

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Мовсисян

К расчету анизотропной (неортотропной)
 цилиндрической оболочки вращения

В настоящей работе даются решения температурной задачи и задачи прочности симметрично нагруженной анизотропной цилиндрической оболочки вращения, когда материал оболочки обладает анизотропией достаточно общего вида.

1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны r . Положение какой-либо точки оболочки будем определять безразмерными координатами ξ и θ , где ξ — безразмерная длина образующей, т. е. отношение истинной длины образующей к радиусу оболочки r , θ — центральный угол, отсчитываемый от начальной прямолинейной образующей. Геометрические характеристики срединной поверхности при этом будут: $A = B = r$, $R_1 = \infty$ и $R_2 = r$.

Считаем, что материал оболочки обладает анизотропией достаточно общего вида, т. е. в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки.

Считается, что рассматриваемая оболочка нагружена нормально приложенной поверхностной нагрузкой, симметричной относительно оси вращения, и имеет соответствующие симметричные граничные условия.

Ввиду полной симметрии оболочки относительно оси вращения (симметрия в геометрии срединной поверхности, симметрия нагрузки, симметрия граничных условий и симметрия упругих свойств) полагаем, что оболочка деформируется, оставаясь телом вращения, т. е. считаем, что расчетные величины не зависят от параметра θ , определяющего положение точки в каком-либо поперечном сечении оболочки.

Уравнения равновесия элемента цилиндрической оболочки имеют вид [1,8]:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\xi} &= 0 & \frac{dH_1}{d\xi} + rN_2 &= 0 \\ \frac{dS_1}{d\xi} - N_2 &= 0 & \frac{dG_1}{d\xi} - rN_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$T_z + \frac{dN_1}{d\xi} + rZ = 0, \quad S_1 + S_2 + \frac{H_z}{r} = 0.$$

В уравнениях (1.1) принимается, что внешняя нагрузка имеет лишь одну составляющую, нормальную к срединной поверхности оболочки.

В рассматриваемой системе координат геометрические уравнения имеют вид [1,8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{r} \frac{du}{d\xi}, & \varepsilon_2 &= -\frac{w}{r}, & \omega &= \frac{1}{r} \frac{dv}{d\xi}, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, & \kappa_2 &= 0, & \tau &= \frac{2}{r^2} \frac{dv}{d\xi}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соотношения упругости берем в форме [2]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega, & G_1 &= -\frac{h^2}{12}[C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2 + C_{16}\tau], \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\omega, & G_2 &= -\frac{h^2}{12}[C_{12}\kappa_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{26}\tau], \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= -S_2 = S = C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega, \\ H_1 &= -H_2 = H = \frac{h^2}{12}[C_{16}\kappa_1 + C_{26}\kappa_2 + C_{66}\tau], \end{aligned}$$

в связи с чем шестое уравнение равновесия (1.1) будет удовлетворяться приближенно.

Из (1.1)–(1.3) получаем следующие уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{12} \frac{dw}{d\xi} &= 0, \\ C_{16} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{66} \left(1 + \frac{h^2}{6r^2}\right) \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{26} \frac{dw}{d\xi} + \frac{h^2}{12r^2} C_{16} \frac{d^3 w}{d\xi^3} &= 0, \\ C_{12} \frac{du}{d\xi} + C_{26} \frac{dv}{d\xi} - \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{d^3 v}{d\xi^3} - C_{22} w - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \frac{d^4 w}{d\xi^4} &= r^2 Z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как известно [1,2], систему уравнений (1.4) можно свести к интегрированию одного разрешающего уравнения. Для этого достаточно принять

$$\begin{aligned} u &= (C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}) \frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} + \frac{h^2}{12r^2} C_{16}^2 \frac{d^5 \Phi}{d\xi^5}, \\ v &= (C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}) \frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} - \frac{h^2}{12r^2} C_{11}C_{16} \frac{d^5 \Phi}{d\xi^5}, \\ w &= (C_{11}C_{66} - C_{16}^2) \frac{d^4 \Phi}{d\xi^4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В силу (1.5), тождественно удовлетворяем первым двум уравнениям системы (1.4), а из третьего уравнения получаем следующее дифференциальное уравнение восьмого порядка, относительно искомой функции $\Phi(\xi)$:

$$\frac{d^8 \Phi}{d\xi^8} + 2m \frac{d^6 \Phi}{d\xi^6} + n \frac{d^4 \Phi}{d\xi^4} = \frac{12r^4}{h^2 C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)} Z, \quad (1.6)$$

где

$$m = \frac{3}{2} \frac{C_{16} (C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16})}{C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)}, \quad n = \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)}, \quad (1.7)$$

$$\Omega = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66} + 2C_{12} C_{16} C_{26} - C_{22} C_{16}^2 - C_{11} C_{26}^2.$$

Укажем, что соотношения (1.5) удовлетворяют второму уравнению системы (1.4) с точностью h^2/r^2 по сравнению с единицей.

