрудно заметить, удовлетворяют следующим условиям:

- 1) при $\gamma = -\delta_1$ $\tau'_{\alpha\gamma} = \tau'_{\beta\gamma} = 0$,
- 2) при $\gamma = \delta_2$ $\tau'_{\alpha\gamma} = \tau'_{\beta\gamma} = 0$,
- 3) при $\gamma = -\delta_0$ $\tau^0_{\alpha\gamma} = \tau'_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma} = \tau'_{\beta\gamma}$,
- 4) при $\gamma = \delta_0$ $\tau^0_{\alpha\gamma} = \tau''_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma} = \tau''_{\beta\gamma}$.

Удовлетворение первых трех условий очевидно. Что же касается четвертого условия, то в его справедливости можно убедиться, учитывая третье условие и первые два уравнения равновесия в перемещениях, выведенные при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Здесь мы не приводим эти уравнения, но их можно получить из системы уравнений (2.13), если в последних все величины со звездочками принять равными нулю и вместо u, v, w написать соответственно u_0, v_0, w_0 .

2. Обобщенный закон Гука для i -го слоя с учетом второй гипотезы принимает вид [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^i &= B_{11}^i e_{\alpha\alpha}^i + B_{12}^i e_{\beta\beta}^i, \\ \sigma_{\beta}^i &= B_{12}^i e_{\alpha\alpha}^i + B_{22}^i e_{\beta\beta}^i,\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}^i &= B_{66}^i e_{\alpha\beta}^i, \\ \tau_{\alpha\gamma}^i &= B_{55}^i e_{\alpha\gamma}^i, \\ \tau_{\beta\gamma}^i &= B_{44}^i e_{\beta\gamma}^i.\end{aligned}\quad (2.2)$$

В силу первой гипотезы имеем $e_{\gamma\gamma}^i = \frac{du_{\gamma}^i}{d\gamma} = 0$, откуда

$$u_{\gamma}^i = w(\alpha, \beta). \quad (2.3)$$

Значит, если в точке (α, β) координатной поверхности провести нормаль, то перемещения по нормали всех точек, находящихся на этой нормали, равны нормальному перемещению точки (α, β) координатной поверхности.

Учитывая (2.3), для компонентов деформаций получаем:

$$\begin{aligned}e_{\alpha\alpha}^i &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \alpha} + k_1 w, \\ e_{\beta\beta}^i &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \beta} + k_2 w,\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}e_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \alpha}, \\ e_{\alpha\gamma}^i &= \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \gamma} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ e_{\beta\gamma}^i &= \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \gamma} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

В силу третьей гипотезы в (2.2) заменяя значения напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^l$ и $\tau_{\beta\gamma}^l$ их выражениями, данными в (1.1), подставив полученные значения $e_{\alpha\gamma}^l$ и $e_{\beta\gamma}^l$ в (2.5) и интегрируя по γ , для компонентов перемещений получим:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^0 &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left(\frac{\gamma^2}{2} + \delta_0 \gamma \right) E_1^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^3}{3} - \delta_0^2 \gamma \right) E_3^0 + \gamma E_5^0 \right\}, \\ u_{\beta}^0 &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left(\frac{\gamma^2}{2} + \delta_0 \gamma \right) E_2^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^3}{3} - \delta_0^2 \gamma \right) E_4^0 + \gamma E_6^0 \right\}, \\ u_{\alpha}^* &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{B_{55}^0} E_7 - \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left[\delta_1 (\gamma + \delta_0) + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_1^* + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta_1^2}{2} (\gamma + \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 + \delta_0^3) \right] E_3^* \right\}, \\ u_{\beta}^* &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{B_{44}^0} E_8 - \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left[\delta_1 (\gamma + \delta_0) + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_2^* + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta_1^2}{2} (\gamma + \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 + \delta_0^3) \right] E_4^* \right\}, \\ u_{\alpha}^* &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B_{55}^0} (\delta_2^2 E_1^0 + E_7) + \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left[\delta_2 (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_1^* - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\delta_2^2}{2} (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 - \delta_0^3) \right] E_3^* \right\}, \\ u_{\beta}^* &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{B_{44}^0} (\delta_2^2 E_2^0 + E_8) + \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left[\delta_2 (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_2^* - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\delta_2^2}{2} (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 - \delta_0^3) \right] E_4^* \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$E_7 = \frac{\delta_0^2}{2} E_1^0 + \frac{\delta_0^3}{3} E_3^0 + \delta_0 E_5^0,$$

