ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 5, 1959 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

# Некоторые применения теории обобщенных интегральных преобразований

В работе [1] были получены интегральные представления аналитических функций, имеющих определенный рост в области угла. Были получены также параметрические представления некоторых классов аналитических в угловых областях функций, удовлетворяющих условиям интегрируемости в квадрате модуля на определенной системе лучей комплексной плоскости, исходящих из начала координат. Из этих результатов, в частности, следовало следующее обобщение теоремы Палей и Винера ([2], стр. 8).

Теорема А. *Класс $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ функций $f(z)$, аналитических в области $|\arg z| < \alpha$ $(\alpha < \pi)$ и удовлетворяющих условиям*

$$\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^{2\mu\rho-\rho-1} dr < M < +\infty, \qquad (|\varphi| < \alpha), \tag{1}$$

*где $\alpha + \dfrac{\pi}{2\rho} = \pi$, $\dfrac{1}{2} < \mu < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\rho}$, а $M$ — постоянная, не зависящая от $\varphi$, совпадает с классом функций, допускающих представление*

$$f(z) = \int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho};\ \mu) x^{\mu-1} v(x)\, dx, \tag{2}$$

где $v(x) \in L_2(0, \infty)$, *а* $E_\rho(z; \mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$ *— целая функция типа Миттаг-Лефлера. При этом функции класса $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ почти всюду имеют конечные граничные значения $f(re^{\pm i\alpha})$, которые также удовлетворяют условию (1) и которые почти всюду определяются формулой*

$$f(r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha}) r^{\mu-1} = \frac{d}{dr}\left\{ r^\mu \int_0^\infty E_\rho(-r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha} x^{1/\rho};\ \mu+1) x^{\mu-1} v(x)\, dx \right\}. \tag{3}$$

В первой части настоящей статьи доказывается, что функции класса $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ разлагаются в ряд по специальной системе рациональных функций, полюсы которых лежат вне области регулярности разложимой функции. Во второй части приводится новая формула обращения для интегрального преобразования М. М. Джрбашяна (2), в котором используются значения функции $f(z)$ на полупрямой, лежащей в области регулярности этой функции.

Пользуясь случаем выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за руководство.

1°. Пусть задана последовательность чисел $\{\gamma_n\}$:

$$-\frac{1}{2}<\gamma_0\leqslant\gamma_1\leqslant\cdots\gamma_n\leqslant\cdots;\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k+1}=\infty.$$

Рассматривая функции

$$p_n(x)=\frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i}e^{-\frac{x}{2}}\int\limits_{C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu+1)\,e^{-\zeta x}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)}\,d\zeta\ \ (n=0,1,2,\ldots), \tag{1.1}$$

где $C_n$ — простой контур, охватывающий окрестности точек $\gamma_0, \gamma_1\cdots\gamma_n$ (за $C_n$ мы впредь будем брать окружность $|\zeta-\gamma_n|=\gamma_n+\dfrac{1}{2}-\eta$ ($\eta>0$ — малое число), Г. В. Бадалян показал [3], что система функций $\{p_n(x)\}$ ортонормальна на полуоси, а при условии $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\gamma_n+1}=\infty$ она замкнута в классе $L_2(0,\infty)$. Это значит, что для произвольной функции $\varphi(x)\in L_2(0,\infty)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty}\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kp_k(x)\right|^2dx=0,$$

где

$$a_k=\int\limits_0^{\infty}\varphi(x)\,p_k(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что если $\Phi(x)$ произвольная функция из класса $L_2(0,\infty)$, то

$$\int\limits_0^{\infty}\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int\limits_0^{\infty}\Phi(x)\,p_k(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Теперь предположим, что функция $F(z)$ принадлежит классу

$N_2(\alpha, \rho, \mu)$. Тогда согласно теореме А при $|\arg z| < \alpha$ имеем представление