Из (1.6), в силу последнего из уравнений (1.5), получим:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2m \frac{d^2 w}{d\xi^2} + nw = \frac{12r^4}{h^2 C_{11}} Z. \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$w = e^{-\alpha \xi} (C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi) + e^{\alpha \xi} (C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi) + w_0, \quad (1.9)$$

где $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования; w_0 — частное решение уравнения (1.8), отвечающее грузовому члену;

$$\alpha = \sqrt{\frac{Vn-m}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{Vn+m}{2}}. \quad (1.10)$$

В силу (1.1), (1.2), (1.3) и (1.5) для расчетных величин получаем следующие выражения:

$$T_1 = 0, \quad (1.11)$$

$$T_2 = -\frac{1}{r} \frac{\Omega}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} w + \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.12)$$

$$S = -\frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.13)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} w -$$

$$-\frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.14)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{26} \frac{C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} w -$$

$$-\frac{h^2}{12r^2} \left[C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11} C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.15)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{00} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \bar{w} + \frac{h^2 C_{10}}{12r^2} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{00}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{z}^2}, \quad (1.16)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{10} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{10}^2}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{z}^2}, \quad (1.17)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{00} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} - \frac{h^2}{12r^2} C_{10} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{00}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{z}^2}, \quad (1.18)$$

$$u = \frac{C_{12}C_{00} - C_{10}C_{20}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \int \bar{w} d\bar{z} + \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{10}^2}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} + a, \quad (1.19)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \int \bar{w} d\bar{z} - \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{11}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} + b, \quad (1.20)$$

где в силу (1.9)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = e^{-\alpha\bar{z}} [-(\alpha C_1 + \beta C_2) \sin \beta\bar{z} + (\beta C_1 - \alpha C_2) \cos \beta\bar{z}] + \\ + e^{\alpha\bar{z}} [(\alpha C_3 - \beta C_4) \sin \beta\bar{z} + (\alpha C_4 + \beta C_3) \cos \beta\bar{z}] + \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{z}}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{z}^2} = e^{-\alpha\bar{z}} [(\alpha^2 C_1 + 2\alpha\beta C_2 - \beta^2 C_1) \sin \beta\bar{z} + (\alpha^2 C_2 - 2\alpha\beta C_1 - \beta^2 C_2) \cos \beta\bar{z}] + \\ + e^{\alpha\bar{z}} [(\alpha^2 C_3 - 2\alpha\beta C_4 - \beta^2 C_3) \sin \beta\bar{z} + (\alpha^2 C_4 + 2\alpha\beta C_3 - \beta^2 C_4) \cos \beta\bar{z}] + \frac{d^2 \bar{w}_0}{d\bar{z}^2}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{z}^3} = e^{-\alpha\bar{z}} [(-\alpha^3 C_1 - 3\alpha^2\beta C_2 + 3\alpha\beta^2 C_1 + \beta^3 C_2) \sin \beta\bar{z} + \\ + (-\alpha^3 C_2 + 3\alpha^2\beta C_1 + 3\alpha\beta^2 C_2 - \beta^3 C_1) \cos \beta\bar{z}] + \\ + e^{\alpha\bar{z}} [(\alpha^3 C_3 - 3\alpha^2\beta C_4 - 3\alpha\beta^2 C_3 + \beta^3 C_4) \sin \beta\bar{z} + \\ + (\alpha^3 C_4 + 3\alpha^2\beta C_3 - 3\alpha\beta^2 C_4 - \beta^3 C_3) \cos \beta\bar{z}] + \frac{d^3 \bar{w}_0}{d\bar{z}^3}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \int \bar{w} d\bar{z} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [e^{-\alpha\bar{z}} [(-\alpha C_1 + \beta C_2) \sin \beta\bar{z} - (\beta C_1 + \alpha C_2) \cos \beta\bar{z}] + \\ + e^{\alpha\bar{z}} [(\alpha C_3 + \beta C_4) \sin \beta\bar{z} + (\alpha C_4 - \beta C_3) \cos \beta\bar{z}]] + \int \bar{w}_0 d\bar{z} \end{aligned} \quad (1.24)$$

a и b — произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим два примера.

а) Бесконечная цилиндрическая оболочка нагружена в сечении $\xi=0$ силами p , равномерно распределенными по окружности этого сечения.