$$E_8 = \frac{\delta_0^2}{2} E_2^0 + \frac{\delta_0^3}{3} E_4^0 + \delta_0 E_6^0.$$

u, v — тангенциальные перемещения точек координатной поверхности.

При определении компонентов перемещений (2.6) учитывалось, что они удовлетворяют следующим условиям: при $\gamma = -\delta_0$ $u_{\alpha}^0 = u_{\alpha}$, $u_{\beta}^0 = u_{\beta}$, при $\gamma = \delta_0$ $u_{\alpha}^0 = u_{\alpha}$, $u_{\beta}^0 = u_{\beta}$, при $\gamma = 0$ $u_{\alpha}^0 = u$, $u_{\beta}^0 = v$.

Учитывая (2.6), (2.4) и (2.1), для внутренних сил (T_1, T_2, S) и моментов (M_1, M_2, H), которые определяются обычным способом [5, 6], получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
T_1 &= C_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) w - \\
&\quad - \left(K_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + T_1^*, \\
T_2 &= C_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) w - \\
&\quad - \left(K_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + T_2^*,
\end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
S &= C_{66} \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + C_{66} \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - 2K_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + S^*, \\
M_1 &= K_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) w - \\
&\quad - \left(D_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + M_1^*, \\
M_2 &= K_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 K_{12} + k_2 K_{22}) w - \\
&\quad - \left(D_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + M_2^*,
\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$H = K_{66} \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + K_{66} \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - 2D_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + H^*,$$

где

$$\begin{aligned}
C_{ik} &= 2\hat{\epsilon}_0 B_{ik}^0 + (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_0) B_{ik}^1 + (\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_0) B_{ik}^2, \\
K_{ik} &= \frac{1}{2} [(\hat{\epsilon}_2^2 - \hat{\epsilon}_0^2) B_{ik}^1 - (\hat{\epsilon}_1^2 - \hat{\epsilon}_0^2) B_{ik}^2],
\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3} [2\hat{\epsilon}_0^3 B_{ik}^0 + (\hat{\epsilon}_1^3 - \hat{\epsilon}_0^3) B_{ik}^1 + (\hat{\epsilon}_2^3 - \hat{\epsilon}_0^3) B_{ik}^2],$$

$$\begin{aligned}
T_1^* &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\hat{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}^0} E_1^0 + (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_0) \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} E_1^1 - (\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_0) \frac{B_{11}^2}{B_{55}^0} (\hat{\epsilon}_0^2 E_1^0 + E_1^2) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} \left(E_1^1 + \frac{5\hat{\epsilon}_1 + 3\hat{\epsilon}_0}{8} E_3^1 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{3} (\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{11}^2}{B_{55}^0} \left(E_1^2 - \frac{5\hat{\epsilon}_2 + 3\hat{\epsilon}_0}{8} E_3^2 \right) \Big\} + \\
&\quad + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\hat{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}^0} E_2^0 + (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^1}{B_{44}^0} E_2^1 - (\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^2}{B_{44}^0} (\hat{\epsilon}_0^2 E_2^0 + E_2^2) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} (\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^1}{B_{44}^0} \left(E_2^1 + \frac{5\hat{\epsilon}_1 + 3\hat{\epsilon}_0}{8} E_4^1 \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{44}} \left(E_2 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right),$$

$$T_2^* = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}} E_1^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^*}{B_{55}} E_1 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_1^0 + E_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{55}} \left(E_1 + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{55}} \left(E_1 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3 \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}} E_2^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{22}^*}{B_{44}} E_2 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{22}^*}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_2^0 + E_3) + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{22}^*}{B_{44}} \left(E_2 + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{22}^*}{B_{44}} \left(E_2 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right) \left. \right\}, \quad (2.10)$$