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} v(x)\, dx, \tag{1.3}$$

где $v(x) \subset L_2(0, \infty)$. Из асимптотических свойств функции $E_\rho(z; \mu)$ [4] и из того, что $\alpha + \frac{\pi}{2\rho} = \pi$ следует, что при $|\arg z| < \alpha$

$$E_\rho(-zx^{1/\rho};\ \mu)\, x^{\mu-1} \subset L_2(0,\ \infty).$$

По формуле (1.2) имеем

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty A_k \int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} p_k(x)\, dx, \tag{1.4}$$

где

$$A_k = \int_0^\infty v(x)\, p_k(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.4) под знаками интегралов значения $p_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ из (1.1) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} p_n(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\zeta + \gamma_\nu + 1)\, e^{-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)x}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta - \gamma_\nu)}\, d\zeta\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\zeta + \gamma_\nu + 1)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta - \gamma_\nu)} \left\{ \int_0^\infty e^{-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)x} E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} dx \right\} d\zeta. \tag{1.6}$$

Изменение порядка интегрирования законно, так как интеграл с бесконечным пределом сходится равномерно по $\zeta \in C_n$. Значение интеграла в скобках известно (см. [5]).

Подставляя его значение в (1.6), получим:

$$\int_0^\infty E_\rho(-zx^{1/\rho}; \mu)\, x^{\mu-1} p_n(x)\, dx =$$

$$
= \frac{\sqrt{2\gamma_n + 1}}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_\nu + 1) \left[ \left( \zeta + \frac{1}{2} \right)^{1/\rho} \right]^{1-\mu\rho}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta - \gamma_\nu) \left[ \left( \zeta + \frac{1}{2} \right)^{1/\rho} + z \right]} \, d\zeta =
$$

$$
= \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{2\pi i} \int\limits_{C_n'} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \lambda_n) \zeta^{1/\rho - \mu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta - \lambda_n) (\zeta^{1/\rho} + z)} \, d\zeta = R_n(z), \tag{1.7}
$$

где $\lambda_k = \gamma_k + \dfrac{1}{2}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, а контур $C_n'$ есть окружность $|\zeta - \lambda_n| = \lambda_n - \gamma_0$, которая охватывает окрестности точек $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Нетрудно видеть, что $R_n(z)$ есть рациональная функция, имеющая полюсы в точках $\{-\lambda_k^{1/\rho}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Если, в частности, $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \lambda_n$, то

$$
R_n(z) = \sqrt{2\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_k + \lambda_\nu) \lambda_k^{1/\rho - \mu}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}{}' (\lambda_k + \lambda_\nu)(\lambda_k^{1/\rho} + z)}, \tag{1.8}
$$

где штрих при знаке произведения в знаменателе означает, что в произведении $\nu$ не принимает значения $k$.

Из (1.4), (1.5), (1.7) следует разложение

$$
F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(z), \tag{1.9}
$$

где

$$
A_n = \int\limits_0^\infty v(x) \, p_n(x) \, dx.
$$

Покажем, что коэффициенты $A_n$ могут быть выражены через граничные значения функции $F(z)$. Из равенства (1.7) имеем почти для всех $y$

$$
R_k(y^{1/\rho} e^{\mp i\pi}) \, y^{\mu-1} = \frac{d}{dy} \left\{ y^\mu \int\limits_0^\infty E_\rho'\left(y^{1/\rho} x^{1/\rho} e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}; \mu + 1\right) x^{\mu-1} p_k(x) \, dx \right\}. \tag{1.10}
$$

Обозначим

$$\Phi_m(\mp iy)=\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{e^{\pm iyx}-1}{\pm ix}p_m(x)dx=\sqrt{2\lambda_n}\,\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m-1}(iy-\lambda_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(iy+\lambda_\nu)}\,. \tag{1.11}$$

Рациональные функции $\Phi_m(z)$ имеют полюсы в точках $\{-\lambda_n\}$. Система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi_m(iy)\right\}$ ортонормальна на $(-\infty,\infty)$ [3]. Она может быть просто получена также из ортонормальной на единичной окружности системы рациональных функций Уолша отображением единичного круга на левую полуплоскость (см. [6] и [7]).

