ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 5, 1959 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян

О построении некоторых специальных биортогональных систем

Как было установлено в работах [1, 2, 3], интегральное преобразование с обычным ядром Фурье на полуоси $(0, +\infty)$ имеет не одну, а континуальное множество формул обращения, зависящих от непрерывного параметра $\rho \geqslant \frac{1}{2}$. Эти обращения осуществлялись посредством специальных ядер, образованных при помощи целых функций типа Миттаг-Лефлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad \left(\rho \geqslant \frac{1}{2},\ \mu > 0\right).$$

Одновременно были установлены также результаты обратного характера, — что интегральные преобразования посредством ядер, образованных при помощи функции $E_\rho(z;\mu)$, $\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$, могут быть обращены обычным преобразованием Фурье. При специальном подборе значений параметров ρ и μ из указанных результатов, в частности, следовали, например, известные теоремы Планшереля о преобразованиях Фурье в классе функций $L_2(0, +\infty)$ или $L_2(-\infty, +\infty)$*.

В п 1° данной статьи излагается общий способ построения биортогональных систем целых функций на конечном отрезке. Затем в п 2° этот способ конкретно осуществляется на примере функций, образованных из линейных комбинаций функций вида $E_\rho(z;\mu)$. При этом для построения биортогональной системы нам понадобилось исследовать существование счетного числа A_0-точек, характер и асимптотику их распределения у специальной целой функции $\omega(z, \rho)$, образованной из функций вида $E_\rho(z;\mu)$.

Построенные нами биортогональные системы и разложения по этим системам тесно связаны с вопросами краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, что будет предметом наших последующих сообщений.

---

* В [4] в этом направлении были получены новые результаты, по существу соответствующие случаю, когда $\rho = \infty$.

1° *Построение биортогональных систем функций на конечном отрезке.* В этом пункте приводится один общий результат о построении биортогональных систем целых функций на конечном отрезке, на что мы будем существенно опираться как в данной статье, так и в некоторых наших последующих сообщениях.

Положим, что $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ — целые функции по λ, которые совместно со всеми своими частными производными по λ принадлежат классу $L_1(0, l)$ по переменной x при любом λ. Кроме того положим, что классу $L_1(0, l)$ принадлежат также все функции вида

$$\frac{\partial^r y(x, \lambda)}{\partial \lambda^r} \cdot \frac{\partial^s z(x, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*s}} \quad (r, s = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

при любых λ и λ^*. Предположим далее, что $\Omega(\lambda)$ также целая функция, связанная с функциями $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ интегральным соотношением

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda^*)\, dx = \frac{\Omega(\lambda) - \Omega(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}, \tag{1.2}$$

справедливым при любых λ и λ^*.

Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1. *Пусть для данного (вообще говоря, комплексного) числа $A_0 \neq \infty$ λ_0 есть нуль кратности $p \geqslant 1$ целой функции $\Omega(\lambda) - A_0$. Обозначим*

$$b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\}_{\lambda = \lambda_0}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

тогда справедливы формулы

а)

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = \lambda_0} \left\{ \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m y(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^m} \sum_{k=0}^{p-m-1} \frac{b_{p-m-k-1}}{k!} \frac{\partial^k z(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^k}; \tag{1.4}$$

б) *Пусть λ_1 — нуль кратности $p_1 \geqslant 1$, а λ_2 — нуль кратности $p_2 \geqslant 1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ целой функции $\Omega(\lambda) - A_0$, тогда*

$$\int_0^l \frac{\partial^r y(x, \lambda_1)}{\partial \lambda_1^r} \frac{\partial^s z(x, \lambda_2)}{\partial \lambda_2^s} dx = \int_0^l \frac{\partial^s y(x, \lambda_2)}{\partial \lambda_2^s} \frac{\partial^r z(x, \lambda_1)}{\partial \lambda_1^r} = 0$$

при

$$r = 0, 1, \ldots, p_1 - 1, \quad s = 0, 1, \ldots, p_2 - 1. \tag{1.5}$$

Доказательство.

а) Имеем:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = \lambda_0} \left\{ \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} =$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\sum_{m=0}^{p-1}C_{p-1}^m\frac{\partial^m y(x,\lambda)}{\partial\lambda^m}\frac{\partial^{p-m-1}}{\partial\lambda^{p-m-1}}\left\{\frac{(\lambda-\lambda_0)^p z(t,\lambda)}{\Omega(\lambda)-A_0}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\sum_{m=0}^{p-1}C_{p-1}^m\frac{\partial^m y(x,\lambda)}{\partial\lambda^m}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{p-m-1}C_{p-m-1}^k\frac{\partial^k z(t,\lambda)}{\partial\lambda^k}\frac{\partial^{p-m-k-1}}{\partial\lambda^{p-m-k-1}}\left\{\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right\}, \qquad (1.6)$$

откуда в силу обозначения (1.3) следует формула (1.4).

Для доказательства формулы (1.5) заметим, что если λ и λ^* не являются нулями функции $\Omega(\lambda)-A_0$ и соответственно лежат в достаточно малых окрестностях точек λ_1 и λ_2, то из (1.1) и (1.2) следует

$$\int_0^l\frac{\partial^r y(x,\lambda)}{\partial\lambda^r}\frac{\partial^s z(x,\lambda^*)}{\partial\lambda^{*s}}dx=\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^{*s}}\left\{\frac{\Omega(\lambda)-\Omega(\lambda^*)}{\lambda-\lambda^*}\right\}=$$

$$=s!\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\left\{\frac{\Omega(\lambda)-A_0}{(\lambda-\lambda^*)^{s+1}}\right\}+r!\frac{\partial^s}{\partial\lambda^{*s}}\left\{\frac{\Omega(\lambda^*)-A_0}{(\lambda^*-\lambda)^{r+1}}\right\}, \qquad (1.7)$$

$$(r,s=0,1,2,\ldots).$$

Переходя к пределу в формуле (1.7), когда $\lambda\to\lambda_1$ и $\lambda^*\to\lambda_2$, получим первое из утверждений (1.5). Второе утверждение получится, если просто поменять местами λ_1 и λ_2. Лемма полностью доказана.

Предполагая, что функция $\Omega(\lambda)-A_0$ имеет счетное множество нулей $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$, пронумерованных в порядке $0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\cdots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\cdots$, перейдем к построению биортогональной системы, образованной из функций $y(x,\lambda)$ и $z(x,\lambda)$.

Пусть λ_n есть нуль порядка $p_n\geqslant 1$ целой функции $\Omega(\lambda)-A_0$. Отнесем нулю λ_n две системы функций

$$\frac{\partial^j y(x,\lambda_n)}{\partial\lambda_n^j}\quad(j=0,1,\ldots,p_n-1), \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=0}^{p_n-j-1}\frac{b_{p_n-j-k-1}}{k!\,j!}\frac{\partial^k z(x,\lambda_n)}{\partial\lambda_n^k}, \qquad (j=0,1,\ldots,p_n-1). \qquad (1.9)$$

Заметим, что если $p_n=1$, то в системах (1.8) и (1.9) содержится соответственно по одной функции

$$y(x,\lambda_n)\ \text{и}\ b_0 z(x,\lambda_n). \qquad (1.8')$$

Пусть, далее, $\{Y_\alpha(x)\}$ и $\{Z_\alpha(x)\}$ $(\alpha=1,2,\ldots)$ множество всех функций вида (1.8) и (1.9) соответственно, пронумерованных в порядке возрастания модулей чисел λ_n.