Рассмотрим часть цилиндра правее от сечения $\xi=0$. В сечении $\xi=0$ имеем [3, 4, 10]

$$\frac{dw}{d\xi} = 0, \quad N_1 = -\frac{p}{2}. \quad (1.25)$$

Полагая $C_3 = C_4 = 0$ (в бесконечности все решения должны быть равны нулю) и удовлетворяя условиям (1.25), получим для постоянных интегрирования следующие значения

$$C_1 = \frac{A}{\beta} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{A}{\alpha} \quad (1.26)$$

$$A = \frac{3r^3}{h^2} \frac{p}{C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] (\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Из (1.10)–(1.24) в силу (1.26) для расчетных величин имеем

$$w = Ae^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.27)$$

$$T_z = -\frac{A}{r} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} e^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.28)$$

$$S = -\frac{h^2}{12r^3} C_{16} A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.29)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] -$$

$$- \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.30)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{26} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] -$$

$$- \frac{h^2}{12r^2} \left[C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.31)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^2} C_{16} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (a^2 + \beta^2) e^{-\alpha \xi} \left[\frac{1}{\beta} \sin \beta \xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta \xi \right], \quad (1.32)$$

$$N_1 = \frac{h^2}{6r^3} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} A e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi -$$

$$- \frac{h^2}{12r^3} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (a^2 + \beta^2) e^{-\alpha \xi} \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta \xi + 2 \cos \beta \xi \right] \quad (1.33)$$

$$N_2 = \frac{h^2}{6r^3} C_{66} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} A e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi -$$

$$- \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (a^2 + \beta^2) e^{-\alpha \xi} \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta \xi + 2 \cos \beta \xi \right] \quad (1.34)$$

Неизвестные a и b определяются из условий, что при $\xi = 0$; $u = 0$, $v = 0$, тогда окончательно для u и v получим

$$u = \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha \xi} \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta \xi - 2 \cos \beta \xi \right] + 2 \right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi, \quad (1.35)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha \xi} \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta \xi - 2 \cos \beta \xi \right] + 2 \right\} +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{11}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi. \quad (1.36)$$

В частном случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости материала совпадают с координатными линиями оболочки ($C_{16} = C_{26} = 0$), из полученных результатов получаем результаты работы [10], а для оболочек изотропного материала — работы [3].

Сравнивая эти результаты замечаем, что как и в работе [5], в отличие от изотропных и ортотропных (когда главные направления упругости совпадают с координатными направлениями) оболочек, в общем случае анизотропии появляются внутренние усилия S , H , N_2 и перемещение v . Таким образом замечаем, что, несмотря на полную симметрию задачи, под действием симметричной, нормально приложенной нагрузки круговая цилиндрическая оболочка претерпевает деформации кручения и сдвига.

в) Достаточно длинная цилиндрическая оболочка шарнирно закреплена в торцевом сечении ($\xi = 0$). Оболочка несет нормальное к срединной поверхности внешнее давление с интенсивностью q , т. е. $Z = -q$.

В сечении $\xi = 0$ имеем следующие граничные условия:

$$u = v = w = G_1 = 0. \quad (1.37)$$

Частное решение уравнения (1.8) берем в виде:

$$w_0 = - \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (1.38)$$

Учитывая (1.9), (1.14), (1.22) и удовлетворяя последним двум условиям (1.37), для постоянных интегрирования получим (члены содержащие C_3 и C_4 по тем же соображениям, что и в первом примере, отбрасываются):

$$C_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} C_{20}, \quad C_2 = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (1.39)$$

Подставляя (1.38) и (1.39) в (1.10)–(1.20), имея в виду (1.21)–(1.24), для расчетных величин получим:

$$w = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\}, \quad (1.40)$$

$$T_2 = -rq \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} + \\ + \frac{h^2}{24r} q C_{16} \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}C_{20}}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.41)$$

$$S = -\frac{qh^2}{24r} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.42)$$

$$G_1 = -\frac{qh^2}{6} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} - \\ - \frac{qh^2}{24} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.43)$$

$$G_2 = -\frac{qh^2}{6} C_{20} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} - \\ - \frac{qh^2}{24} \left[C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{16}C_{20}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.44)$$

$$H = \frac{qh^2}{6} C_{66} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} + \\ + \frac{qh^2}{24} C_{16} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.45)$$

$$N_1 = \frac{qh^2}{12r} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] +$$

$$+ \frac{qh^2}{24r} C_{11} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \times \\ \times \frac{(a^2 + \beta^2)^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} (\alpha \sin \beta\xi - \beta \cos \beta\xi), \quad (1.46)$$

$$N_z = \frac{qh^2}{12r} C_{66} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] + \\ + \frac{qh^2}{24r} C_{16} \left[1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \times \\ \times \frac{(a^2 + \beta^2)^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi - \beta \cos \beta\xi], \quad (1.47)$$

$$u = r^2 q \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{2\Omega} \frac{1}{a^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{3\beta^2 - a^2}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{3a^2 - \beta^2}{\alpha} \cos \beta\xi \right] + \right. \\ \left. + \frac{3a^2 - \beta^2}{\alpha} \right\} - \frac{qh^2}{24} \frac{C_{16}^2}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} \{ e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] - \beta \} + \\ + \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{\Omega} r^2 q \xi, \quad (1.48)$$

$$v = r^2 q \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{2\Omega} \frac{1}{a^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[\frac{3\beta^2 - a^2}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{3a^2 - \beta^2}{\alpha} \cos \beta\xi \right] + \right. \\ \left. + \frac{3a^2 - \beta^2}{\alpha} \right\} - \frac{qh^2}{24} \frac{C_{11}C_{16}}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} \{ e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] - \beta \} + \\ + \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{\Omega} r^2 q \xi, \quad (1.49)$$