$$S^* = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}} E_1^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{55}} E_1 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_1^0 + E_2) + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{55}} \left(E_1 + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3 \right) + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{55}} \left(E_1 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3 \right) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}} E_2^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{44}} E_2 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_2^0 + E_3) + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{44}} \left(E_2 + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{44}} \left(E_2 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right) \left. \right\},$$

$$M_1^* = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{2\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0 E_1^0 + \frac{2\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3^0 + E_3) - \right.$$

$$- \frac{\bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} E_1 - \frac{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3}{12} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} \left(\frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{2} E_1 + \frac{8\bar{\epsilon}_1^2 + 9\bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_0 + 3\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3 \right) -$$

$$- \frac{\bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0 E_1^0 + E_1) +$$

$$+ \frac{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3}{12} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} \left(\frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{2} E_1 - \frac{8\bar{\epsilon}_2^2 + 9\bar{\epsilon}_2 \bar{\epsilon}_0 + 3\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3 \right) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0 E_2^0 + \frac{2\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_4^0 + E_4) - \frac{\bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{12}^*}{B_{44}} E_2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} (\delta_0^2 E_2^0 + E_8) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right), \\
M_2^* = & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}^0} (\delta_0 E_1^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_3^0 + E_5) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} E_7 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_1' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} (\delta_0^2 E_1^0 + E_7) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_1' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) \Big\} + \\
& + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}^0} (\delta_0 E_2^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + E_8) - \right. \\
& - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} E_8 - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} (\delta_0^2 E_2^0 + E_8) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) \Big\}, \quad (2.11) \\
H^* = & \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}^0} (\delta_0 E_1^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_3^0 + E_5) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} E_7 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_1' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} (\delta_0^2 E_1^0 + E_7) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_1' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) \Big\} + \\
& + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} (\delta_0 E_2^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + E_8) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{44}^0} E_8 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{44}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}}{B_{44}} (\delta_0^2 E_2^* + E_3) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^2}{12} \frac{B_{66}}{B_{44}} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2^* - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3^* \right) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Внутренние силы (2.7) и моменты (2.8) в случае, когда оболочка нагружена лишь нормально приложенной нагрузкой, должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0, \\
\frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} &= 0,
\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 - \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} \right) + q = 0.$$

Подставляя значения сил и моментов из (2.7) и (2.8) в (2.12), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно перемещений u , v и w :

$$\begin{aligned}
& \left(C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \\
& + (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \left[K_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] w = \\
& = - \frac{1}{A} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial S^*}{\partial \beta}, \\
& (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \left(C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \\
& + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + K_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w = \\
& = - \frac{1}{A} \frac{\partial S^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial T_2^*}{\partial \beta}, \\
& (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} - \left[K_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] u + \\
& + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + K_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] v + \\
& + \left\{ k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22} \right\} - \\
& - 2 \left[(k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k_1 K_{12} + k_2 K_{22}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] + \\
& + \left[D_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] w =
\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$= -q - (\kappa_1 T_1^* + \kappa_2 T_2^*) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H^*}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}.$$

Здесь очевидно, что граничные условия задачи ничем не отличаются от обычных граничных условий.

Впервые аналогичная теория для двухслойных анизотропных оболочек была построена в работе [1].

Рассмотрим частные случаи.

3. Прямоугольная шарнирно-опертая по контуру пластинка, слою которой симметрично расположены относительно координатной поверхности, несет нагрузку, распределенную по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi \alpha}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}. \quad (3.1)$$

Оси координат выбраны так, что $A = B = 1$.

Как показывают наши исследования, в общем случае трехслойной пластинки, когда слой расположены несимметрично относительно координатной поверхности, перемещения координатной поверхности представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 (1 + \lambda_1), \\ v &= v_0 (1 + \lambda_2), \\ w &= w_0 (1 + \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.2)$$

но значения λ_i здесь не приводим ввиду их чрезвычайной громоздкости.

