

М. Л. Тер-Микаелян

К теории переходного излучения

Рассмотрим задачу о переходном излучении [1], т. е. излучении, возникающем при переходе частицы из среды с диэлектрической постоянной ϵ_1 , в среду с диэлектрической постоянной ϵ_2 .

Ось z направим вдоль скорости частицы $v = \text{const}$ и примем, что плоскость раздела двух сред ($z = 0$) перпендикулярна направлению движения частицы. Решение уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} ev \delta(r - vt), \\ \Delta \varphi - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon_1} e \delta(r - vt) \end{aligned} \quad (1)$$

слева от поверхности раздела, будем искать, разлагая все величины в четырехкратные интегралы Фурье, например:

$$A(r, t) = \int A(k, \omega) e^{ikr - i\omega t} d^3k d\omega. \quad (2)$$

Для нахождения электрического поля воспользуемся формулой

$$E(k, \omega) = \frac{i\omega}{c} A(k, \omega) - ik\varphi(k, \omega). \quad (3)$$

Легко видеть, что решение неоднородного уравнения приводит к значению:

$$E_1(k, \omega) = \frac{ie}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v}{c^2} - \frac{k}{\epsilon_1} \right] \frac{\delta(\omega - kv)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1}. \quad (4)$$

Решение однородного уравнения можно представить в виде:

$$E_1^*(k, \omega) = E_1'(k, \omega) \delta \left(k^2 - \frac{\epsilon_1}{c^2} \omega^2 \right). \quad (5)$$

Выражение для электрического поля справа от поверхности раздела получим, заменяя в (4) и (5) индекс 1 на 2.

Из условий непрерывности тангенциальных составляющих при $z=0$ имеем:

$$\int \{E_{1t}(k\omega) + E_{1t}^*(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega = \int \{E_{2t}(k\omega) + E_{2t}^*(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega. \quad (6)$$

Далее, непрерывность нормальных составляющих D приводит к условию при $z=0$

$$\begin{aligned} & \int \varepsilon_1 \{E_{1n}(k\omega) + E_{1n}^*(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega = \\ & = \int \varepsilon_2 \{E_{2n}(k\omega) + E_{2n}^*(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме этих условий мы имеем $\operatorname{div} E_{1,2} = 0$ везде, как слева, так и справа от поверхности раздела:

$$\begin{aligned} kE_1 &= k_p E_{1t} + k_z E_{1n}, \\ kE_2 &= k_p E_{2t} + k_z E_{2n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти уравнения однозначно определяют $E_1(k\omega)$, $E_2(k\omega)$.

Для нахождения последних, уравнения (6) и (7) проинтегрируем по k_z . Использование дельта функции приведет к замене k_z на $k_{z1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - k_p^2}$, где индекс 1 относится к выражениям слева от поверхности раздела, а индекс 2—справа. Заметим, что k_{z1} должно быть отрицательным, а k_{z2} положительным (при $\omega > 0$), так как волны должны распространяться от поверхности раздела в левое и правое полупространства. При $z=0$ экспоненты всех выражений оказываются равными, и мы имеем систему уравнений для определения полей излучения

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{ie\varepsilon_1}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right] \frac{1}{v^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon_1 E_{1n}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z1}} = - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_p^2} = \\ & = \left\{ \frac{\varepsilon_2 ie}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_2} \right] \frac{1}{v^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon_2 E_{2n}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_p^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{iek_p}{2\pi^2 \varepsilon_1 v \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{1t}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z1}} =$$

$$= \left\{ \frac{iek_p}{2\pi^2 \varepsilon_2 v \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{2t}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z2}} \quad (10)$$

Соотношение (8) можно переписать:

$$E'_{1t} = -\frac{k_z}{k_p} E'_{1n}, \quad E'_{2t} = -\frac{k_z}{k_p} E'_{2n} \quad (11)$$

Из уравнений (9), (10), (11) определим E'_{1n} , E'_{2n}

$$E'_{1n} = \frac{iek_{z1}k_p^2}{\pi^2 v (k_{z1}\varepsilon_1 - k_{z2}\varepsilon_2)} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{v}{\omega} k_{z2}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} k_{z2}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right\} \quad (12)$$

$$E'_{2n} = \frac{iek_{z2}k_p^2}{\pi^2 v (k_{z1}\varepsilon_1 - k_{z2}\varepsilon_2)} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{v}{\omega} k_{z1}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} k_{z1}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} \right\} \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) исходя из граничных условий были ранее получены в работе [2]. Нужно отметить, что слева от поверхности раздела:

$$k_p^2 = \frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} + k_{z1}^2 = k^2 \sin^2 \theta_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1, \quad (14)$$

где θ_1 — угол между направлением излучения и нормалью к плоскости раздела. Аналогично, в формуле (13) $k_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2$.