Как и в первом примере, для оболочек из изотропного или ортотропного материалов величины S , H , N_z и v равны нулю.

Здесь также можно сделать вывод, аналогичный выводу, сделанному в конце примера „а“.

2. В работе [2] построена общая теория анизотропных оболочек с большим показателем изменяемости. В частном случае рассматриваемой цилиндрической оболочки, полагая, что искомые величины не зависят от параметра θ , получим следующее уравнение задачи:

$$\frac{B_{13}}{B_{33}} (B_{11}B_{33} - B_{13}^2) \frac{1}{r^3} \frac{d^3\Phi}{d\xi^3} + \frac{12\Omega'}{r^3 h^2} \frac{d^3\Phi}{d\xi^3} = \frac{12}{h^3} Z, \quad (2.1)$$

где

$$\Omega' = \frac{1}{B_{33}^2} [(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) (B_{22}B_{33} - B_{23}^2) - (B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23})^2] \quad (2.2)$$

и расчетные величины:

$$T_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$T_2 = -h\Omega' \frac{1}{r^5} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.4)$$

$$S = 0, \quad (2.5)$$

$$G_1 = -\frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{11}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.6)$$

$$G_2 = -\frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{12}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.7)$$

$$H = \frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{16}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.8)$$

$$N_1 = -\frac{h^3}{12r^4} \frac{B_{11}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.9)$$

$$N_2 = -\frac{h^3}{12r^4} \frac{B_{12}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.10)$$

$$w = \frac{1}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.11)$$

$$u = \frac{B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26}}{B_{66}} \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.12)$$

$$v = \frac{B_{11}B_{26} - B_{12}B_{16}}{B_{66}} \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}. \quad (2.13)$$

Здесь так же, как и в п.1, можно получить разрешающее уравнение относительно w . Из (2.1) в силу (2.11) получим

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)} w = \frac{12r^4}{h^2 C_{11}} Z, \quad (2.14)$$

где Ω имеет значение (1.7).

Общее решение уравнения (2.14) имеет вид:

$$w = e^{-\alpha_1 \xi} [C_1 \sin \alpha_1 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi] + e^{\alpha_1 \xi} [C_3 \sin \alpha_1 \xi + C_4 \cos \alpha_1 \xi] + w_0, \quad (2.15)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{n}{4}}, \quad n = \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}. \quad (2.16)$$

Из (2.3)–(2.13) в силу (2.11) и (2.15) для расчетных величин получим:

$$T_2 = -\frac{1}{r} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_1 \sin \alpha_1 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi] + e^{\alpha_1 \xi} [C_3 \sin \alpha_1 \xi + C_4 \cos \alpha_1 \xi] + w_0 \}, \quad (2.17)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{11} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}. \quad (2.18)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{12} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}. \quad (2.19)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}, \quad (2.20)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r^3} C_{11} \alpha_1^3 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(C_1 - C_2) \sin \alpha_1 \xi + (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_3 - C_4) \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^3} \frac{d^3 w_0}{d\xi^3} \right\}, \quad (2.21)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r^3} C_{16} \alpha_1^3 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(C_1 - C_2) \sin \alpha_1 \xi + (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_3 - C_4) \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^3} \frac{d^3 w_0}{d\xi^3} \right\}, \quad (2.22)$$

$$u = \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{1}{2\alpha_1} \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(-C_1 + C_2) \sin \alpha_1 \xi - (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_4 - C_3) \cos \alpha_1 \xi] \right\} + \\ + \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \int w_0 d\xi + a, \quad (2.23)$$

$$v = \frac{C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{1}{2\alpha_1} \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(-C_1 + C_2) \sin \alpha_1 \xi - (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_4 - C_3) \cos \alpha_1 \xi] \right\} + \\ + \frac{C_{12} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \int w_0 d\xi + b. \quad (2.24)$$

Приведем ранее рассмотренные примеры.

а) Бесконечная цилиндрическая оболочка нагружена в сечении $\xi = 0$ силами p , равномерно распределенными по окружности этого сечения.