Из равенств (1.10) и (1.11), согласно обобщенной формуле Парсеваля*, из теории обобщенных интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами

$$E_\rho(y^{1/\rho}x^{1/\rho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1)x^{\mu-1}\quad \text{и}\quad \frac{e^{\pm iyx}-1}{\pm ix}$$

следует, что

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\int_0^\infty\Phi_m(iy)R_k(y^{1/\rho}e^{-i\alpha})y^{\mu-1}dy+$$

$$+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\int_0^\infty\Phi_m(-iy)R_k(y^{1/\rho}e^{i\alpha})y^{\mu-1}dy=$$

$$=\int_0^\infty p_k(x)p_m(x)dx=\begin{cases}1, & \text{если } k=m,\\ 0, & \text{если } k\neq m.\end{cases} \tag{1.12}$$

Это значит, что системы рациональных функций $\{R_k(z)\}$ и $\{\Phi_m(z)\}$ биортогональны в смысле (1.12). Используя это соотношение, из равенства (1.9) для коэффициентов $A_n$ получим выражения

$$A_n=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\int_0^\infty F(y^{1/\rho}e^{-i\alpha})y^{\mu-1}\Phi_n(iy)dy+$$

$$+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\int_0^\infty F(y^{1/\rho}e^{i\alpha})y^{\mu-1}\Phi_n(-iy)dy. \tag{1.13}$$

Таким образом доказана

---

* Эта формула М. М. Джрбашяном пока не опубликована.

Теорема 1. *Если функция $F(z)$ принадлежит классу $N_2(\alpha, \rho, \mu)$, то*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(z),$$

*где ряд сходится равномерно в каждой замкнутой части области $|\arg z| < \alpha$, $R_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — определяемые формулой (1.7) рациональные функции, имеющие полюсы в точках $\{-\lambda_\nu^{1/\rho}\}$,*

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \lambda_n \leqslant \cdots; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \frac{1}{2}} = \infty,$$

*а коэффициенты $A_n$ определяются через граничные значения функции $F(z)$ формулой* (1.13).

В частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\rho = 1$, параметр $\mu$ в определении класса $N_2\left(\frac{\pi}{2}, 1, \mu\right)$ может изменяться в интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Если положить $\mu = 1$, то из теоремы 1 будет следовать результат, отмеченный в работе Г. В. Бадаляна [3].

Заметим, что, исходя из последовательности $\{\beta_n\}_0^{\infty}$, где

$$Re\beta_n > -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2Re\beta_n}{1 + |\beta_n|^2} = \infty,$$

тем же способом можно было построить биортогональные системы рациональных функций $\{R_k(z)\}$ и $\{\Phi_m(z)\}$, полюсы которых, вообще говоря, комплексные и расположены соответственно в областях

$$|\arg z| > \alpha \quad \text{и} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{2}.$$

2°. Пусть снова $F(z) \in N_2(\alpha, \rho, \mu)$ и значит при $|\arg z| < \alpha$ имеет место представление

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_\rho(-z\tau^{1/\rho};\, \mu)\, \tau^{\mu-1} U(\tau)\, d\tau, \tag{2.1}$$

где $U(\tau) \in L_2(0, \infty)$.

Как уже отмечали, граничные значения функции $F(z)$ будут определяться по формуле (3)

$$F(r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha})\, r^{\mu-1} = \frac{d}{dr}\left\{r^{\mu} \int_0^{\infty} E_\rho\left(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho} e^{\mp i\frac{\pi}{2\rho}};\, \mu+1\right) \tau^{\mu-1} U(\tau)\, d\tau\right\}. \tag{2.2}$$

Стоящие справа интегральные члены представляют собой обобщенные интегральные преобразования М. М. Джрбашяна с ядром типа Миттаг-Лефлера.