Для рассматриваемой пластинки имеем:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 = \delta, \\ B_{ik}^* &= B_{ik}^0 = B_{ik}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В силу (3.3) выражения для жесткостей (2.9) принимают вид:

$$\begin{aligned} K_{ik} &= 0, \\ C_{ik} &= 2 [\delta_0 B_{ik}^0 + (\delta - \delta_0) B_{ik}], \\ D_{ik} &= \frac{2}{3} [\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для решения этой задачи надо полагать [3.4]:

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (3.5)$$

В рассматриваемом случае на основании (3.5) и (3.2) имеем:

$$u = v = 0. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.5) и (3.6), из (2.10) получаем

$$T_1^* = T_2^* = S^* = 0. \quad (3.7)$$

При этом первые два уравнения системы (2.13) будут удовлетворяться тождественно, а последнее уравнение примет вид:

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] w =$$

$$= -q + \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}, \quad (3.8)$$

где

$$M_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{44}} E_4 \Big\},$$

$$M_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{22}}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{22}}{B_{44}} E_4 \Big\}, \quad (3.9)$$

$$H^* = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{66}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{66}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right. \\
& - \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4^0 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \\
& \left. - \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} E_4 \right\}, \\
& E_3^i = \left[B_{11}^i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] w_0, \\
& E_4^i = \left[(B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + B_{22}^i \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w_0.
\end{aligned}$$

При (3.1) решение задачи трехслойной симметрично собранной, опертой по контуру прямоугольной пластинки, в случае принятия гипотезы недеформируемых нормалей, представляется в виде [4]:

$$w_0 = \bar{w}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{w}_0 = \frac{q_0}{\pi^4 \left[\frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right]}. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом, решение уравнения (3.8) ищем в форме:

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \quad (3.12)$$

что удовлетворяет условиям свободного опирания по контуру.

Подставляя (3.9), (3.10), (3.12) в (3.8) и учитывая (3.11), для прогиба w получаем:

$$\begin{aligned}
w = \bar{w}_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{D_{np}} \left[\frac{4\delta_0^5}{15} \left(\frac{d_{01}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{02}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) + \right. \right. \\
+ \frac{2\delta_0^3}{3} (\delta^2 - \delta_0^2) \left(\frac{d_{01} d_{11}}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{02} d_{12}}{b^2 B_{44}^0} \right) + \frac{1}{2} \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2)^2 \left(\frac{d_{11}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{12}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) + \\
\left. \left. + \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \left(\frac{d_{11}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{12}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) \right] \right\}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{01} &= \frac{B_{11}^0}{a^2} + \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{b^2}, & d_{11} &= \frac{B_{11}^0}{a^2} + \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{b^2}, \\
d_{02} &= \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{a^2} + \frac{B_{22}^0}{b^2}, & d_{12} &= \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{a^2} + \frac{B_{22}^0}{b^2},
\end{aligned} \quad (3.14)$$

$$D_{np} = \frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4}.$$

Как видно из (3.13), первый член формулы представляет собой прогиб пластинки, найденный по классической теории слоистых пластинок [4.7], а остальные члены — поправку к нему.

Численный пример. Рассмотрим квадратную ($b=a$) пластинку, составленную из трансверсально-изотропных слоев, плоскости изотропии которых параллельны координатной поверхности пластинки. При этом для коэффициентов упругости B'_{ij} имеем [1.4]: для крайних слоев

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad B_{12} = \frac{\mu E}{1 - \mu^2},$$

$$B_{33} = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad B_{44} = B_{55} = G,$$

для среднего слоя

$$B_{11}^0 = B_{22}^0 = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2}, \quad B_{12}^0 = \frac{\mu_0 E_0}{1 - \mu_0^2},$$

$$B_{33}^0 = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)}, \quad B_{44}^0 = B_{55}^0 = G_0,$$

где E , μ и E_0 , μ_0 — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно крайних и среднего слоев,

G , G_0 — модули сдвига соответственно крайних и среднего слоев, характеризующие искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней.