Поступая так, как и в п^о1, для постоянных интегрирования получим:

$$C_1 = C_2 = C = \frac{3r^3}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} \quad (2.25)$$

Подстановка (2.25) в (2.17)–(2.24) дает следующие выражения для расчетных величин:

$$w = \frac{3r^3}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} e^{-\alpha_1 \xi} [\sin \alpha_1 \xi + \cos \alpha_1 \xi], \quad (2.26)$$

$$T_2 = -\frac{3r^2}{2h^2} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} e^{-\alpha_1 \xi} [\sin \alpha_1 \xi + \cos \alpha_1 \xi], \quad (2.27)$$

$$G_1 = -\frac{r}{4} \frac{p}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 \xi} [\sin \alpha_1 \xi - \cos \alpha_1 \xi], \quad (2.28)$$

$$G_2 = -\frac{r}{4} \frac{C_{12}p}{C_{11}\alpha_1} e^{-\alpha_1 \xi} [\sin \alpha_1 \xi - \cos \alpha_1 \xi], \quad (2.29)$$

$$H = \frac{r}{4} \frac{C_{16}p}{C_{11}\alpha_1} e^{-\alpha_1 \xi} [\sin \alpha_1 \xi - \cos \alpha_1 \xi], \quad (2.30)$$

$$N_1 = -\frac{p}{2} e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi, \quad (2.31)$$

$$N_2 = -\frac{C_{16}}{C_{11}} \frac{p}{2} e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi, \quad (2.32)$$

$$u = -\frac{3r^3}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^4} \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} [e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi - 1], \quad (2.33)$$

$$v = -\frac{3r^3}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^4} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} [e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi - 1]. \quad (2.34)$$

в) Полубесконечная цилиндрическая оболочка в торцевом сечении ($\xi = 0$) шарнирно закреплена. Оболочка несет нормальное к срединной поверхности внешнее давление $Z = -q$. Как и в п°1, частное решение уравнения (2.14) берем в виде (1.38).

Удовлетворяя условиям (1.37), для постоянных интегрирования, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (2.35)$$

Для расчетных величин получаем следующие выражения:

$$w = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q [e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi - 1], \quad (2.36)$$

$$T_2 = -r q [e^{-\alpha_1 \xi} \cos \alpha_1 \xi - 1], \quad (2.37)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6} \frac{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q \alpha_1^2 e^{-\alpha_1 \xi} \sin \alpha_1 \xi, \quad (2.38)$$

$$G_z = -\frac{h^2}{6} \frac{C_{12}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q x_1^2 e^{-x_1 \xi} \sin x_1 \xi, \quad (2.39)$$

$$H = \frac{h^2}{6} \frac{C_{16}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q x_1^2 e^{-x_1 \xi} \sin x_1 \xi, \quad (2.40)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r} \frac{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q x_1^2 e^{-x_1 \xi} [\cos x_1 \xi - \sin x_1 \xi], \quad (2.41)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r} \frac{C_{16}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q x_1^2 e^{-x_1 \xi} [\cos x_1 \xi - \sin x_1 \xi], \quad (2.42)$$

$$u = \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{2x_1\Omega} r^2 q [e^{-x_1 \xi} \sin x_1 \xi - \cos x_1 \xi] + 1 + 2x_1 \xi, \quad (2.43)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{2x_1\Omega} r^2 q [e^{-x_1 \xi} \sin x_1 \xi - \cos x_1 \xi] + 1 + 2x_1 \xi. \quad (2.44)$$

Из обоих примеров легко видеть, что для оболочек из ортотропного и изотропного материалов, получаемые расчетные величины совпадают с соответственными величинами п^о1.

3. Сравним результаты, полученные в п^о1 и п^о2. Разрешающее уравнение (2.14) отличается от (1.8) членом при второй производной w , вследствие чего имеем $\alpha < \alpha_1$, $\exp(-\alpha \xi) > \exp(-\alpha_1 \xi)$ (для положительных ξ), т. е. значения расчетных величин по точным формулам, при увеличении ξ , стремятся к нулю медленнее, чем по формулам для оболочек с большим показателем изменчивости.

Основное отличие расчетных величин заключается в том, что в теории пологих оболочек сдвигающее усилие S вообще равно нулю, в то время как та же величина, определенная по точной теории, отлична от нуля.

Приведем численное сравнение расчетных величин, получаемых по двум рассмотренным теориям.

Пример расчета. Для коэффициентов деформаций берем*.

$$a_{11} = 0,781 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{12} = -0,006 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг};$$

$$a_{22} = 1,531 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{16} = -0,541 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг};$$

$$a_{26} = -0,758 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{66} = 2,575 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Рассматриваются два случая отношений толщины оболочки h к радиусу кривизны, а именно $h/r = \frac{1}{10}, \frac{1}{50}$.

В таблицах 1 и 2 приводятся значения $w r^{-1} \cdot 10^5$ и $w r^{-1} q^{-1} \cdot 10^5$ соответственно для примеров „а“ и „в“.