Теорема 1. *Системы функций* $\{Y_\alpha(x)\}$ *и* $\{Z_\alpha(x)\}$ *биортогональны на отрезке* $[0, l]$, *т. е.*

$$\int_0^l Y_\alpha(x)\, Z_\beta(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots). \tag{1.10}$$

Доказательство. По определению функций $Y_\alpha(x)$ и $Z_\alpha(x)$ существуют нули λ_{n_α} и λ_{n_β} функции $\Omega(\lambda) - A_0$ кратности соответственно $p_{n_\alpha} \geqslant 1$ и $p_{n_\beta} \geqslant 1$ и целые числа j_α $(0 \leqslant j_\alpha \leqslant p_{n_\alpha} - 1)$ и j_β $(0 \leqslant j_\beta \leqslant p_{n_\beta} - 1)$ такие, что

$$Y_\alpha(x) = \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_{n_\alpha})}{\partial \lambda_{n_\alpha}^{j_\alpha}}, \tag{1.11}$$

$$Z_\beta(x) = \sum_{k=0}^{p_{n_\beta} - j_\beta - 1} \frac{b_{p_{n_\beta} - j_\beta - k - 1}}{k!\, j_\beta!} \frac{\partial^k z(x, \lambda_{n_\beta})}{\partial \lambda_{n_\beta}^k}. \tag{1.12}$$

Тогда

а) если $\alpha \neq \beta$ и $\lambda_{n_\alpha} \neq \lambda_{n_\beta}$, то из (1.11) и (1.12), согласно формуле (1.5) леммы 1, имеем

$$\int_0^l Y_\alpha(x)\, Z_\beta(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p_{n_\beta} - j_\beta - 1} \frac{b_{p_{n_\beta} - j_\beta - k - 1}}{j_\beta!\; k!} \int_0^l \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_{n_\alpha})}{\partial \lambda_{n_\alpha}^{j_\alpha}} \frac{\partial^k z(x, \lambda_{n_\beta})}{\partial \lambda_{n_\beta}^k}\, dx = 0; \tag{1.13}$$

б) при $\lambda_{n_\alpha} = \lambda_{n_\beta} = \lambda_0$ $(p_{n_\alpha} = p_{n_\beta} = p)$ из (1.11) и (1.12), учитывая формулу (1.7), имеем

$$\int_0^l Y_\alpha(x)\, Z_\beta(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p - j_\beta - 1} \frac{b_{p - j_\beta - k - 1}}{k!\, j_\beta!} \int_0^l \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^{j_\alpha}} \frac{\partial^k z(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^k}\, dx =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda^* \to \lambda_0}} \sum_{k=0}^{p - j_\beta - 1} \frac{b_{p - j_\beta - k - 1}}{j_\beta!\; k!} \left\{ j_\alpha! \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\Omega(\lambda) - A_0}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha + 1}} \right) + \right.$$

$$\left. + k! \frac{d^{j_\alpha}}{d\lambda^{*j_\alpha}} \left(\frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{k+1}} \right) \right\}. \tag{1.14}$$

Предельный переход в (1.14) обоснован в силу условий, налагаемых на функции вида (1.1).

Из (1.14) и (1.3) получим

$$\int_0^l Y_\alpha(x)\, Z_\beta(x)\, dx =$$

$$=\lim_{\lambda,\lambda^*\to\lambda_0}\left\{\sum_{k=0}^{p-j_\beta-1}\frac{j_\alpha!\left[\dfrac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(p-j_\beta-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)!\,k!\,j_\beta!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\frac{\Omega(\lambda)-A_0}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{p-j_\beta-1}\frac{\left[\dfrac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(p-j_\alpha-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)!\,j_\beta!}\frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial\lambda^{*j_\alpha}}\frac{\Omega(\lambda^*)-A_0}{(\lambda^*-\lambda)^{k+1}}\right\}^* =$$

$$=\lim_{\lambda,\lambda^*\to\lambda_0}\left\{\frac{j_\alpha!}{j_\beta!\,(p-j_\beta-1)!}\sum_{k=0}^{p-j_\beta-1}C^k_{p-j_\beta-1}\left[\frac{\Omega(\lambda)-A_0}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}}\right]^{(k)}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(p-j_\beta-k-1)}+$$

$$\left.+\frac{1}{j_\beta!}\frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial\lambda^{*j_\alpha}}\left[(\Omega(\lambda^*)-A_0)\sum_{k=0}^{p-j_\beta-1}\frac{\left[\dfrac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(p-j_\beta-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)!}(\lambda^*-\lambda)^{-k-1}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\lambda,\lambda^*\to\lambda_0}\left\{\frac{j_\alpha!}{j_\beta!(p-j_\beta-1)!}\frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial\lambda^{p-j_\beta-1}}\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{j_\beta!}\frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial\lambda^{*j_\alpha}}\left[\frac{\Omega(\lambda^*)-A_0}{(\lambda^*-\lambda)^{p-j_\beta}}\sum_{k=0}^{p-j_\beta-1}\frac{\left[\dfrac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(k)}}{k!}(\lambda^*-\lambda)^k\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\lambda,\lambda^*\to\lambda_0}\left\{\frac{j_\alpha!}{j_\beta!(p-j_\beta-1)!}\frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial\lambda^{p-j_\beta-1}}\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}}+\right.$$

$$+\frac{1}{j_\beta!}\frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial\lambda^{*j_\alpha}}\left[\frac{\Omega(\lambda^*)-A_0}{(\lambda^*-\lambda)^{p-j_\beta}}\left(\frac{(\lambda^*-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda^*)-A_0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(\lambda^*-\lambda)^{p-j_\beta}\sum_{k=p-j_\beta}^{\infty}\frac{\left[\dfrac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda)-A_0}\right]^{(k)}}{k!}(\lambda^*-\lambda)^{k-p+j_\beta}\right)\right]\right\}=$$

---

* Здесь ради краткости введено обозначение $\dfrac{d^k}{d\lambda^k}F(\lambda)\equiv[F(\lambda)]^{(k)}$.

$$= \lim_{\lambda, \lambda^* \to \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p - j_\beta - 1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{*j_\alpha}} \frac{(\lambda^* - \lambda_0)^p}{(\lambda^* - \lambda)^{p-j_\beta}} +$$

$$\left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{*j_\alpha}} \left[(\Omega(\lambda^*) - A_0) \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} \left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(k)} \frac{(\lambda^* - \lambda)^{k-p+j_\beta}}{k!} \right] \right\}. \qquad (1.15)$$

Но

$$\lim_{\lambda, \lambda^* \to \lambda_0} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{*j_\alpha}} \left[(\Omega(\lambda^*) - A_0) \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} \left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(k)} \frac{(\lambda^* - \lambda)^{k-p+j_\beta}}{k!} \right] =$$

$$= \lim_{\lambda^* \to \lambda_0} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{*j_\alpha}} \left[(\lambda^* - \lambda_0)^p \frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda_0)^p} \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} b_k (\lambda^* - \lambda_0)^{k-p-j_\beta} \right] =$$

$$= \lim_{\lambda^* \to \lambda_0} O\left((\lambda^* - \lambda_0)^{p-j_\alpha}\right) = 0, \qquad (1.16)$$

так как $j_\alpha \leqslant p - 1$.

Следовательно, из (1.15) имеем

$$\int_0^l Y_\alpha(x) Z_\beta(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\lambda, \lambda^* \to \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta!(p - j_\beta - 1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{*j_\alpha}} \frac{(\lambda^* - \lambda_0)^p}{(\lambda^* - \lambda)^{p-j_\beta}} \right\} =$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p - j_\beta - 1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} (\lambda - \lambda_0)^{p-j_\alpha-1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & j_\alpha \neq j_\beta \\ 1, & j_\alpha = j_\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots). \qquad (1.17)$$

Из (1.13) и (1.17) следует утверждение (1.10) теоремы.

2°. *Биортогональные системы функций типа Миттаг-Лефлера и их асимптотика.* Изложенный выше общий способ образования биортогональных систем целых функций осуществим теперь на конкретном примере, построив такие системы из комбинаций функций типа Миттаг-Лефлера.

Пусть a_j, b_j $(j=1, 2)$ — произвольные вещественные параметры, удовлетворяющие лишь условию

$$a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2=1. \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение функции

$$y(x, \lambda, \rho)=\sum_{j=1}^{2} a_j x^{\mu_j-1} E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \mu_j), \tag{2.2}$$

$$z(x, \lambda, \rho)=\sum_{j=1}^{2} b_j (l-x)^{\nu_j-1} E_\rho(\lambda (l-x)^{\frac{1}{\rho}}; \nu_j), \tag{2.3}$$

где параметры μ_j и ν_j $(j=1, 2)$ пока подчинены лишь ограничениям

$$\mu_1>\mu_2 \geqslant 0, \quad \nu_1>\nu_2\geqslant 0. \tag{2.4}$$

Так как при любых $\mu \geqslant 0$ и $a>0$, $E_\rho(az; \mu)$ есть целая функция порядка ρ и типа a^ρ, то из формул (2.2) и (2.3) следует, что

1) для всех $x \in (0, l)$ $\dfrac{\partial^k y(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^k}$ и $\dfrac{\partial^k z(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^k}$ $(k\geqslant 0)$ суть целые функции от λ порядка ρ и типа не выше, чем l;

2) при любых $k_1 \geqslant 0$ и $k_2\geqslant 0$ функции

$$\frac{\partial^{k_1} y(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} z(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^{k_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{k_1} y(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} z(x, \lambda, \rho)}{\partial\lambda^{k_2}}$$

из класса $L_1(0, l)$.

