

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. С. Саркисян

Кручение многослойных призматических стержней
прямоугольного поперечного сечения с учетом
линейной ползучести

Задача кручения составного призматического упругого стержня через функцию кручения Сен-Венана была решена академиком Н. И. Мухелишвили [1], а через функции напряжений Прайдля — К. С. Чобаняном [2]. Та же задача с учетом линейной ползучести через функции напряжений исследована Н. Х. Арутюняном и К. С. Чобаняном [3].

В настоящей работе рассматривается задача о кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением, составленных из нескольких отдельных призматических тел спаянных по боковым поверхностям, когда модуль сдвига и мера ползучести материалов этих тел различны.

Задача кручения анизотропного слоистого прямоугольного упругого стержня иным методом впервые решена С. Г. Лехвицким [4].

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается задача о кручении слоистых призматических стержней, составленных из нескольких упругих изотропных призматических тел, спаянных между собой вдоль боковых поверхностей. Решение представлено в виде бесконечных тригонометрических рядов, относительно коэффициентов которых получены рекуррентные уравнения.

Получены выражения для напряжений и жесткости. Как частный случай рассматривается кручение тонких (когда $a \gg h_n$) многослойных стержней.

Во второй части исследуется кручение многослойных призматических стержней с учетом линейной ползучести.

Приводится решение задачи кручения тонких многослойных стержней; для этого даются формулы, определяющие изменение угла закручивания и компонентов напряжений в зависимости от времени. Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

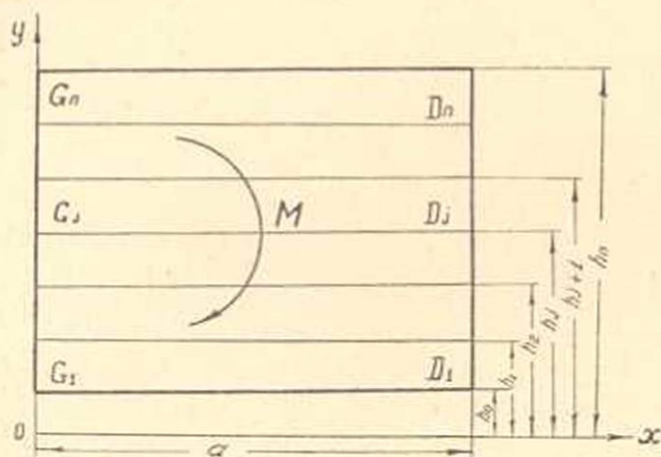
Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну, и доценту К. С. Чобаняну за постановку задачи и за руководство.

§ 1. Кручение слоистых упругих призматических стержней прямоугольного поперечного сечения

1°. Рассмотрим кручение призматического стержня прямоугольного сечения. Стержень состоит из n различных упругих изотропных слоев, спаянных по боковым поверхностям. Ширина слоев одинакова, а толщина в общем случае различна. Число слоев произвольно и равно n .

Прямоугольное поперечное сечение стержня D_0 состоит из n прямоугольных областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, соответствующих различным материалам, разграниченных линиями раздела. Обозначим через L_0 контур области всего поперечного сечения D_0 , а через L_{ij} — линию раздела областей D_i и D_j .

Координатная система показана на фиг. 1.



Фиг. 1.

Напряженное состояние данного стержня рассматривается при воздействии двух закручивающих моментов M , приложенных на его торцах.

Модуль сдвига i -ого слоя обозначим через G_i , толщину слоя — h_i .

Задача о кручении составного стержня, как показано в работе [2], сводится к определению в области поперечного сечения D_0 непрерывной функции напряжения $F(x, y)$, которая в каждой из областей D_i удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = -2G_i, \quad (1)$$

и на линиях раздела L_{ij} условиям

$$\frac{1}{G_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial y} = \frac{1}{G_j} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y} \quad \text{на } L_{ij}; \quad (2)$$

$$F_i = F_j \quad \text{на } L_{ij}, \quad (3)$$

а также контурному условию

$$F = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (4)$$

Решение уравнения (1) для прямоугольных областей представим так

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k,i}(y) \sin \alpha_k x \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где $\alpha_k = \frac{\pi k}{a}$.