* Упругие постоянные B_{ik} выражаются через коэффициенты a_{ik} известным образом [11].

Таблица 1

ξ	0,00	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	25,795	15,734	4,232	-1,093	(1.27)
	25,681	15,672	4,265	-1,041	(2.26)
	26,432	15,739	3,696	-1,037	(1.27)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	287,360	28,693	-9,417	0,204	(1.27)
	287,120	28,821	-9,400	0,203	(2.26)
	301,020	22,672	-8,345	0,114	(1.27)

Таблица 2

ξ	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	-10,926	-15,658	-15,837	(1.40)
	-10,888	-15,613	-15,832	(2.36)
	-11,255	-15,801	-15,733	(1.40)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	-80,096	-78,021	-76,533	(1.40)
	-80,068	-77,576	-76,532	(2.36)
	-80,677	-77,606	-76,550	(1.40)

В первых строках таблиц, для каждого отношения $\frac{h}{r}$, помещены значения, рассчитанные по формулам (1.27) и (1.40), во вторых—по формулам (2.26) и (2.36) и в третьих—рассчитанные для ортотропной оболочки.

В таблице 3 приводятся значения $G_1 h^{-1} p^{-1}$ для первого примера, где, как и в таблицах 1 и 2, в первой строке помещены значения, рассчитанные по формулам (1.30), а во второй—по (2.28).

Таблица 3

ξ	0,00	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	0,740	-0,029	-0,154	-0,019	(1.30)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	0,746	-0,024	-0,154	-0,020	(2.28)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	1,664	-0,321	-0,009	0,000	(1.30)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	1,666	-0,320	-0,010	0,000	(2.28)

Из приведенных таблиц видно, что величины, рассчитанные по формулам для пологих оболочек, незначительно отличаются от величин, вычисленных по точным формулам. В сечении $\xi = 0$, что и важно, расчетные величины, подсчитанные по двум теориям, отличаются примерно на 0,5%.

Как видно из п. 1, для ортотропного материала α больше, чем для анизотропного, поэтому величины с множителями $\exp(-\alpha \xi)$ стремятся к нулю быстрее для ортотропного материала, чем для анизотропного, т. е. зона затухания кривого эффекта меньше для оболочек из ортотропного материала, чем для оболочек из анизотропного материала. Это же подтверждается и численными примерами.

4. Пусть рассматриваемая выше оболочка подвергается действию температуры. Тогда обобщенный закон Гука для материала, имеющего плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки, имеет следующий вид [12]

$$\begin{aligned} e_{\xi\xi} &= a_{11}\sigma_{\xi} + a_{12}\sigma_{\eta} + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{\xi\eta} + \alpha_1 t, \\ e_{\eta\eta} &= a_{12}\sigma_{\xi} + a_{22}\sigma_{\eta} + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{\xi\eta} + \alpha_2 t, \\ e_{zz} &= a_{13}\sigma_{\xi} + a_{23}\sigma_{\eta} + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{\xi\eta} + \alpha_3 t, \\ \gamma_{\xi\eta} &= a_{44}\tau_{\xi\eta} + a_{45}\tau_{\xi z} + \alpha_4 t, \\ \gamma_{\xi z} &= a_{45}\tau_{\xi\eta} + a_{55}\tau_{\xi z} + \alpha_5 t, \\ \gamma_{\eta z} &= a_{16}\sigma_{\xi} + a_{26}\sigma_{\eta} + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{\xi\eta} + \alpha_6 t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где α_i — коэффициенты температурного расширения, α_{ij} — коэффициенты температурного сдвига.

В силу гипотезы недеформируемых нормалей из (4.1) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= B_{11}e_{\xi\xi} + B_{12}e_{\eta\eta} + B_{13}e_{zz} - \beta_1 t, \\ \sigma_{\eta} &= B_{12}e_{\xi\xi} + B_{22}e_{\eta\eta} + B_{23}e_{zz} - \beta_2 t, \\ \sigma_{zz} &= B_{13}e_{\xi\xi} + B_{23}e_{\eta\eta} + B_{33}e_{zz} - \beta_{12} t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где коэффициенты B_{ik} через a_{ik} выражаются известным образом [11], а через β_1 , β_2 и β_{12} обозначены следующие выражения [13]:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= B_{11}\alpha_1 + B_{12}\alpha_2 + B_{13}\alpha_3, \\ \beta_2 &= B_{12}\alpha_1 + B_{22}\alpha_2 + B_{23}\alpha_3, \\ \beta_{12} &= B_{13}\alpha_1 + B_{23}\alpha_2 + B_{33}\alpha_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Представим t в виде [13, 14] $t = t_1 + t_2$, где t_1 — нечетная функция от координаты z , а t_2 — четная, тогда в силу (4.2) для усилий и моментов получим [13].