Наконец, составим целую функцию

$$\omega(\lambda, \rho)=\lambda \sum_{j_1, j_2=1}^{2} a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1}+\nu_{j_2}-1} E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; \mu_{j_1}+\nu_{j_2}). \tag{2.5}$$

Очевидно, что $\omega(\lambda, \rho)$ — целая функция от λ порядка ρ и типа l.

Лемма 2. *При любых λ и λ^* $(\lambda\neq\lambda^*)$ справедливы формулы*

$$\int_0^l x^{\alpha-1} E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \alpha)(l-x)^{\beta-1} E_\rho(\lambda^*(l-x)^{\frac{1}{\rho}}; \beta)\,dx=$$

$$=\frac{\lambda E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; \alpha+\beta)-\lambda^* E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda^*; \alpha+\beta)}{\lambda-\lambda^*} l^{\alpha+\beta-1}, \tag{2.6}$$

$$\int_0^l y(x, \lambda, \rho) z(x, \lambda^*, \rho)\,dx=\frac{\omega(\lambda, \rho)-\omega(\lambda^*, \rho)}{\lambda-\lambda^*}, \tag{2.7}$$

$$(\alpha, \beta>0).$$

Доказательство. Заметим сначала, что формула (2.7) следует из (2.6) в силу введенных выше обозначений (2.2), (2.3) и (2.5). Поэтому достаточно убедиться в справедливости формулы (2.6).

Исходя из разложения

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})} \tag{2.8}$$

для любых λ и λ^* $(\lambda\neq\lambda^*)$ имеем:

$$\int_0^l x^{\alpha-1}E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\alpha)(l-x)^{\beta-1}E_\rho(\lambda^*(l-x)^{\frac{1}{\rho}};\beta)\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\lambda^{*m}}{\Gamma(\alpha+n\rho^{-1})\Gamma(\beta+m\rho^{-1})}\int_0^l x^{\frac{n}{\rho}+\alpha-1}(l-x)^{\frac{m}{\rho}+\beta-1}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\lambda^{*m}l^{\frac{n+m}{\rho}+\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+m)\rho^{-1})}=$$

$$=l^{\alpha+\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^n\lambda^{*k-n}l^{\frac{k}{\rho}}}{\Gamma(\alpha+\beta+k\rho^{-1})}=$$

$$=l^{\alpha+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{*k}l^{\frac{k}{\rho}}}{\Gamma(\alpha+\beta+k\rho^{-1})}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^n=\frac{l^{\alpha+\beta-1}}{\lambda-\lambda^*}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l^{\frac{k}{\rho}}(\lambda^{k+1}-\lambda^{*k+1})}{\Gamma(\alpha+\beta+k\rho^{-1})}$$
$$(\alpha,\beta>0).$$

Отсюда, в силу (2.8) получим требуемую формулу (2.6).

Установим теперь формулы, характеризующие асимптотическое поведение целых функций $y(x,\lambda,\rho)$, $z(x,\lambda,\rho)$ и $\omega(\lambda,\rho)$ в плоскости комплексного переменного λ. Эти формулы, как убедимся далее, позволяют доказать, что если $\rho>\frac{1}{2}$, то при любом вещественном $A_0\neq 0$ целая функция $\omega(\lambda,\rho)-A_0$ имеет счетное множество нулей*. Это обстоятельство, в свою очередь, даст нам возможность построить по способу, изложенному в п. 1°, системы функций $\{\overset{\rho}{y}_\alpha(x)\}$ и $\{\overset{\rho}{z}_\alpha(x)\}$, $(\alpha=1,2,\ldots)$, биортогональные на отрезке $[0,l]$.

Для достижения намеченной цели воспользуемся известными [1, 2, 3] асимптотическими свойствами функции $E_\rho(z;\mu)$, которые заключаются в следующем:

A) Случай когда $\rho=\frac{1}{2}$. *Для любого целого числа* $p\geqslant 1$

a) *при* $0<\arg z<\pi$, *когда* $|z|\to\infty$

* Как увидим ниже при $\rho=1$ имеется исключительный случай, когда нужно полагать, что $A_0\neq\mathrm{sign}(a_2b_2)$.

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-2k)}+0\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \tag{2.9}$$

б) *при* $-\pi\leqslant\arg z\leqslant 0$, *когда* $|z|\to\infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{i\pi(1-\mu)}\,e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-2k)}+0\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \tag{2.10}$$

в) *когда* $x\to+\infty$ $(Jmx=0)$

$$E_{\frac{1}{2}}(-x;\mu)=x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\cos\left[\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}(1-\mu)\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k x^{-k}}{\Gamma(\mu-2k)}+0\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right). \tag{2.11}$$

Б) Случай когда $\rho>\frac{1}{2}$. *Для любого целого числа* $p\geqslant 1$, *если* α_0 *фиксированное число из интервала*

$$\frac{\pi}{2\rho}<\alpha_0<\min\left\{\pi,\frac{\pi}{\rho}\right\}, \tag{2.12}$$

то, когда $|z|\to\infty$, *имеем*

а) *при* $|\arg z|\leqslant\alpha_0$

$$E_\rho(z;\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-k\rho^{-1})}+0\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \tag{2.13}$$

б) *при* $|\arg z|\geqslant\alpha_0$

$$E_\rho(z;\mu)=-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-k\rho^{-1})}+0\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right). \tag{2.14}$$

Кроме того, во всех формулах порядок дополнительных членов равномерен относительно соответствующих углов.

Из формул (2.9), (2.10), (2.13) и (2.14) и из определений (2.2), (2.3) и (2.5) функций $y(x,\lambda,\rho)$, $z(x,\lambda,\rho)$ и $\omega(\lambda,\rho)$ вытекают следующие формулы, характеризующие их поведение при больших $|\lambda|$ в различных частях плоскости λ.

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{l}{2}\right)$ *любое фиксированное число. Тогда при* $|\lambda|\to\infty$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

А) *Случай, когда* $\rho=\frac{1}{2}$

а) *равномерно относительно* $x\in[\varepsilon, l]$

$$y\left(x, \lambda, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}a_j\lambda^{\frac{1}{2}(1-\mu_j)}\left\{e^{x\lambda^{\frac{1}{2}}}+e^{\mp i\pi(1-\mu_j)}e^{-x\lambda^{\frac{1}{2}}}\right\}+0\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (2.15)$$

б) *равномерно относительно* $x\in[0, l-\varepsilon]$

$$z\left(x, \lambda, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}b_j\lambda^{\frac{1}{2}(1-\nu_j)}\left\{e^{(l-x)\lambda^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+e^{\mp i\pi(1-\nu_j)}e^{-(l-x)\lambda^{\frac{1}{2}}}\right\}+0\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (2.16)$$

в) $$\omega\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j_1, j_2=1}^{2}a_{j_1}b_{j_2}\lambda^{1+\frac{1}{2}(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})}\left\{e^{l\lambda^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+e^{\mp i\pi(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})}e^{-l\lambda^{\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{A_k^{(\frac{1}{2})}}{\lambda^{k-1}}+0\left(\frac{1}{\lambda^p}\right). \quad (2.17)$$

В этих формулах знаки $-$ *или* $+$ *берутся при* $0\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi$ *или* $-\pi\leqslant\arg\lambda<0$ *соответственно. Значения постоянных коэффициентов* $A_k^{(\frac{1}{2})}$ *будут приведены ниже.*

Б) *Случай, когда* $\rho>\frac{1}{2}$

а) *пусть* $|\arg\lambda|\leqslant\alpha_0$, *тогда*

$$y(x, \lambda, \rho)=\rho\left\{\sum_{j=1}^{2}a_j\lambda^{\rho(1-\mu_j)}\right\}e^{x\lambda^{\rho}}+0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad x\in[\varepsilon, l], \quad (2.18)$$

$$z(x, \lambda, \rho)=\rho\left\{\sum_{j=1}^{2}b_j\lambda^{\rho(1-\nu_j)}\right\}e^{(l-x)\lambda^{\rho}}+0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad x\in[0, l-\varepsilon], \quad (2.19)$$