Для простоты расчета принимаем также $\mu = \mu_0 = 0$, $\frac{E}{G} = \frac{E_0}{G_0} = k$

и $\delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2}$. Тогда из (3.13) для прогиба пластинки получим:

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{160} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot k \cdot \frac{8 + 113n + 135n^2}{1 + 7n} \right\},$$

где $n = \frac{E}{E_0}$, h — толщина пластинки.

В таблице 1 даются значения отношения $\frac{w}{w_0}$ при $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$, для различных значений n и k .

Таблица 1

$n \backslash k$	2	5	10
1	1.0395	1.0987	1.1974
2	1.0637	1.1591	1.3183
5	1.1353	1.3382	1.6765
10	1.2544	1.6359	2.2718
20	1.4214	2.0535	3.1070
0,5	1.0269	1.0673	1.1347
0,2	1.0185	1.0463	1.0925
0,1	1.0150	1.0375	1.0749
0,05	1.0128	1.0320	1.0639

В этой таблице столбец $k=2$ относится к случаю, когда все слои пластинки состоят из изотропных материалов.

4. Осесимметрично нагруженная круговая цилиндрическая оболочка длиной l свободно опирается по торцам и несет распределенную нагрузку q , которая по поверхности оболочки изменяется по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4.1)$$

При этом очевидно, что все величины не зависят от координаты β .

В рассматриваемом случае имеем:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}, \quad v = v_0 = 0, \quad (4.2)$$

$$S = S^* = H = H^* = 0.$$

В силу (4.2) система (2.13) принимает вид:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{C_{12}}{R} \frac{d}{dx} - K_{11} \frac{d^3}{dx^3} \right) w &= - \frac{dT_1^*}{dx}, \\ \left(\frac{C_{12}}{R} \frac{d}{dx} - K_{11} \frac{d^3}{dx^3} \right) u + \left(\frac{C_{22}}{R^2} - \frac{2K_{12}}{R} \frac{d^2}{dx^2} + D_{11} \frac{d^4}{dx^4} \right) w &= \\ &= -q - \frac{T_2^*}{R} + \frac{d^2 M_1^*}{dx^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} T_1^* &= a_1 \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \left(b_1 \frac{d^2}{dx^2} + b_2 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ \frac{T_2^*}{R} &= a_2 \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \left(b_3 \frac{d^2}{dx^2} + b_4 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ M_1^* &= -a_3 \frac{d^3 u_0}{dx^3} - \left(b_5 \frac{d^2}{dx^2} + b_6 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ a_1 &= - \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{6B_{55}^0} [2\delta_0 B_{11}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^2}{3B_{55}^0} + \\ &+ (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^2}{3B_{55}^0}, \\ b_1 &= - \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{6RB_{55}^0} [2\delta_0 B_{11}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}^1}{RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^1 B_{12}^1}{3RB_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^1 B_{12}^1}{3RB_{55}^0}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{3B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{2B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0}, \\
a_2 = & - \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{6RB_{55}^0} [2\delta_0 B_{12}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}'}{RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11} B_{12}'}{3RB_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11} B_{12}'}{2RB_{55}^0}, \\
b_3 = & - \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{6R^2 B_{55}^0} [2\delta_0 B_{12}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}'}{R^2 B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{12}^{'2}}{3R^2 B_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{12}^{'2}}{3R^2 B_{55}^0}, \\
b_4 = & \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{3RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{2RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0}, \quad (4.5) \\
a_3 = & \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{12B_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 9(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}'}{6B_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0}, \\
b_5 = & \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{12RB_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 9(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}'}{6RB_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0},
\end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{30 B_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 5(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 5(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] +$$

$$+ \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{12 B_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] +$$

$$+ (\delta_1 - \delta_0)^3 (8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}'}{60 B_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 (8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}'}{60 B_{55}^0}.$$

При (4.1) решение поставленной задачи, с учетом гипотезы недеформируемых нормалей, представляется в виде:

$$w_0 = \bar{w}_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_0 = \bar{u}_0 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4.6)$$