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega - \beta_1 T_1, & G_1 &= -[D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + D_{16}\tau] + \beta_1 M_1, \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\omega - \beta_2 T_1, & G_2 &= -[D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{26}\tau] + \beta_2 M_1, \\ S &= C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega - \beta_{12} T_1, & H &= D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + D_{66}\tau - \beta_{12} M_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$T_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_i dz, \quad M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_i z dz. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4) в (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{12} \frac{dw}{dr} &= \beta_1 r \frac{dT_t}{d\xi}, \\ C_{16} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{66} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{26} \frac{dw}{d\xi} + \frac{h^2}{12r^2} C_{16} \frac{d^3 w}{d\xi^3} &= \beta_{12} r \frac{dT_t}{d\xi} + \beta_{12} \frac{dM_t}{d\xi}, \\ C_{12} \frac{du}{d\xi} + C_{26} \frac{dv}{d\xi} - \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{d^3 v}{d\xi^3} - C_{22} w - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \frac{d^3 w}{d\xi^3} &= \\ &= -r^2 Z - \beta_2 r T_t + \beta_1 \frac{d^2 M_t}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения (4.6) отличаются от (1.4) лишь правыми частями.

Из первых двух уравнений системы (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} \frac{1}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left\{ (C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}) w + \frac{h^2}{12r^2} C_{16}^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \right. \\ \left. + (C_{66}\beta_1 - C_{16}\beta_{12}) r T_t - \beta_{12} C_{16} M_t + a C_{66} - C_{16} b \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left\{ (C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}) w - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12r^2} C_{11}C_{16} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (C_{11}\beta_{12} - C_{16}\beta_1) r T_t + \beta_{12} C_{11} M_t + C_{11}b - C_{16}a \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где a и b постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Подставляя (4.7) и (4.8) в последнее уравнение (4.6), получим следующее дифференциальное уравнение относительно нормального перемещения:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2m \frac{d^2 w}{d\xi^2} + n w &= \frac{12r^4}{h^2 C_{11}} Z + P T_t + R M_t + \\ &+ E \frac{d^2 T_t}{d\xi^2} + F \frac{d^2 M_t}{d\xi^2} + A a + B b, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где наряду с (1.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P &= \frac{12r^3}{h^2 C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)} [(C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26})\beta_1 - (C_{11}C_{66} - C_{16}^2)\beta_2 + \\ &+ (C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16})\beta_{12}], \\ R &= \frac{12r^2\beta_{12}}{h^2 C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)} (C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}), \\ E &= \frac{2rC_{16}}{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)} (\beta_1 C_{16} - C_{11}\beta_{12}), \end{aligned}$$

$$F = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \left(\beta_1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \beta_{12} \right),$$

$$A = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2},$$

$$B = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}.$$

Как и в предыдущих параграфах, решение уравнения (4.7) можно представить в следующем виде:

$$w = e^{-\alpha \xi} [C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi] + e^{\alpha \xi} [C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi] + w_0, \quad (4.10)$$

где α, β имеют значения (1.10), а w_0 — частное решение, отвечающее правой части уравнения (4.9).

Граничные условия формулируются так, как обычно.

Для иллюстрации хода определения постоянных интегрирования, рассмотрим следующую задачу.

Длинная оболочка жестко прикреплена на обоих концах, т. е. имеем

$$u = v = w = \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \text{ и } \xi = \frac{l}{r}. \quad (4.11)$$

На оболочку действует постоянная по толщине температура, заданная в виде $t = t_0 e^{-\omega \xi}$, где t_0 — температура нулевого сечения, а ω — постоянное число. Для определенности примем, что ω не совпадает с корнями характеристического уравнения (4.10).

Как следует из (4.5)

$$T_t = ht_0 e^{-\omega \xi}, \quad M_t = 0. \quad (4.12)$$

Частное решение, отвечающее (4.12), имеет вид

$$w_0 = \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 e^{-\omega \xi} + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b. \quad (4.13)$$

Из (4.7), (4.8), (4.10) и (4.13), удовлетворяя условиям (4.11), для определения постоянных интегрирования получим следующую систему уравнений:

$$C_2 + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b = 0,$$

$$\beta C_1 - \alpha C_2 - \omega \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 = 0,$$

$$\frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[\frac{\beta C_1 + \alpha C_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} \frac{ht_0}{\omega} \right] +$$

$$+ \frac{C_{66}\beta_1 - C_{16}\beta_{12}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{rht_0}{\omega} - a' = 0,$$