притом равномерно относительно x *в соответствующих отрезках.*

$$\omega(\lambda, \rho) = \rho\lambda^{1-\rho}\left\{\sum_{j=1}^{2} a_j \lambda^{\rho(1-\mu_j)}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{2} b_j \lambda^{\rho(1-\nu_j)}\right\} e^{l\lambda^\rho} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + 0\left(\frac{1}{\lambda^p}\right) =$$

$$= \rho\left\{\sum_{j_1, j_2=1}^{2} a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{1+\rho(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})}\right\} e^{l\lambda^\rho} + \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + 0\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \tag{2.20}$$

где

$$A_k^{(\rho)} = -l^{-1-\frac{k}{\rho}} \sum_{j_1, j_2=1}^{2} \frac{a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1}+\nu_{j_2}}}{\Gamma(\mu_{j_1}+\nu_{j_2}-k\rho^{-1})}, \quad \left(\rho \geqslant \frac{1}{2}, k = 1, 2, \ldots\right); \tag{2.21}$$

б) *пусть* $|\arg\lambda| \geqslant \alpha_0$, *тогда*

$$y(x, \lambda, \rho) = -\left\{\sum_{j=1}^{2} \frac{a_j x^{\mu_j - \rho^{-1} - 1}}{\Gamma(\mu_j - \rho^{-1})}\right\} \frac{1}{\lambda} + 0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \tag{2.22}$$

$$z(x, \lambda, \rho) = -\left\{\sum_{j=1}^{2} \frac{b_j x^{\nu_j - \rho^{-1} - 1}}{\Gamma(\nu_j - \rho^{-1})}\right\} \frac{1}{\lambda} + 0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{2.23}$$

притом равномерно относительно x *в соответствующих отрезках.*

$$\omega(\lambda, \rho) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + 0\left(\frac{1}{\lambda^p}\right). \tag{2.24}$$

Обозначим через e_0 множество тех комбинаций индексов j_1 и $j_2 (= 1, 2)$, при которых произведения $a_{j_1} b_{j_2}$ отличны от нуля. На параметры μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 будем накладывать дополнительные ограничения:

$$\min_{e_0} \{1 + \rho(1 - \mu_{j_1} - \nu_{j_2})\} > 0$$

и поэтому,

$$\tau_\rho = \max_{(j_1, j_2) \in e_0} \{1 + \rho(1 - \mu_{j_1} - \nu_{j_2})\} > 0, \ \rho \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.25}$$

Иначе говоря

$$\mu_{j_1} + \nu_{j_2} < 1 + \rho^{-1}, \ (j_1, j_2) \in e_0. \tag{2.25'}$$

Заметим, что в силу условий (2.4)

$$\tau_\rho \leqslant 1 + \rho$$

кроме того, из формулы (2.5) заключаем, что

1) значение $\tau_\rho = 0$ может достигаться лишь при $a_1 = b_1 = 0$ и тогда

$$\omega(\lambda, \rho) = a_2 b_2 l^{\frac{1}{\rho}} \lambda E_\rho (l^{\frac{1}{\rho}} \lambda; 1 + \rho^{-1}) =$$

$$= \operatorname{sign}(a_2 b_2)\,[E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda;\ 1) - 1]; \tag{2.26}$$

2) значение $\tau_\rho > 0$ также может достигаться лишь при одной комбинации индексов $(r,\ s) \in e_0$:

$$\tau_\rho = 1 + \rho\,(1 - \mu_r - \nu_s), \tag{2.25''}$$

тогда асимптотические формулы (2.17) и (2.20), характеризующие поведение функции $\omega(\lambda, \rho)$, можно записать в более простом виде. Именно, когда $\rho = \dfrac{1}{2}$, имеем

$$\omega\left(\lambda;\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,a_r b_s \lambda^{\frac{\tau_{\frac{1}{2}}}{}} \left\{\left[e^{l\lambda^{\frac{1}{2}}} + e^{\mp 2\pi i \tau_{\frac{1}{2}}}\, e^{-l\lambda^{\frac{1}{2}}}\right] + \right.$$

$$\left. + \varphi_1^{(\mp)}(\lambda)\, e^{l\lambda^{\frac{1}{2}}} + \varphi_2^{(\mp)}(\lambda)\, e^{-l\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} + \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\frac{1}{2})}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \tag{2.17'}$$

где функции $\varphi_1^{(\mp)}(\lambda)$ и $\varphi_2^{(\mp)}(\lambda)$ имеют порядок $O(\lambda^{-\alpha})$, $(\alpha > 0)$, а знаки $-$ или $+$ берутся соответственно, когда $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$ или $-\pi \leqslant \arg\lambda < 0$.

В случае же, когда $\rho > \dfrac{1}{2}$ и $|\arg\lambda| < \alpha_0$

$$\omega(\lambda, \rho) = \rho\, a_r b_s\,[1 + \varphi(\lambda)]\, e^{l\lambda^\rho} + \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \tag{2.20}$$

где $\varphi(\lambda)$ имеет порядок $O(\lambda^{-\alpha})$, $(\alpha > 0)$.

3°. *Нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$, при $\tau_\rho = 0$.* Хотя нам достаточно было лишь установить существование счетного множества нулей у функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, но в настоящем и в последующем пунктах в ряде лемм мы исследуем характер их распределения и асимптотику. При этом в основном мы будем придерживаться способа Вимана [5], впервые исследовавшего вопрос распределения нулей функции $E_\rho(z;\ 1)$.

Лемма 4. *Пусть $\tau_\rho = 0 \left(\rho \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$ и*

$$C_0 = \operatorname{sign}(a_2 b_2)\, A_0 + 1. \tag{3.1}$$

тогда:

а) *при $\rho = \dfrac{1}{2}$ и $|C_0| \leqslant 1$ все нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат на отрицательной полуоси $-\infty < \lambda \leqslant 0$ и представляются в виде*

$$\gamma_k = -\left(\frac{\arccos C_0 + 2\pi k}{l}\right)^2, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{3.2}$$

кроме того, при $|C_0| < 1$ нули γ_k простые, а при $|C_0| = 1$ все они, кроме, быть может, первого имеют кратность, равную двум;

б) при $\rho = \frac{1}{2}$, $|C_0| > 1$ *все нули функции* $\omega\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) - A_0$ *простые, лежат на параболе* $Re\,\lambda^{\frac{1}{2}} = \sigma_0$, *где* $\sigma_0 > 0$ *есть корень уравнения* $\operatorname{ch} l\sigma_0 = |C_0|$, *и представляются в виде*

$$\gamma_k = \left(\sigma_0 + \frac{2\pi k}{l} i\right)^2, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \text{ если } C_0 > 1,$$

$$\gamma_k = \left(\sigma_0 + \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{l} i\right)^2, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \text{ если } C_0 < -1; \tag{3.3}$$

в) при $\rho > \frac{1}{2}$ *для любого* $0 < \delta < \min\left\{\frac{\pi}{2\rho}, \pi - \frac{\pi}{2\rho}\right\}$ *все достаточно большие по модулю нули функции* $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ *простые, лежат внутри углов*

$$\left|\arg\lambda - \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta, \quad \left|\arg\lambda + \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta, \tag{3.4}$$

при этом, нумеруя нули, лежащие соответственно в полуплоскостях $Jm\lambda > 0$ *и* $Jm\lambda < 0$ *в порядке возрастания их модулей и обозначая их через* $\{\gamma_k^{(\pm)}\}$, *будем иметь асимптотические формулы*

$$\gamma_k^{(\pm)} = \pm \frac{2\pi k}{l} i + \frac{\log C_0}{l}; \ \rho = 1, \ C_0 \neq 0, \tag{3.5}$$

$$\gamma_k^{(\pm)} = e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + 0\left(\frac{\log k}{k}\right)\right], \ \rho \neq 1. \tag{3.6}$$

Доказательство. При $\tau_\rho = 0$, $\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$ из (2.26) и (3.1) следует, что искомые нули суть корни уравнения

$$E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; 1) = C_0. \tag{3.7}$$

Поэтому, когда $\rho = \frac{1}{2}$ или $\rho = 1$, вопрос соответственно сводится к простому подсчету корней уравнений

$$\operatorname{ch} l\sqrt{\lambda} = C_0 \ \text{ и } \ e^{l\lambda} = C_0.$$

Отсюда легко приходим к утверждениям а), б) и к (3.5).