где

$$\bar{w}_0 = \frac{a_{11} q_0}{\Delta}, \quad \bar{u}_0 = \frac{a_{12} q_0}{\Delta},$$

$$a_{11} = \frac{\pi^2}{l^2} C_{11}, \quad a_{12} = \frac{\pi}{l} \left(\frac{C_{12}}{R} + \frac{\pi^2}{l^2} K_{11} \right), \quad (4.7)$$

$$a_{22} = \frac{C_{22}}{R^2} + \frac{2\pi^2 K_{12}}{R l^2} + \frac{\pi^4}{l^4} D_{11}, \quad \Delta = - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

Аналогичным образом, решения системы (4.3) ищем в форме:

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u = \bar{u} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4.8)$$

что удовлетворяет условиям свободного опирания по торцам.

Подставляя (4.4), (4.6), (4.8) в (4.3) и учитывая (4.7), для перемещений получаем:

$$u = u_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta a_{12}} \left[a_{12} (A_2 a_{12} - A_1 a_{22}) + a_{11} (B_1 a_{22} - B_2 a_{12}) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta a_{11}} \left[a_{12} (A_2 a_{11} - A_1 a_{12}) + a_{11} (B_1 a_{12} - B_2 a_{11}) \right] \right\}, \quad (4.10)$$

где

$$A_1 = \frac{\pi^4}{l^4} a_1, \quad A_2 = \frac{\pi^3}{l^3} \left(a_2 - \frac{\pi^2}{l^2} a_3 \right),$$

$$B_1 = \frac{\pi^3}{l^3} \left(b_1 - \frac{\pi^2}{l^2} b_2 \right), \quad B_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \left[b_3 - \frac{\pi^2}{l^2} (b_4 + b_5) + \frac{\pi^4}{l^4} b_6 \right].$$

Если слои симметрично расположены относительно координатной поверхности, то $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $B_{ik}' = B_{ik}'' = B_{ik}$ и, следовательно,

$$K_{ik} = 0,$$

$$C_{ik} = 2 [\delta_0 B_{ik}^0 + (\delta - \delta_0) B_{ik}],$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik} \right].$$

При этом выражения для перемещений (4.9) и (4.10) примут вид:

$$u = u_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\pi^4}{l^4} b_7 + b_8 \right) + b_9 \right] \right\}, \quad (4.11)$$

$$\omega = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\pi^4}{l^4} b_7 + b_8 \right) \right\}, \quad (4.12)$$

где

$$u_0 = - \frac{q_0}{\Delta_1} \frac{l}{\pi R} \frac{C_{12}}{C_{11}} \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$\omega_0 = - \frac{q_0}{\Delta_1} \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\Delta_1 = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{R^2 C_{11}} + \frac{\pi^4}{l^4} D_{11},$$

$$b_7 = \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \left[\frac{4\delta_0^4}{15} (B_{11}^0)^2 + \frac{2}{3} \delta_0^2 (\delta^2 - \delta_0^2) B_{11}^0 B_{11} + \frac{1}{2} (\delta^2 - \delta_0^2)^2 B_{11}^0 \right] +$$

$$+ (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}^2}{30 B_{55}},$$

$$b_8 = \frac{8\delta_0^2 (\delta - \delta_0)^2}{3 R^2 C_{11}^2} (B_{11}^0 B_{12} - B_{11} B_{12}^0)^2 \left(\frac{\delta - \delta_0}{B_{55}} + \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \right),$$

$$b_9 = \frac{2\delta_0 (\delta - \delta_0)}{C_{11} C_{12}} (B_{11} B_{12}^0 - B_{11}^0 B_{12}) \left\{ \frac{2}{3} (\delta - \delta_0)^2 \frac{B_{11}}{B_{55}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \left[\frac{\delta_0}{3} B_{11}^0 + (\delta - \delta_0) B_{11} \right] \right\}.$$

Численный пример. Для простоты расчета рассмотрим случай, когда слои симметрично расположены относительно координатной поверхности оболочки и изготовлены из трансверсально-изотропных материалов, плоскости изотропии которых в каждой точке каждого слоя параллельны срединной поверхности оболочки. Кроме того, как и в п. 3, принимаем $\mu = \mu_0 = 0$, $\frac{E_0}{G_0} = \frac{E}{G} = k$, $\delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2}$.