Таким образом слева от поверхности раздела мы имеем:

$$E'(rt) = \int \frac{E'_1}{2k_{z1}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} dk_x, dk_y, d\omega. \quad (15)$$

Аналогичное выражение имеет место справа от поверхности.

Найдем угловое и частотное распределения переходного излучения*.

* При нахождении углового и частотного распределений автор, вначале, пользовался полной функцией фотона в среде, модуль квадрат которой прямо приводит к формулам (21) и (22). Однако, в беседе с Гинзбургом В. Л. и Силиным В. П., выяснилось, что естественнее формулировать этот вывод на классическом языке.

Для этого вычислим поток излучения за все время пролета частицы через плоскость, перпендикулярную направлению движения и отстоящую от поверхности раздела на расстоянии $z_1 \rightarrow \infty$. Задача сводится к нахождению проекции вектора Пойнтинга на нормаль к поверхности раздела. Вычислим его значение для левого полупространства:

$$S_1 \cos \theta_1 = \frac{c}{4\pi} \int \frac{E_{1t}^2(r, t)}{V \varepsilon_1} dx dy dt. \quad (16)$$

Заметим, что при $z_1 \rightarrow \infty$, S отлична от нуля только для положительных и действительных ε , т. е. для прозрачной среды. Частоты, для которых $\varepsilon(\omega)$ отрицательно или комплексно, вдоль оси z не распространяются.

Подставив разложение (15) в выражение (16) получим (индексами 1 и 2 будем обозначать величины, относящиеся соответственно к левому и правому полупространствам)

$$S_1 \cos \theta_1 = \frac{4\pi^2 c}{V \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_0^{\infty} \left| \frac{E_{1t}}{2k_{z1}} \right|^2 d\omega.$$

Учитывая, что $dk_x dk_y = 2\pi k_y dk_y = 2\pi k^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1$, получим

$$dS_1 \cos \theta_1 = \frac{4\pi^2 c}{V \varepsilon_1} \left| \frac{E_{1t}}{2k_{z1}} \right|^2 k^2 \cos \theta_1 d\Omega d\omega. \quad (17)$$

Легко сообразить, что после сокращения на $\cos \theta_1$ мы получим излученную энергию в направлении θ_1 . Выражение (17) решает поставленную задачу. Вычислим, используя (17), (12), (11), (13), интенсивности переходного излучения dS_1 и dS_2 .

Приведем для справок значения отдельных членов, входящих в (12) и (13)

$$|E_{1t}| = |E_{1n}| \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1}. \quad (18)$$

$$|k_{z1} \varepsilon_2 - k_{z2} \varepsilon_1| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} |\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1}|. \quad (19)$$

Аналогичные выражения для правого полупространства отличаются перестановкой индексов 1 и 2. Приведем еще выражение для члена, стоящего в фигурных скобках формулы (12)

$$\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}{\frac{\omega^2}{v^2} \varepsilon_1 (1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}, \quad (20)$$

здесь $\beta = \frac{v}{c}$. Выражение в фигурных скобках формулы (13) отличается от (20) заменой индексов 1 и 2 и изменением знака перед β .

Учитывая (18)–(20) и сократив на $\cos \theta_1$, перепишем (17) в виде

$$dS_1 = \frac{d\omega d\Omega e^2 v^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1}{\pi^2 c^3 \varepsilon_1^{1/2}} \times \left| \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}{(1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}) (\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1})} \right|^2. \quad (21)$$

Полагая $\varepsilon_1 = 1$ мы получим формулу, приведенную в [1 и 2]. Аналогичным образом получим выражение для излученной энергии в правое полупространство

$$dS_2 = \frac{d\omega d\Omega e^2 v^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 d\Omega}{c^3 \pi^2 \varepsilon_2^{1/2}} \times \left| \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 - \beta^2 \varepsilon_2 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2})}{(1 - \beta^2 \varepsilon_2 \cos^2 \theta_2) (1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2}) (\varepsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \sin^2 \theta_2})} \right|^2. \quad (22)$$

При $\varepsilon_2 = 1$ мы приходим к формуле, полученной в [2].

Формулы (21) и (22) дают решение поставленной задачи.

Физический институт

Академии наук Армянской ССР

Поступила 24 IV 1959

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼԻԱՆ

ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ելնելով (2) աշխատության մեջ բերված բանաձևերից, պարզ եղանակով ստացված են արտահայտություններ՝ ընդհանուր դեպքում անցումային ճառագայթման ինտենսիտիթյան համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гинзбург В. Л. Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ 16, 16 (1946).
2. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения ЖЭТФ 33, 1403 (1957). Здесь же приведены ссылки на работы других авторов.