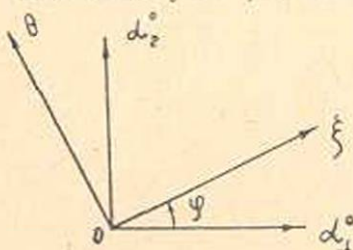
$$\begin{aligned}
& \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[\frac{\beta C_1 + \alpha C_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} \frac{ht_0}{\omega} \right] + \\
& + \frac{C_{66}\beta_{12} - C_{16}\beta_{11}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{rht_0}{\omega} - b' = 0, \\
& C_4 + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b = 0, \\
& \alpha C_4 + \beta C_3 = 0, \\
& \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[\frac{\alpha C_4 + \beta C_3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{A}{n} a \frac{l}{r} + \frac{B}{n} b \frac{l}{r} \right] + \\
& + \frac{C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} a - \frac{C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} b + a' = 0, \\
& \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[\frac{\alpha C_4 + \beta C_3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{A}{n} \frac{l}{r} a + \frac{B}{n} \frac{l}{r} b \right] + \\
& + \frac{C_{11}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} b - \frac{C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} a + b' = 0,
\end{aligned}$$

где a' и b' постоянные, которые появляются при интегрировании (4.7) и (4.8).

В заключение возвратимся к коэффициентам температурного расширения и температурного сдвига.

Если оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что одно из главных направлений упругости составляет угол φ с одной из координатных линий (фиг. 1), для коэффициентов α_1 , α_2 и α_{12} получим:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1^0 \cos^2 \varphi + \alpha_2^0 \sin^2 \varphi, \\
\alpha_2 &= \alpha_1^0 \sin^2 \varphi + \alpha_2^0 \cos^2 \varphi, \\
\alpha_{12} &= (\alpha_2^0 - \alpha_1^0) \sin 2\varphi,
\end{aligned} \quad (4.19)$$



Фиг. 1.

где через α_1^0 и α_2^0 обозначены коэффициенты температурного расширения для главных направлений ортотропного материала.

Считаю своим долгом выразить благодарность С. А. Амбарцумяну за руководство настоящей и [5] работами.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 III 1959

Լ. Ա. Մովսիսյան

ՊՏՏՄԱՆ ԱՆԻՋՈՏՐՈՂ (ՈՋ ՕՐԹՈՏՐՈՂ) ԳԼԱՆԱՅԻՆ
ՔԱՂԱՆՔԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության առաջին մասում արվում է անիզոտրոպ, սիմետրիկ բնույթի ունեցող պատման զրահային թաղանթի խնդրի լուծումը:

Ենթադրվում է, որ զրահի նյութը ենթարկվում է Հուկի ընդհանրացած օրենքին և ամեն մի կետում ունի առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն, որը զուգահեռ է միջին մակերևույթին:

Խնդրի սիմետրիկությանից (երկրաչափական և ստատիկ) ենթադրվում է, որ թաղանթը զեֆոթմացիայի ենթարկվում է մնալով պատման թաղանթ, որի հետևանքով բոլոր հաշվարկային մեծությունները միայն մեկ կոորդինատի ֆունկցիա են դառնում: Խնդրի լուծումը բերվում է նորմալ տեղափոխության նկատմամբ (1.8) զիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Դիտարկվում էն երկու խնդիրներ, որոնցից մասնավոր դեպքերում ստացվում են [3] և [10] արդյունքները:

Աշխատության երկրորդ մասում դիտարկվում են նույն խնդիրները ելնելով փոքր կորություն թաղանթների [2] զրվածքից: Այստեղ, ի տարբերություն առաջինի, սահքի S ճիգը բոլորովին բացակայում է, իսկ թվային հաշիվները ցույց են տալիս, որ երկու դեպքերում էլ հաշվարկային մեծությունները կարևոր կարվածքներում շատ քչով են տարբերվում:

Քննարկվում է նաև նույն անիզոտրոպ թաղանթի ջերմային մեկ խնդիր, որը բերվում է (4.9) հավասարմանը:

Վերջում, (4.19) արվում են ջերմային ընդարձակման և ջերմային սահքի գործակիցների ձևափոխության բանաձևերը, երբ նյութը օրթոտրոպ է, որի առաձգականության զրկավոր առանցքները կոորդինատային առանցքների հետ անկյուն են կազմում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. XII, № 1, 1948.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек, 1947.
5. Мовсисян Л. А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМН), том XI, № 4, 1953.
6. Амбарцумян С. А. Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. Доклады АН АрмССР, т. IX, № 5, 1948.
7. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. Доклады АН АрмССР, т. XI, № 2, 1949.
8. Новожиллов В. В. Теория тонких упругих оболочек. Судпромгиз, 1951.
9. Амбарцумян С. А. Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), IV, № 6, 1951.

10. Амбарцумян С. А. К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, укрепленных поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1955.
11. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
12. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, Journal of Applied Physics, 27, № 3, 1956.
13. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Известия АН АрмССР, т. V, № 6, 1957.
14. Медан Э. и Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Госиздат ф.-м. литературы, 1958.