Из асимптотических формул (2.13) и (2.14) легко следует, что достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; 1) - C_0$ могут лежать только в угловых областях вида (3.4).

Для установления формулы (3.6) нужно различить два случая: $C_0 \neq 0$ и $C_0 = 0$.

Положим сначала $C_0 \neq 0$, тогда корни функции*

$$\omega_0(\lambda, \rho) = \rho e^{l\lambda^\rho} - C_0$$

простые, симметрично расположены в полуплоскостях $Jm\lambda > 0$ и $Jm\lambda < 0$ и представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_k^{(\pm)} &= \left\{\pm \frac{2\pi k}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}} \text{ при } C_0 > 0, \\ \mu_k^{(\pm)} &= \left\{\pm \frac{(2k+1)\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}} \text{ при } C_0 < 0, \\ &(k = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Все эти корни лежат на кривой

$$L_0 : r^\rho \cos \rho\varphi = \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}, \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{\rho} \tag{3.9}$$

и соответственно перемежаются с точками

$$\begin{aligned} \nu_k^{(\pm)} &= \left\{\pm \frac{(2k+1)\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}}, \quad C_0 > 0, \\ \nu_k^{(\pm)} &= \left\{\pm \frac{2k\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}}, \quad C_0 < 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

лежащими на той же кривой L_0. При этом

$$\omega_0(\nu_k^{(\pm)}, \rho) = -2C_0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda| = |\nu_k^{(+)}|$, лежащую между верхними половинами кривых

$$L_0^{(\pm)}(\gamma) : r^\rho \cos \rho\varphi = \frac{1}{l}\left\{\log \frac{|C_0|}{\rho} \pm \gamma\right\}, \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{\rho}, \tag{3.12}$$

где $\gamma > 0$ любое.
Очевидно, что верхняя половина кривой L_0 лежит между верхними половинами кривых $L_0^{(+)}(\gamma)$ и $L_0^{(-)}(\gamma)$.

Если точки $|\nu_k| e^{i\varphi_k'}$ и $|\nu_k| e^{i\varphi_k''}$ — суть начало и конец дуги l_k, то имеем

$$|\nu_k|^\rho \cos \rho\varphi_k' = \frac{1}{l}\left\{\log \frac{|C_0|}{\rho} + \gamma\right\},$$

* Мы имеем в виду лишь корни, лежащие в угловых областях (3.4).

$$|\nu_k|^\rho \cos\rho\varphi_k'' = \frac{1}{l}\left\{\log\frac{|C_0|}{\rho} - \gamma\right\},$$

при этом $\lambda = |\nu_k| e^{i\varphi} \in l_k$, если $\varphi_k' \leqslant \varphi < \varphi_k''$.

Покажем теперь, что существует достаточно большой номер N_0 такой, что

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| > |C_0| \quad \text{при} \quad \lambda \in l_k \text{ и } k \geqslant N_0. \tag{3.14}$$

Из формул (3.13) имеем:

$$|\nu_k|^\rho \sin\frac{\rho}{2}(\varphi_k'' + \varphi_k')\sin\frac{\rho}{2}(\varphi_k'' - \varphi_k') = \frac{2}{l}$$

и (3.15)

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi_k'' = \lim_{k\to+\infty}\varphi_k' = \frac{\pi}{2\rho},$$

поэтому

$$\lim_{k\to+\infty}|\nu_k|^\rho \sin\frac{\rho}{2}(\varphi_k'' - \varphi_k') = \frac{2}{l}. \tag{3.16}$$

Далее, при $\lambda = |\nu_k| e^{i\varphi} \in l_k$ имеем:

$$\omega_0(\lambda, \rho) = \rho e^{l|\nu_k|^\rho e^{i\rho\varphi}} - C_0 =$$

$$= -C_0\left[1 + e^{l|\nu_k|^\rho (e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k})}\right], \tag{3.17}$$

где положено $\nu_k = |\nu_k| e^{i\varphi_k}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Но из (3.15), (3.16) и формулы

$$e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k} = -2\sin\frac{\rho}{2}(\varphi + \varphi_k)\sin\frac{\rho}{2}(\varphi - \varphi_k) +$$

$$+ 2i\cos\frac{\rho}{2}(\varphi + \varphi_k)\cos\frac{\rho}{2}(\varphi - \varphi_k)$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty}|\nu_k|^\rho Jm\,(e^{i\varphi\rho} - e^{i\varphi_k\rho}) = 0,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}|\nu_k|^\rho Re\,(e^{i\varphi\rho} - e^{i\varphi_k\rho}) \leqslant \frac{4}{l}. \tag{3.18}$$

Наконец, из (3.17) и (3.18) вытакает, что при $l \in l_k$

$$\lim_{\to+\infty}|\omega_0(\lambda, \rho)| \geqslant C_0(1 + e^{-4}),$$

откуда следует оценка (3.14).

Но на кривых $L_0^{(\pm)}$

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| \geqslant |\rho e^{lr^\rho \cos\rho\varphi} - |C_0|| = |C_0||e^{\pm 1} - 1|, \tag{3.19}$$

поэтому в силу (3.14) и (3.19) будем иметь, что на контурах Δ_k криволинейных четырехугольников, ограниченных кусками кривых $L_0^{(\pm)}$ и дугами l_k и l_{k+1}

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| \geqslant \frac{2}{3}|C_0|, \quad \lambda \in \Delta_k, \quad k \geqslant N_0. \tag{3.20}$$

Но из асимптотической формулы (2.13) имеем:

$$\left\{E_\rho\left(l^{\frac{1}{\rho}}; 1\right) - C_0\right\} - \omega_0(\lambda, \rho) = 0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{3.21}$$

поэтому по теореме Руше из (3.20) и (3.21) следует, что при $k \geqslant N_1 \geqslant N_0$ внутри контура Δ_k функция $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; 1) - C_0$ имеет точно один простой нуль $\gamma_k^{(+)}$. При этом ясно, что будем иметь

$$\gamma_k^{(+)} = \mu_k^{(+)} + \alpha_k \quad (k \geqslant N_0), \tag{3.22}$$

где $|\alpha_k| = 0(d_k)$, d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k. Но, как легко видеть, периметр контура Δ_k при больших k имеет порядок $0(k^{\frac{1}{\rho}-1})$, поэтому имеем также $d_k = 0(k^{\frac{1}{\rho}-1})$. Отсюда и из формул (3.8), (3.22) следует, что при $k \to +\infty$

$$\gamma_k^{(+)} = e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1 + 0\left(\frac{1}{k}\right)\right]. \tag{3.22}$$

Так как все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат внутри углов (3.4), то, если λ_k любой из таких нулей, из (2.13) имеем

$$\rho e^{l\lambda_k^\rho} = C_0 + 0\left(\frac{1}{\lambda_k}\right),$$

или при $k \geqslant N_2$

$$\frac{1}{l}\left[\log\frac{|C_0|}{\rho} - \frac{1}{2}\right] < |\lambda_k|^\rho \cos\rho\varphi \arg\lambda_k < \frac{1}{l}\left[\log\frac{|C_0|}{\rho} + \frac{1}{2}\right].$$

Отсюда следует больше, чем утверждалось первоначально, а именно, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат между кривыми $L_0^{(\pm)}(\gamma)$. Это значит, что если пронумеровать нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, лежащие в полуплоскости $Jm\lambda > 0$ в порядке возрастания их модулей, то формула (3.22) даст асимптотические выражения k-того нуля при $k \to +\infty$.

Аналогично, ввиду того, что $\gamma_{-k}^{(-)} = \gamma_k^{(+)}$, для нулей функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, лежащих в полуплоскости $Jm\lambda < 0$, получим асимптотическую формулу

$$\gamma_k^{(-)} = e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1+0\left(\frac{1}{k}\right)\right], \quad k \to +\infty.$$

Таким образом, при $C_0 \neq 0$ мы получили лучшую асимптотику, чем утверждения (3.5) и (3.7) леммы.

Перейдем теперь к случаю, когда $C_0 = 0\left(\rho > \frac{1}{2}, \rho \neq 1\right)$. В этом случае вопрос сводится к исследованию нулей функции $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda;\ 1)$. Эта задача, как отмечалось выше, была исследована Виманом, однако ради полноты изложения мы приводим здесь необходимые выкладки, которые несколько отличаются от способа Вимана, и установим формулы (3.5) и (3.7).