По известным формулам обращения [6], функция $U(\tau)$ почти всюду определяется по граничным значениям $F(r^{1/\rho}e^{\pm i\alpha})$ формулой

$$U(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\tau t}-1}{it}F(t^{1/\rho}e^{i\alpha})t^{\mu-1}dt+$$

$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F(t^{1/\rho}e^{-i\alpha})t^{\mu-1}dt. \qquad (2.3)$$

Мы покажем, что формулы (2.1) и (2.2) можно обратить, используя только значения функции $F(z)$ на каком-нибудь луче $re^{i\varphi}$ $(0<r<\infty)$ из области $|\arg z|<\alpha$.

Теорема 2. *Пусть функция $F(z)$ принадлежит классу $N_2(\alpha,\rho,\mu)$ и, значит, справедливы представления (2.1) и (2.2). Тогда функцию $U(\tau)$ можно вычислить:*

а) *при $|\varphi|<\alpha$ формулой*

$$U(\tau)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}F(t^{1/\rho}e^{i\varphi})t^{\mu-1}dt\int_{-a}^{a}\frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q(y)}dy, \qquad (2.4)$$

*где*

$$q(y)=\frac{\pi\rho}{\Gamma(1-s)}\frac{e^{-i\rho\varphi(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)}, \qquad \left(s=\frac{1}{2}+iy\right); \qquad (2.5)$$

б) *при $|\varphi|=\alpha$ формулой*

$$U(\tau)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{F^*(te^{i\varphi})}{t}dt\int_{-a}^{a}\frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q_1(y)}dy, \qquad (2.4')$$

*где*

$$F^*(te^{i\varphi})=\int_0^{t}F(u^{1/\rho}e^{i\varphi})u^{\mu-1}du$$

*и*

$$q_1(y)=\frac{\pi\rho}{\Gamma(2-s)}\frac{e^{-i\alpha\rho(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)}, \qquad \left(s=\frac{1}{2}+iy\right). \qquad (2.5')$$

Из этой теоремы в частном случае, когда $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (и, значит, $\rho=1$), будет следовать теорема Палей-Винера об обращении интеграла Лапласа ([2], стр. 39), доказанная затем Doetsch-ем способом, которому в основном мы будем придерживаться ниже ([9], стр. 440).

Доказательство. Пусть сначала $|\varphi|<\alpha$. При $z=x^{1/\rho}e^{i\varphi}$ из (2.1) имеем

$$F(x^{1/\rho}e^{i\varphi})=\int_0^\infty E_\rho(-x^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}U(\tau)\,d\tau.$$

Заменим здесь $x$ выражением $e^x$, положим $\tau=e^\xi$ и умножим обе части равенства на $e^{x\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}$. Получим

$$e^{x\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}F(e^{\frac{x}{\rho}}e^{i\varphi})=\int_{-\infty}^{\infty}E_\rho(e^{\frac{x+\xi}{\rho}}e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\,e^{(\xi+x)\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}[e^{\frac{\xi}{2}}U(e^\xi)]\,d\xi. \quad (2.6)$$

Введем обозначения

$$e^{x\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}F(e^{\frac{x}{\rho}}e^{i\varphi})=H(x), \quad (2.7)$$

$$e^{\frac{x}{2}}U(e^x)=G(x), \quad (2.8)$$

$$E_\rho(e^{\frac{x}{\rho}}e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\,e^{x\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}=K(x). \quad (2.9)$$

Из того, что $F(z)\in N_2(\alpha,\rho,\mu)$ и $U(x)\in L_2(0,\infty)$, следует, что функции $H(x)$ и $G(x)$ принадлежат классу $L_2(-\infty,\infty)$. С другой стороны, $|\arg e^{\frac{x}{\rho}}e^{i(\pi+\varphi)}|>\frac{\pi}{2\rho}$, поэтому согласно асимптотическим свойствам функции $E_\rho(z,\mu)$ [4] при $x\to\infty$

$$|E_\rho(e^{\frac{x}{\rho}}e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)|=O(e^{-\frac{x}{\rho}})$$

и, следовательно, функция $K(x)$ также принадлежит классу $L_2(-\infty,\infty)$.