Подставляя значения $F_i(x, y)$ из выражения (5) в уравнения (1), после некоторых элементарных действий, для определения $\varphi_{k,i}(y)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{k,i}''(y) - \alpha_k^2 \varphi_{k,i}(y) = -\frac{8G_i}{\pi k^3}. \quad (6)$$

После решения уравнения (6) выражение (5) примет следующий вид

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left\{ A_{k,i} \operatorname{sh} \alpha_k y + B_{k,i} \operatorname{ch} \alpha_k y + \frac{8G_i a^2}{\pi^3 k^3} \right\} \sin \alpha_k x \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Для определения постоянных интегрирования $A_{k,i}$ и $B_{k,i}$ запишем условия (2)–(4) в раскрытом виде, имея в виду выражения (7).

$$A_{k,j} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + A_{k,j} \operatorname{sh} \alpha_k h_j = q_{j,j+1} (A_{k,j+1} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + B_{k,j+1} \operatorname{sh} \alpha_k h_j);$$

$$[j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (8)$$

$$A_{k,j} \operatorname{sh} \alpha_k h_j + B_{k,j} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + b_{k,j} = A_{k,j+1} \operatorname{sh} \alpha_k h_j + B_{k,j+1} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + b_{k,j+1};$$

$$A_{k,1} \operatorname{sh} \alpha_k h_0 + B_{k,1} \operatorname{ch} \alpha_k h_0 + b_{k,1} = 0;$$

$$A_{k,n} \operatorname{sh} \alpha_k h_n + B_{k,n} \operatorname{ch} \alpha_k h_n + b_{k,n} = 0; \quad (9)$$

где

$$q_{j,j+1} = \frac{G_j}{G_{j+1}}, \quad b_{k,j} = \frac{8G_j a^2}{\pi^3 k^3}.$$

Из уравнений (8) легко получаются следующие рекуррентные формулы для $A_{k,j+1}$ и $A_{k,j}$, выраженные через $B_{k,j+1}$ и $B_{k,j}$:

$$A_{k,j} = \frac{2[B_{k,j+1} q_{j,j+1} + B_{k,j} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k h_j - q_{j,j+1} \operatorname{ch}^2 \alpha_k h_j) + q_{j,j+1} (b_{k,j+1} - b_{k,j}) \operatorname{ch} \alpha_k h_j]}{(q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2 \alpha_k h_j + (q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2 \alpha_k h_j};$$

$$[j = 1, 2, \dots, (n-1)], \quad (10)$$

$$A_{k,j+1} = \frac{2 [B_{k,j+1} (\operatorname{ch}^2 \alpha_k h_j - q_{j,j+1} \operatorname{sh}^2 \alpha_k h_j) - B_{k,j} + (q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j + (b_{k,j+1} - b_{k,j}) \operatorname{ch} \alpha_k h_j]}{(q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j}.$$

Уравнения (9) можно записать так

$$\begin{aligned} A_{k,1} &= - \frac{B_{k,1} \operatorname{ch} \alpha_k h_0 + b_{k,1}}{\operatorname{sh} \alpha_k h_0}; \\ A_{k,n} &= - \frac{B_{k,n} \operatorname{ch} \alpha_k h_n + b_{k,n}}{\operatorname{sh} \alpha_k h_n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, имеем $2n$ уравнений (10) и (11) и столько же неизвестных постоянных с одним и тем же индексом k . Таким образом, с помощью уравнений (11), из уравнений (10) последовательно можем определить все неизвестные постоянные интегрирования. Следовательно, функции напряжений определяются.

Имея функцию напряжений, определим жесткость на кручение составного призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением [2]

$$C = 2 \sum_{i=1,2}^n \iint_{D_i} F_i(x, y) dx dy = 2 \int_0^a \left(\int_{h_0}^{h_1} F_1 dy + \int_{h_1}^{h_2} F_2 dy + \dots + \int_{h_{n-1}}^{h_n} F_n dy \right) dx. \quad (12)$$

Подставляя значения $F_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в уравнение (12), интегрируя, окончательно получим:

$$\begin{aligned} C &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \sum_{i=1,2}^n b_{k,i} (h_i - h_{i-1}) + \sum_{i=1,2}^n A_{k,i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_k (h_i + h_{i-1})}{2} \times \right. \\ &\times \operatorname{sh} \alpha_k \frac{(h_i - h_{i-1})}{2} + \left. \sum_{i=1,2}^n B_{k,i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_k (h_i - h_{i-1})}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_k (h_i + h_{i-1})}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Касательные напряжения в каждой из областей определяются так

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(i)} &= \theta \frac{\partial F_i}{\partial y}, \\ \tau_{yz}^{(i)} &= -\theta \frac{\partial F_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь θ — угол закручивания на единицу длины стержня.

В качестве примера рассмотрим кручение симметричного стержня, составленного из трех ($n=3$) изотропных слоев одинаковой толщины.

2°. Остановимся более подробно на случае симметричного трех-слойного стержня, у которого все слои изотропны и имеют одинаковую толщину h .

Предположим, что наружные слои изготовлены из одного и того же материала с модулем сдвига G_1 , а средний слой имеет другой модуль сдвига G_2 (фиг. 2).