Согласно формуле (2.13) в угловых областях (3.4) имеем:

$$E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda;\ 1) = \rho e^{l\lambda^\rho} - \frac{l^{-\frac{1}{\rho}}}{\lambda\Gamma(1-\rho^{-1})} + 0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.23}$$

Положим

$$\omega_0(\lambda, \rho) = \rho e^{l\lambda^\rho} - \frac{l^{-\frac{1}{\rho}}}{\lambda\Gamma(1-\rho^{-1})} \tag{3.24}$$

и аналогично случаю, когда $C_0 \neq 0$, рассмотрим кривую, бесконечные ветви которой лежат в угловых областях (3.4)

$$L_0 : |\lambda e^{l\lambda^\rho}| = C_\rho, \qquad C_\rho = \frac{l^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho\Gamma(1-\rho^{-1})}. \tag{3.25}$$

При $\lambda = re^{i\varphi} \in L_0$ имеем

$$lr^\rho \cos\rho\varphi = -\log r + \log C_\rho. \tag{3.26}$$

Если μ_k и μ_{k+1} ($|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$) — два последовательных нуля функции $\omega_0(\lambda, \rho)$, лежащие в верхней полуплоскости на кривой L_0, то при переходе λ по кривой L_0 от μ_k до μ_{k+1} $\arg \lambda e^{l\lambda^\rho}$ увеличивается на 2π и, вследствие непрерывности, в некоторой промежуточной точке $\nu_k \in L_0$ ($|\mu_k| < \nu_k| < |\mu_{k+1}|$) должны иметь $\nu_k e^{l\nu_k^\rho} = -C_\rho$, т. е.

$$\nu_k\omega_0(\nu_k, \rho) = -2C_\rho. \tag{3.27}$$

Далее, рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda| = |\nu_k|$, лежащую в верхней полуплоскости между кривыми

$$L_0^{(\pm)}(\gamma) : lr^\rho\cos\rho\varphi = -\log r + \log C_\rho \pm \gamma. \tag{3.28}$$

Тем же методом, что и при доказательстве неравенства (3.20), получим, что на контурах Λ_k криволинейных четырехугольников, ограниченных дугами l_k и l_{k+1} и кусками кривых $L_0^{(\pm)}(\gamma)$, справедлива оценка

$$|\lambda\omega_0(\lambda, \rho)| \geqslant \frac{2}{3}|C_\rho|. \tag{3.29}$$

С другой стороны, как и в случае $C_0 \neq 0$, легко убедиться, что все достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; 1)$, лежат между кривыми $L_0^{(+)}(\gamma)$.

Из (3.23), (3.24) и (3.29) применением теоремы Руше получим, что все достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}}\lambda; 1)$, лежащие в верхней полуплоскости, имеют вид

$$\gamma_k^{(+)} = \mu_k + \alpha_k, \tag{3.30}$$

где $|\alpha_k| = 0(d_k)$, d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k.

Так как μ_k есть k — тая точка, лежащая на верхней половине контура L_0, где функция $\omega_0(\lambda, \rho)$ обращается в нуль, то можно принять, что

$$\operatorname{Arg} \mu_k e^{l\mu_k^\rho} = 2\pi k + \theta, \tag{3.31}$$

где $|\theta| < \pi$ — некоторая постоянная.

Обозначая $\mu_k = |\mu_k| e^{i\varphi_k}$, из (3.26) и (3.31) имеем:

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\log|\mu_k|}{\rho l |\mu_k|^\rho} - \frac{\log|C_\rho|}{\rho l|\mu_k|^\rho} + 0\left(\frac{(\log|\mu_k|)^2}{|\mu_k|^{2\rho}}\right), \tag{3.32}$$

$$\varphi_k + l|\mu_k|^\rho \sin\rho\,\varphi_k = 2\pi k + \theta. \tag{3.33}$$

Из (3.32) и (3.33) получим

$$|\mu_k|^\rho = \frac{2\pi k}{l} - \frac{\pi}{2l\rho} + 0\left(\frac{(\log|\mu_k|)^2}{|\mu_k|^\rho}\right), \tag{3.34}$$

откуда следует, что при $k \to +\infty$

$$|\mu_k|^\rho \sim \frac{2\pi k}{l}, \quad \log|\mu_k| \sim \frac{1}{\rho}\log k$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} |\mu_k| &= \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1 + 0\left(\frac{\log^2 k}{k^2}\right)\right], \\ \varphi_k &= \frac{\pi}{2\rho} + 0\left(\frac{\log k}{k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Наконец, из формул (3.35) получим асимптотическую формулу

$$\mu_k = e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1 + 0\left(\frac{\log k}{k}\right)\right] \tag{3.36}$$

или, заметив, что $d_k = 0(k^{\frac{1}{\rho}-1}\log k)$, из (3.36) и (3.30) приходим к формуле (3.6) для $\gamma_k^{(+)}$. Наконец, заметив, что $\gamma_k^{(-)} = \overline{\gamma_k^{(+)}}$, получим вторую из формул (3.6).

4°. *Нули функции* $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ *при* $\tau_\rho > 0$. Переходим теперь к выяснению вопроса о распределении нулей функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ ($Jm\, A_0 = 0$) в случае, когда

$$\tau_\rho = 1 + \rho(1 - \mu_r - \nu_s) > 0, \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 5. *Пусть* $\tau_{\frac{1}{2}} > 0$. *Тогда:*

а) *Для любого фиксированного числа* $\sigma_0 > 0$ *все достаточно большие по модулю нули функции* $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ *лежат в области* D_{σ_0}, *ограниченной параболой*

$$lr^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2} = \sigma_0, \qquad |\varphi| < \pi \tag{4.1}$$

и содержащей полуось $(-\infty, 0]$;

б) *функция* $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ *имеет счетное множество нулей, при этом все нули, лежащие вне достаточно большого круга, простые, лежат на отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$ *и, если пронумеровать их в порядке возрастания их модулей, то справедлива асимптотическая формула*

$$\gamma_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\left[1 + 0\left(\frac{1}{k}\right)\right]. \tag{4.2}$$

Доказательство.

а) Для фиксированного значения $\sigma_0 > 0$ выберем число γ_0 ($0 < \gamma_0 < 1$) из условия

$$\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0} = e^{\sigma_0}. \tag{4.3}$$

Намереваясь ниже воспользоваться асимптотическими формулами (2.17′), выберем число $R_0 > 0$ так, чтобы

$$|1 + \varphi_1^{(\mp)}(\lambda)| > 1 - \gamma_0, \qquad |1 + l^{\pm i2\pi\tau_{\frac{1}{2}}}\varphi_2^{(\mp)}(\lambda)| < 1 + \gamma_0, \ |\lambda| > R_0. \tag{4.4}$$

Ввиду (4.3) и (4.4), заметив, что в дополнительной к D_{σ_0} области G_{σ_0}

$$Re\,\{l\lambda^{\frac{1}{2}}\} \geqslant \sigma_0,$$

будем иметь: при $\lambda \in G_{\sigma_0}$, $|\lambda| > R_0$

$$\frac{1}{2}a_r b_s \lambda^{\frac{\tau_1}{2}}\{e^{l\lambda^{\frac{1}{2}}}(1+\varphi_1^{(\mp)}(\lambda))+e^{-l\lambda^{\frac{1}{2}}}(e^{\mp i2\pi\tau_{\frac{1}{2}}}+\varphi_2^{(\mp)}(\lambda))\}|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}|a_r b_s|\,|\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}}\{e^{\sigma_0}(1-\gamma_0)-e^{-\sigma_0}(1+\gamma_0)\}=$$

$$=\frac{1}{2}|a_r b_s|(1-\gamma_0)(e^{\sigma_0}-1)|\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}}. \tag{4.5}$$

Выберем теперь число $R_1\geqslant R_0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|A_1^{(\frac{1}{2})}-A_0+0\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant 1+\left|A_1^{(\frac{1}{2})}-A_0\right|,\quad |\lambda|\geqslant R_1, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2}|a_r b_s|(1-\gamma_0)(e^{\sigma_0}-1)|\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}}-1-|A_1^{(\frac{1}{2})}-A_0|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4}|a_r b_s|(1-\gamma_0)(e^{\sigma_0}-1)|\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}}\geqslant 1,\quad |\lambda|\geqslant R_1. \tag{4.7}$$

Из оценок (4.5), (4.6) и (4.7), ввиду (2.17′), получим:

$$\left|\omega\left(\lambda;\frac{1}{2}\right)-A_0\right|\geqslant 1,\quad \lambda\in G_{\sigma_0},\quad |\lambda|\geqslant R_1,$$

откуда следует первое утверждение леммы.