Обозначим

$$g(y)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_{-a}^{a}e^{-ixy}G(x)\,dx=I^2\{G\}. \quad (2.10)$$

Аналогично введем обозначения для трансформаций Фурье функций $K(x)$ и $H(x)$:

$$I^2\{K\}=k(y),\quad I^2\{H\}=h(y). \quad (2.11)$$

Из теории Планшереля следует, что функции $k(y)$, $h(y)$, $g(y)\in L_2(-\infty,\infty)$. Однако из указанных свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$

следует, что $K(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Вычислим значение $k(x)$

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} E_\rho\left(e^{\frac{y}{\rho}} e^{i(\varphi+\pi)};\ \mu\right) e^{y\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} dy =$$

$$= \int_0^{\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu\right) t^{\mu-1} t^{-\frac{1}{2}-ix} dt. \qquad (2.12)$$

Введем положительный параметр $y$, заменяя в (2.12) $t$ на $ty$

$$k(x) = \int_0^{\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu\right) t^{\mu-1} y^{\mu-1} t^{-\frac{1}{2}-ix} y^{-\frac{1}{2}-ix} y\,dt,$$

или

$$k(-x)\,y^{-s} = y^{\mu-1} \int_0^{\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu\right) t^{\mu-1} t^{s-1} dt \quad \left(s = \frac{1}{2} + ix\right) \cdot (2.13)$$

Известно, что (см. [8], стр. 176)

$$\int_0^{y} E_\rho\left(t^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i\alpha};\ \mu\right) y^{\mu-1} dy = y^{\mu} E_\rho\left(t^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i\alpha};\ \mu+1\right). \qquad (2.14)$$

Интегрируя обе части равенства (2.13) от 0 до $y$, а затем подставляя $y=1$, получим

$$\frac{k(-x)}{1-s} = \int_0^{\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu+1\right) t^{\mu-1} t^{s-1} dt. \qquad (2.15)$$

Справа стоит преобразование Меллина функции

$$E_\rho\left(t^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu+1\right) t^{\mu-1}.$$

В работе [8] доказывается, что преобразование Меллина этой функции существует в обычном смысле и равно

$$\frac{k(-x)}{1-s} = \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[-\frac{\pi}{2} - \rho(\pi+\varphi)(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}}, \qquad (|\varphi| < \alpha).$$

Таким образом

$$k(-x) = \frac{\pi\rho}{\Gamma(1-\ )} \frac{e^{-i\rho\varphi(s+\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)}, \qquad \left(s = \frac{1}{2} + ix\right) \cdot \qquad (2.16)$$

Ясно, что $k(x)$ непрерывная функция и $k(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что $k(x)$ ограниченная функция и значит $k(x)\,g(x) \in \in L_2(-\infty, \infty)$.

Равенство (2.6) в обозначениях (2.7) – (2.9) запишется в виде свертки функций $K(x)$ и $G(-x)$:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x+\xi)\, G(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K(\eta)\, G[-(x-\eta)]\, d\eta =$$

$$= K(x) * G(-x). \tag{2.17}$$

Но преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований свертываемых функций. В наших обозначениях это означает

$$h(y) = k(y) \cdot g(-y),$$

или

$$g(y) = \frac{h(-y)}{k(-y)}. \tag{2.18}$$

Теперь, возвращаясь к функциям $G(x)$ и $H(x)$, будем иметь

$$G(x) = \underset{\alpha \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ixy} \frac{h(-y)}{k(-y)}\, dy =$$

$$= \underset{\alpha \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)}\, dy \underset{\beta \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi)\, d\xi. \tag{2.19}$$