В формулах (10)–(13) предыдущего пункта нужно положить

$$n=3, \quad h_0=0, \quad h_1=h, \\ h_2=2h, \quad h_3=3h.$$

Решение уравнения (1) представим в виде (7) следующим образом

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1, 3}^{\infty} [A_{k,i} \operatorname{sh} \alpha_k y + B_{k,i} \operatorname{ch} \alpha_k y + b_{k,i}] \sin \alpha_k x \quad (15)$$

$$(i-1)h \leq y \leq ih \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Выражения (15) содержат в себе шесть неизвестных постоянных $A_{k,i}$, $B_{k,i}$ ($i=1, 2, 3$). При помощи уравнений (11) из рекуррентных формул (10) определяются все неизвестные постоянные интегрирования

$$A_{k,1} = b_{k,1} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - 1)[q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q(\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k^2(\operatorname{ch} \beta_k + 2)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k};$$

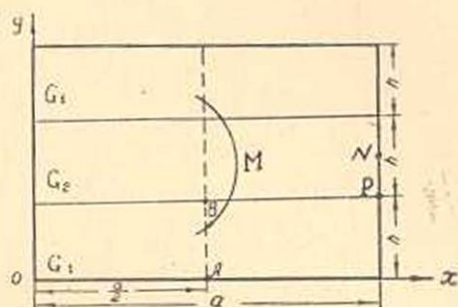
$$B_{k,1} = -b_{k,1};$$

$$A_{k,2} = b_{k,2} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k)[q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k};$$

$$B_{k,2} = b_{k,2} \frac{(2 \operatorname{ch} \beta_k - 1)[q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k - \operatorname{ch}^2 \beta_k - 2q \operatorname{ch} \beta_k]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2]};$$

$$A_{k,3} = \frac{b_{k,1}}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} \{q^2 \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{sh} 3\beta_k \operatorname{ch} \beta_k - \\ - \operatorname{sh} \beta_k \operatorname{ch} 2\beta_k - \operatorname{sh} 2\beta_k] + 2q \operatorname{ch} \beta_k [2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + \operatorname{ch} 2\beta_k (1 - \operatorname{ch} \beta_k)] + \\ + \operatorname{sh}^2 2\beta_k (1 - \operatorname{ch} \beta_k) + \operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{ch} 2\beta_k - \operatorname{ch} \beta_k)\};$$

$$B_{k,3} = \frac{b_{k,1}}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} \{q^2 \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{sh} \beta_k \operatorname{sh} 2\beta_k + \operatorname{ch} 2\beta_k - \\ - \operatorname{ch} \beta_k \operatorname{ch} 3\beta_k] + 2q \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k - 1) - \operatorname{ch} 2\beta_k] + \operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{sh} \beta_k + \\ + \operatorname{sh}^3 2\beta_k) + \operatorname{ch} 2\beta_k \operatorname{sh} 2\beta_k (\operatorname{ch} \beta_k - 2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k \operatorname{sh}^2 \beta_k)\};$$



Фиг. 2.

где

$$\beta_k = \alpha_k h = \frac{\pi k h}{a}, \quad b_{k,1} = \frac{8 G_1 a^2}{\pi^3 k^3}, \quad q = \frac{G_1}{G_2}.$$

При помощи выражения (14) определим касательные напряжения в точках A , B , N и P :

$$(\tau_{x1})_A = 6 \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - 1) [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q (\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + [(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k + 2)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (16)$$

$$(\tau_{x1})_B = 6 \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta_k) [q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (17)$$

$$(\tau_{x2})_B = 6 \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,2} \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta_k) [q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (18)$$

$$(\tau_{y2})_N = -6 \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,2} \frac{\left[q^2 \left(1 + \operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} \right) \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q \operatorname{ch} \beta_k \left(\operatorname{ch} \beta_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} - 1 \right) + \operatorname{ch}^2 \beta_k \left(\operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} - 1 \right) \right]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{ch} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (19)$$

$$(\tau_{y1})_P = -6 \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{2 (\operatorname{ch} \beta_k - 1) [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + q (2 \operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (1 + \operatorname{ch} \beta_k)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2]} (-1)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (20)$$

Если предполагать, что $\frac{h}{a} \rightarrow 0$, т. е. имеем стержень сечением в виде узкого прямоугольника, тогда уравнения (16)–(20) примут следующий вид:

$$(\tau_{x1})_A = 36 G_1 h;$$

$$(\tau_{x1})_B = 6 G_1 h;$$

$$(\tau_{x2})_B = 6 G_2 h;$$

$$(\tau_{y1})_P = (\tau_{y2})_N = 0.$$

Такие приближенные формулы для напряжений в точках A , B , N и P иным путем получены С. Г. Лехническим [4].