б) Так как при фиксированном значении $\sigma_0>0$ достаточно большие по модулю нули функции $\omega\left(\lambda;\frac{1}{2}\right)-A_0$ лежат внутри области D_{σ_0}, где $0\leqslant Re\,\lambda^{\frac{1}{2}}<\sigma_0$, то для выяснения асимптотического поведения этих нулей взамен (2.17′) можно воспользоваться более простой формулой

$$\omega\left(\lambda;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a_r b_s\lambda^{\frac{\tau_1}{2}}\left\{e^{l\lambda^{\frac{1}{2}}}+e^{\mp i2\pi\tau_{\frac{1}{2}}}e^{-l\lambda^{\frac{1}{2}}}\right\}+A_1^{(\frac{1}{2})}+$$

$$+\frac{A_1^{(\frac{1}{2})}}{\lambda}+0(\lambda^{-2})+0(\lambda^{\frac{\tau_1}{2}-\alpha}),\ \alpha>0,\ \lambda\in D_{\sigma_0}. \tag{4.8}$$

Заметив, что $\omega(\lambda;\frac{1}{2})$ вещественна при $Jm\,\lambda=0$, при $\lambda=-r$, $0<r<+\infty$ будем иметь асимптотические представления

$$\omega\left(-r;\frac{1}{2}\right)-A_0=a_r b_s r^{\frac{\tau_1}{2}}\cos\left[lr^{\frac{1}{2}}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+(A_1^{(\frac{1}{2})}-A_0)+0(r^{-1})+0(r^{\frac{\tau_1}{2}-\alpha}),\ \text{при}\ A_0\neq A_1^{(\frac{1}{2})}, \tag{4.9}$$

$$\left[\omega\left(-r;\frac{1}{2}\right)-A_0\right]r=a_r b_s\, r^{1+\tau_{\frac{1}{2}}}\cos\left[l\sqrt{r}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+A_2^{(\frac{1}{2})}+0\left(r^{-1}\right)+0\left(r^{1+\tau_{\frac{1}{2}}-\varkappa}\right),\ \text{при } A_0=A_1^{(\frac{1}{2})}. \tag{4.10}$$

Из того, что левые части формул (4.9) и (4.10) вещественные функции от $r\in(0,+\infty)$, а главные члены правых частей обращаются в нуль в точках вида $l\sqrt{r}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\geqslant 1)$, легко следует, что уравнение $\omega\left(-r;\dfrac{1}{2}\right)-A_0$ при $r\geqslant r_0$ имеет счетное множество нулей r_k, притом таких, что в достаточно малых вещественных окрестностях точек $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\geqslant k_0)$ лежит лишь одна точка вида $lr_k^{\frac{1}{2}}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}$.

Поэтому имеет место формула

$$lr_k^{\frac{1}{2}}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}=k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha_k, \tag{4.11}$$

где $\alpha_k\to 0$ при $k\to+\infty$.

Подставляя значение (4.11) в (4.9) или (4.10), в обоих случаях получим, что

$$\alpha_k=0\left(r_k^{-\gamma}\right),\quad \gamma>0$$

и так как по (4.11)

$$r_k^{\frac{1}{2}}\sim\frac{\pi}{l}k,$$

то асимптотическую формулу (4.11) можно записать в виде

$$lr_k^{\frac{1}{2}}+\pi\tau_{\frac{1}{2}}=k\pi+\frac{\pi}{2}+0\left(k^{-\gamma_1}\right),\ \gamma_1=2\gamma. \tag{4.11'}$$

Из (4.11) следует следующее асимптотическое представление для вещественных нулей функции $\omega\left(\lambda;\dfrac{1}{2}\right)-A_0$

$$-r_k=-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\left[1+0\left(\frac{1}{k^{1+\gamma_1}}\right)\right]\quad(\gamma_1>0). \tag{4.11''}$$

Покажем теперь, что все нули $\{-r_k\}$ функции $\omega\left(\lambda;\dfrac{1}{2}\right)-A_0$, начиная с некоторого номера $k\geqslant k_1$, простые. С этой целью заметим, что в силу формулы

$$E'_{\frac{1}{2}}(z;\mu)=\frac{1}{2z}\left\{E_{\frac{1}{2}}(z;\mu-1)+(1-\mu)E_{\frac{1}{2}}(z;\mu)\right\}$$

из (2.5) имеем

$$\omega'\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) = \sum_{j_1, j_2=1}^{2} a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1} - \nu_{j_2} - 1} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \mu_{j_1} - \nu_{j_2}) \right] \times \right.$$

$$\left. \times E_{\frac{1}{2}}(l^2\lambda; \mu_{j_1} + \nu_{j_2}) + \frac{1}{2} E_{\frac{1}{2}}(l^2\lambda; \mu_{j_1} + \nu_{j_2} - 1) \right\}.$$

Отсюда следует, что при $r \to +\infty$

$$\omega'\left(-r; \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} l a_r b_s r^{\frac{\tau_1}{2} - \frac{1}{2}} \sin[l\sqrt{r} + \pi\tau_{\frac{1}{2}}] +$$

$$+ O(r^{\frac{\tau_1}{2} - \frac{1}{2} - \alpha_1}), \quad \alpha_1 > 0. \tag{4.12}$$

Из (4.11′) и (4.12) вытекает, что $\omega'\left(-r_k; \frac{1}{2}\right) \neq 0$ при $k \geqslant k_1$, т. е. нули $\{-r_k\}$ при $k \geqslant k_1$ простые.

Но из (4.8) следует далее, что для больших $\lambda \in D\sigma_0$ уравнение $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0 = 0$ эквивалентно:

1) при $A_0 \neq A_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ уравнению вида

$$\operatorname{ch}[l\sqrt{\lambda} \pm \pi\tau_{\frac{1}{2}}] = c_{\frac{1}{2}} e^{\pm i\pi\tau_{\frac{1}{2}}} \lambda^{-\frac{\tau_1}{2}} + O(\lambda^{-\varepsilon}), \tag{4.13}$$

где

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{A_0 - A_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{a_r b_s};$$

2) при $A_0 = A_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ уравнению вида

$$\operatorname{ch}[l\sqrt{\lambda} \pm \pi\tau_{\frac{1}{2}}] - A_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} e^{\pm i\pi\tau_{\frac{1}{2}}} \lambda^{-1 - \frac{\tau_1}{2}} + O(\lambda^{-\varepsilon}), \tag{4.13′}$$

причем знаки + или — берутся, когда точки $\lambda \in D\sigma_0$ соответственно лежат в полуплоскостях $Jm\lambda > 0$ или $Jm\lambda < 0$.

Не останавливаясь на дальнейших деталях, укажем что из обеих формул (4.13) и (4.13′) вытекает, что возможные достаточно большие по модулю нули функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ должны лежать в кругах с центром в точках $\lambda = -r_k$ и с радиусом $R_k = O(r_k^{\frac{1}{2}})$.

Далее, на основании асимптотики функций $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ и $\omega'\left(\lambda; \frac{1}{2}\right)$ можно подсчитать, что функция $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ в круге $|\lambda + r_k| \leqslant R_k$ имеет точно один нуль, т. е., что она обращается в нуль лишь в центре $\lambda = -r_k$ этого круга.

Наконец, если пронумеровать все нули функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ в порядке возрастания их модулей, то вместо (4.11″) будем иметь асимптотическую формулу (4.2) леммы.

Лемма 6. *Пусть* $\rho > \frac{1}{2}$ и $\tau_\rho > 0$. Тогда:

а) *для любого* $0 < \delta < \min\left\{\frac{\pi}{2\rho}, \pi - \frac{\pi}{2\rho}\right\}$ *все достаточно большие по модулю нули функции* $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ *простые, лежат внутри углов*

$$\left|\arg\lambda - \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta, \quad \left|\arg\lambda + \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta; \tag{4.14}$$

б) *пронумеруя нули, лежащие соответственно в полуплоскостях* $Jm\lambda > 0$ *и* $Jm\lambda < 0$ *в порядке возрастания их модулей, и обозначая их через* $\{\gamma_k^{\pm}\}$, *будем иметь асимптотические формулы*

$$\gamma_k^{(\pm)} = e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1 + 0\left(\frac{\log k}{k}\right)\right]. \tag{4.15}$$

Доказательство. Что все далекие от начала координат нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ могут лежать лишь в угловых областях вида (4.14), легко следует из асимптотических формул (2.20) и (2.24).