В силу этого из (4.11) и (4.12) получим:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\pi^2}{320} \frac{h^2}{l^2} \frac{k(8 + 113n + 135n^2)}{1 + 7n + \frac{48}{\pi^4} \frac{l^4}{R^2 h^2} (1 + n)},$$

где h — полная толщина оболочки, $n = \frac{E}{E_0}$.

В таблице 2 даны значения $\frac{w}{w_0}$ или $\left(\frac{u}{u_0}\right)$ при $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$, $\frac{l}{R} = 1$ для различных значений n и k .

Таблица 2

$n \backslash k$	2	5	10
1	1,0015	1,0037	1,0074
2	1,0029	1,0073	1,0147
10	1,0147	1,0368	1,0735
0.5	1,0008	1,0019	1,0039

5. Из рассмотренных численных примеров, результаты которых приведены в таблицах 1 и 2, замечаем, что при увеличении $n = \frac{E}{E_0}$ прогиб w начинает больше отличаться от w_0 и эта разница тем больше, чем больше k . При уменьшении n , даже при больших значениях k , w мало отличается от w_0 . Это значит, что если материал среднего слоя жестче материала крайних слоев, то классическая теория слоистых пластин и оболочек, основанная на гипотезе Кирхгоффа-Лява, даст достаточно хорошие результаты. А когда материал среднего слоя существенно слабее материала крайних слоев, как видно из вышеприведенных примеров, необходимо считаться с поправками к классической теории.

Но надо отметить, что эти замечания в основном относятся к пластинкам. В случае же осесимметричной цилиндрической оболочки (п. 4) эта поправка незначительна, и это естественно, так как в этом случае главную роль играет безмоментная часть напряжений [8], чем и объясняется незначительность поправки, даже при больших значениях n и k .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР.

Поступила 28 V 1959

Ս. Ս. Խաչատրյան

ԵՌԱՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորիզոնական դիտարկվում են եռաշերտ օրթոտրոպ փաթր կորույթուն աճեցող թաղանթներ:

Առաջարկվող տեսության հիմքում ընկած են անիզոտրոպ թաղանթների համար Ս. Ս. Համբարձումյանի կողմից արված հետևյալ ընդունելությունները.

1. Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ զծային էլիմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները,

2. ε_{γ} նորմալ լարումները էական ազդեցություն են ունենում ε_{xx} , ε_{yy} և ε_{xy} զեֆորմացիաների վրա,

3. $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ և $\varepsilon_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ոչնչով չեն տարբերվում Կիրխոֆի հիպոթեզի ընդունման ժամանակ ստացված համապատասխան շոշափող լարումներից:

Ընդունված ենթադրությունների հիման վրա շարադրված է օրթոտրոպ եռաշերտ փոքր կորություն ունեցող թաղանթների ընդհանուր տեսությունը՝ Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝

ա) եզրերով ազատ հենված ուղղանկյան սալի ծուռքը, երբ շերտերը սիմետրիկ են դասավորված միջին մակերևույթի նկատմամբ,

բ) առանցքասիմետրիկ բևեռավորված, միջին մակերևույթի նկատմամբ ոչ սիմետրիկ շերտերով կլոր զլանալին թաղանթը, որից օրպես մասնավոր դեպք ստացված է հաս սիմետրիկ դասավորված շերտերի դեպքը: Արդյունքները համեմատված են կլասիկ տեսությամբ ստացվող համապատասխան արդյունքների հետ և ցույց է տրվում, որ դրանք բավականաչափ տարբերվում են իրարից և այդ տարբերությունը մեծ է հատկապես սալերի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, X, 2, 1957.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, VIII, 5, 1948.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
6. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. ДАН АрмССР, XI, 2, 1949.
7. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, VI, 3, 1953.
8. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, XII, 1, 1959.