Но

$$\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)} \left[ h(-y) - \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi)\, d\xi \right] dy \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dy}{|k(-y)|^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| h(-y) - \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi)\, d\xi \right|^2 dy \underset{\beta \to \infty}{\to} 0.$$

Это значит, что

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)}\, h(-y)\, dy = \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)}\, dy \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{\beta} H(\xi)\, d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(x+\xi)y} \frac{dy}{k(-y)}.$$

Таким образом,

$$G(x) = \underset{\alpha \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\, d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(x+\xi)y} \frac{dy}{k(-y)}. \tag{2.20}$$

Подставим вместо $G(x)$ и $H(x)$ их значения из (2.7) и (2.8), тогда будем иметь:

$$e^{\frac{x}{2}} U(e^x) = \underset{\alpha\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(e^{\frac{\xi}{\rho}} e^{i\varphi}) e^{\xi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy+i\xi y}}{k(-y)} dy.$$

Заменяя $e^x$ через $x$ и $e^\xi$ через $t$, окончательно получим:

$$U(x) = \underset{\alpha\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(xt)^{-\frac{1}{2}+iy}}{k(-y)} dy.$$

Это и есть утверждение пункта а) теоремы 2, при $k(-y) = q(y)$.

В случае, когда $|\varphi| = \alpha$, из (2.2) имеем

$$F^*(re^{i\varphi}) \equiv \int_0^r F(u^{1/\rho} e^{i\varphi}) u^{\mu-1} du =$$

$$= r^\mu \int_0^{\infty} E_\rho(r^{1/\rho} \tau^{1/\rho} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau. \tag{2.21}$$

Заметим, что функция $F(u^{1/\rho} e^{i\varphi}) u^{\mu-1}$ принадлежит классу $L_2(0, \infty)$, следовательно этому классу принадлежит и функция $\frac{F^*(re^{i\varphi})}{r}$ (см. [10], стр. 289).

В (2.21) заменим $r$ через $e^x$ и $\tau$ через $e^\xi$

$$F^*(e^x e^{i\varphi}) = e^{x\mu} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho(e^{\frac{x+\xi}{\rho}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) e^{\xi(\mu-1)} U(e^\xi) e^\xi d\xi,$$

или

$$e^{-\frac{x}{2}} F^*(e^x e^{i\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho(e^{\frac{x+\xi}{\rho}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) e^{(x+\xi)\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} [e^{\frac{\xi}{2}} U(e^\xi)] d\xi.$$

Обозначим

$$e^{-\frac{x}{2}} F^*(e^x e^{i\alpha}) = H_1(x),$$

$$e^{\frac{x}{2}} U(e^x) = G_1(x),$$

$$E_\rho(e^{\frac{x}{\rho}} e^{(\pi+\varphi)} : \mu+1) e^{x\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} = K_1(x).$$

Все эти функции принадлежат классу $L_2(-\infty, \infty)$. После этого, утверждение пункта б) теоремы 2 получается повторением рассуждений случая а) с той разницей, что вместо $H(x)$, $G(x)$ и $K(x)$ будут фигурировать соответственно функции $H_1(x)$, $G_1(x)$ и $H_1(x)$. Эти рассуждения мы опускаем. Таким образом теорема полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 6 V 1959

Ա. Ե. Ավետիսյան

## ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*[1] աշխատությունում ստացվել էին անկյան մեջ անալիտիկ և որոշակի աճ ունեցող ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ։ Որոշ դեպքերում այդ ներկայացումները պարամետրական էին։*

*Ներկա աշխատության մեջ ապացուցվում է, որ [1]-ում դիտարկված մի դասի ֆունկցիաները անկյան մեջ վեր են ածվում շարքի ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ սիստեմի։*