Для исследования характера распределения нулей функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ в областях вида (3.14) заметим, что согласно (2.20′) там при $|\lambda| \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\omega(\lambda; \rho) = \rho a_r b_s \lambda^{\tau_\rho}\{1 + \varphi(\lambda)\} e^{l\lambda^\rho} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + 0\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \quad (p \geqslant 1), \tag{4.16}$$

где

$$\tau_\rho = 1 + \rho(1 - \mu_r - \nu_s), \; a_r b_s \neq 0,$$

а функция $\varphi(\lambda)$ имеет порядок $0(\lambda^{-\alpha})$, где $\alpha > 0$.

Различим два случая:

1) $A_0 \neq A_1^{(\rho)}$, и тогда обозначив

$$\omega_0(\lambda; \rho) = \lambda^{\tau_\rho}[1 + \varphi(\lambda)] e^{l\lambda^\rho} - C_\rho, \tag{4.17}$$

где

$$C_\rho = \frac{A_0 - A_1^{(\rho)}}{\rho a_r b_s},$$

в силу (4.16) при больших $|\lambda|$ в областях вида (4.14) будем иметь

$$\omega(\lambda;\rho)-A_0=\rho a_r b_s\left\{\omega_0(\lambda;\rho)+0\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}. \qquad (4.18)$$

Рассмотрим кривую, бесконечные ветви которой лежат в областях (4.14):

$$L_0:|\lambda^{\tau_\rho}[1+\varphi(\lambda)]e^{l\lambda^\rho}|=|C_\rho|. \qquad (4.19)$$

Далее доказательство проводится по той же схеме, что и в пункте в) леммы 4. Положив, что $\lambda=re^{i\varphi}\in L_0$, запишем уравнение кривой L_0 в виде

$$L_0: lr^\rho\cos\rho\varphi=-\tau_\rho\log r-\log|1+\varphi(re^{i\varphi})|+\log|C_\rho|. \qquad (4.20)$$

Если μ_k и μ_{k+1} два последовательных, достаточно далеких от начала координат $\lambda=0$, нуля функции $\omega_0(\lambda;\rho)$, лежащие в верхней полуплоскости $Jm\lambda>0$ на кривой L_0, то, как и при доказательстве формулы (3.27), заключаем, что между ними находится точка $\nu_k\in L_0$, где

$$|\omega_0(\nu_k,\rho)|=2|C_\rho|. \qquad (4.21)$$

Рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda|=|\nu_k|$, лежащую между верхними половинками кривых

$$L_0^{(\pm)}: lr^\rho\cos\rho\varphi=-\tau_\rho\log r-\log|1+\varphi(re^{i\varphi})|+\log|C_\rho|\pm 1, \qquad (4.20')$$

тогда тем же методом, что и при доказательстве формулы (3.20) леммы 4, получим, что на контурах Δ_k четырехугольников, ограниченных дугами l_k и l_{k+1} и кусками кривых $L_0^{(\pm)}$, справедлива оценка

$$|\omega_0(\lambda;\rho)|\geqslant\frac{2}{3}|C_\rho|,\quad \lambda\in\Delta_k,\quad k\geqslant N_0. \qquad (4.22)$$

С другой стороны, опять как и при доказательстве леммы 4, из формулы (4.18) легко убедиться, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda;\rho)-A_0$ лежат между кривыми (4.20′) $L_0^{(\pm)}$.

Наконец, применением теоремы Руше из формул (4.22) и (4.18) заключаем, что достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda;\rho)-A_0$, лежащие в полуплоскости $Jm\lambda>0$, простые и представляются в виде

$$\gamma_k^{(+)}=\mu_k+0(d_k),\quad k\geqslant k_0, \qquad (4.23)$$

где d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k.

Но из (4.20), как и при доказательстве формулы (3.36), получим, что при $k\to+\infty$

$$\mu_k=e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}}\left[1+0\left(\frac{\log k}{k}\right)\right]. \qquad (4.24)$$

Наконец, заметив, что $d_k = O\left(k^{\frac{1}{\rho}-1}\log k\right)$, из (4.23) и (4.24) получим формулу (4.15) для $\gamma_k^{(+)}$ и, следовательно, для $\gamma_k^{(-)}$.

2) $A_0 = A_1^{(\rho)}$, тогда, обозначив

$$\omega_0(\lambda;\rho) = \lambda^{\tau_\rho} e^{D\lambda^\rho}\{1+\varphi(\lambda)\} - \frac{C_\rho}{\lambda}, \tag{4.25}$$

где

$$C_\rho = \frac{A_2^{(\rho)}}{\rho a_r b_s},$$

очевидно в областях вида (4.14) будем иметь

$$\omega(\lambda;\rho) - A_0 = \rho a_r b_s\left\{\omega_0(\lambda;\rho) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}.$$

Далее, рассматривая кривую

$$L_0: \left|\lambda^{\tau_\rho+1}[1+\varphi(\lambda)]\, e^{D\lambda^\rho}\right| = |C_\rho|$$

вполне аналогичными рассуждениями, что и в случае 1), получим опять формулу (4.15).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР.
Ереванский государственный университет

Поступила 9 IX 1959

Մ. Մ. Ջրբաշյան, Հ. Բ. Ներսեսյան

ՈՐՈՇ ՀԱՏՈՒԿ ԲԻՈՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ինչպես ցույց է տրված [1, 2, 3] աշխատություններում, առանցքի վրա Ֆուրյեի սովորական կորիզով ինտեգրալ ձևափոխությունն ունի ոչ թե մեկ, այլ կոնտինուում բազմությամբ շրջման բանաձևեր, կախված $\rho \geq \frac{1}{2}$ *անընդհատ պարամետրից։ Այդ շրջումներն իրականացվում են հատուկ կորիզների միջոցով, որոնք կազմվում են Միտտագ-Լեֆլերի*

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})} \quad \left(\rho \geq \frac{1}{2},\ \mu > 0\right)$$

ամբողջ ֆունկցիաների օգնությամբ։

Միաժամանակ ստացվել են հակադարձ բնույթի արդյունքներ, որ $E_\rho(z,\mu)$, $\left(\rho \geq \frac{1}{2}\right)$ *ֆունկցիայի օգնությամբ կազմված կորիզներով ինտե-*

գրալ ձևափոխությունները կարող են շրջվել Ֆուրյեի սովորական ձևափոխությամբ, ρ և μ պարամետրերի արժեքների որոշակի ընտրության դեպքում։

Ներկա հոդվածի առաջին պարագրաֆում շարադրում է միջավոր հատվածում ֆունկցիայի բիօրթոգոնալ սիստեմի կառուցման ընդհանուր մեթոդ։ Այնուհետև երկրորդ պարագրաֆում այդ մեթոդը կոնկրետ կերպով իրականացվում է $E_\rho(z, \mu)$ տիպի ֆունկցիաներից գծային կոմբինացիաների նկատմամբ։ Ընդ որում բիօրթոգոնալ սիստեմը կառուցելու համար հարկ եղավ հետազոտել $E_\rho(z, \mu)$ տեսքի ֆունկցիաներով կազմված $\omega(z, \rho)$ հատուկ ֆունկցիայի A_0 — կետերի բաշխումը հարթության վրա։

Կառուցված բիօրթոգոնալ սիստեմները և վերլուծությունները ըստ այդ սիստեմների (որ կլինի մեր երկրորդ հաղորդման առարկան) սերտորեն կապված են կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների հետ։ Վերջին հարցին նվիրված կլինեն մեր հետագա հաղորդումները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия матем., 18, 1954, стр. 427—448.
2. *Джрбашян М. М.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19, 1955, стр. 133—190.
3. *Джрбашян М. М.* Об асимптотическом поведении функций типа Миттаг-Лефлера. ДАН АрмССР, т. XIX, № 3, 1954.
4. *Джрбашян М. М.* К теории интегральных преобразований с ядрами Вольтерра. ДАН СССР, т. 124, 1959, стр. 22—25.
5. *Wiman A.* Über die Nullstellen der Funktionen $E_a(x)$. Acta Mathematica, 29 1905, 217—234.