*Ստացվում է նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության համար նոր շրջման բանաձև։*

*Աշխատության մեջ ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.*

Թեորեմ 1։ Երբ $F(z)$ ֆունկցիան պատկանում է $|\arg z| < \alpha$ անկյան մեջ անալիտիկ և

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^{2\rho\mu-\rho-1} dr < M < \infty \quad (|\varphi| < \alpha)$$

$$\left(\alpha + \frac{\pi}{2\rho} = \pi, \ \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}, \ M\text{-ը } \varphi\text{-ից անկախ հաստատուն է}\right)$$

պայմաններին բավարարող ֆունկցիաների $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ դասին, ապա

$$F(z) = \sum_{n=0}^\infty A_n R_n(z),$$

որտեղ շարքը $|\arg z| < \alpha$ տիրույթի ամեն մի ներքին, փակ մասում հավասարաչափ զուգամետ է, $R_n(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$-երը բացահայտ տեսքով գրվող ռացիոնալ ֆունկցիաներ են, որոնց բևեռները գտնվում են $(-\lambda_n^{1/\rho})$ կետերում, որտեղ

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \lambda_n \leqslant \cdots; \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n + \frac{1}{2}} = \infty,$$

իսկ $A_n$ գործակիցները որոշվում են $F(z)$-ի եզրային արժեքներով։

Թեորեմ 2: Դիցուք $F(z)$ ֆունկցիան պատկանում է $N_2(\alpha, \rho, \mu_1)$ դասին և ուրեմն, համաձայն [1] աշխատության արդյունքների, ներկայացվում է $|\arg z|<\alpha$ անկյան ներսում

$$F(z)=\int_0^\infty E_\rho(-z\tau^{1/\rho};\mu)\,\tau^{\mu-1}U(\tau)\,d\tau$$

բանաձևով, որտեղ $U(\tau)\in L_2(0, \infty)$: Այդ դեպքում $U(\tau)$ ֆունկցիան կարելի է հաշվել

ա) եթե $|\varphi|<\alpha$

$$U(\tau)=\underset{\alpha\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(t^{1/\rho}e^{i\varphi})\,t^{\mu-1}dt\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q(y)}\,dy$$

բանաձևով, որտեղ

$$q(y)=\frac{\pi\rho}{\Gamma(1-s)}\frac{e^{-i\varphi\rho(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)},\quad\left(s=\frac{1}{2}+iy\right),$$

բ) եթե $|\varphi|=\alpha$

$$U(\tau)=\underset{\alpha\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{F^*(te^{i\varphi})}{t}dt\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q_1(y)}\,dy$$

բանաձևով, որտեղ

$$q_1(y)=\frac{\pi\rho}{\Gamma(2-s)}\frac{e^{-i\alpha\rho(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)},\quad\left(s=\frac{1}{2}+iy\right)$$

և

$$F^*(te^{i\varphi})=\int_0^t F(u^{1/\rho}e^{i\varphi})\,u^{\mu-1}du:$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Джрбашян М. М., Аветисян А. Е.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла. ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460.
2. *Paley R., Winer N.* Fourier transforms in the complex domain, New Iork, 1934.
3. *Бадалян Г. В.* Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том VIII, № 5, 1955 и том IX, № 1, 1956.
4. *Джрбашян М. М.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия матем., 18 (1954), 427—448.
5. *Джрбашян М. М.* О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований. Известия АН АрмССР, том УII, № 6, 1954.
6. *Walsn I. L.* Interpolation and approximation by rational Functions (1935), pp. 305.
7. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Известия АН АрмССР, том IX, № 7, 1956.

8. *Джрбашян М. М.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19 (1955), 133—190.

9. *Doetsch C.* Handbuch der Laplace-transformation, 1950.

10. *Харди Г. Г.*, *Литтльвуд Дж. Е.* и *Полиа Г.* Неравенства, 1948.