Теперь перейдем к определению жесткости симметричного трехслойного призматического стержня.

Запишем уравнение (13) для рассматриваемого случая

$$C = 2 \int_0^a \int_0^h F_1(x, y) dy dy + 2 \int_0^a \int_h^{2h} F_2(x, y) dx dy + 2 \int_0^a \int_{2h}^{3h} F_3(x, y) dx dy,$$

или, используя симметричность $F(x, y)$,

$$C = 4 \int_0^a \left[\int_0^h F_1(x, y) dy + \int_h^{\frac{3}{2}h} F_2(x, y) dy \right] dx. \quad (21)$$

Подставляя значения $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ из уравнений (15) в уравнение (21), интегрируя по x и по y , находим

$$C = \frac{32ah^3}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{2G_1Q(\beta_k, q) + G_2P(\beta_k, q)}{\Omega(\beta_k, q)}, \quad (22)$$

где

$$Q(\beta_k, q) = (\operatorname{ch} \beta_k - 1)^2 [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q (\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k + 2)] + (\beta_k - \operatorname{sh} \beta_k) [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2) \operatorname{sh} \beta_k,$$

$$P(\beta_k, q) = \beta_k \operatorname{sh} \beta_k [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2) + 2(q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k - 2q \operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch}^2 \beta_k) \times \\ \times \left[\left(\operatorname{sh} \frac{3}{2} \beta_k - \operatorname{sh} \beta_k \right) (2 \operatorname{ch} \beta_k - 1) \operatorname{sh} \beta_k + (\operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k) \times \right. \\ \left. \times \left(\operatorname{ch} \frac{3}{2} \beta_k - \operatorname{ch} \beta_k \right) \right];$$

$$\Omega(\beta_k, q) = \beta_k \operatorname{sh} \beta_k [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2).$$

Интересно рассмотреть жесткость стержня с узким прямоугольным сечением. Для этого в выражении (22) перейдем к пределу, когда $\frac{h}{a}$ стремится к нулю. Получим для жесткости такого стержня следующее компактное выражение

$$C = \frac{(26G_1 + G_2)ah^3}{3}. \quad (23)$$

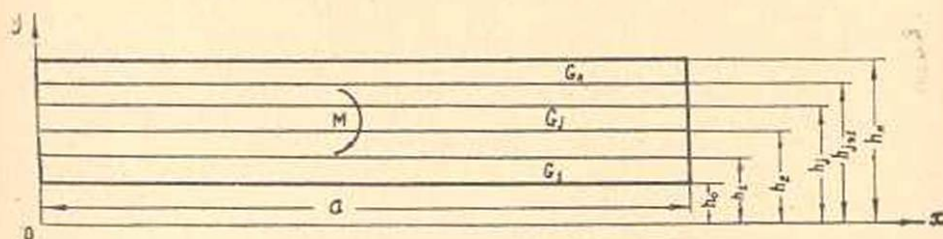
Если принять $G_1 = G_2$, то для жесткости стержня получим хорошо известное выражение

$$C = 9ah^3G_1.$$

Для жесткости трехслойного стержня с узким прямоугольным сечением С. Г. Лехницкий получил неверный результат (5.14) [4].

Ошибка заключается в переходе к пределу в (5.5) [4], когда $C = \frac{a}{h}$ неограниченно возрастает.

3°. Рассмотрим случай, когда сечение слоистого стержня имеет вид узкого прямоугольника ($a \gg h_n$). Число слоев равно n . На торцах стержня действуют два крутящих момента. Предположим, что слои стержня изготовлены из различных материалов, т. е. с модулями сдвигов G_1 в области первой, G_2 — второй и т. д., G_n — в n -ой области (фиг. 3).



Фиг. 3.

Так как сечение стержня представляет узкий прямоугольник, то изменением функции напряжения $F(x, y)$ по направлению x можно пренебречь относительно изменения по y . При этом предположении уравнения (1) примут такой вид

$$\frac{d^2 F_i}{dy^2} = -2G_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения (24), находим

$$F_i(y) = -G_i y^2 + A_i y + B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Из условий (2) — (4) получаются рекуррентные формулы:

$$A_j = G_j h_j + \frac{B_j - B_{j+1}}{h_j(1 - q_{j+1, j})} \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (26)$$

$$A_{j-1} = A_j q_{j+1, j};$$

$$A_1 = G_1 h_0 - \frac{B_1}{h_0}, \quad (27)$$

$$A_n = G_n h_n - \frac{B_n}{h_n}.$$

Итак, с помощью уравнений (27), из уравнений (26) последовательно можно определить неизвестные постоянные A_j , B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и, значит, — функцию напряжения.

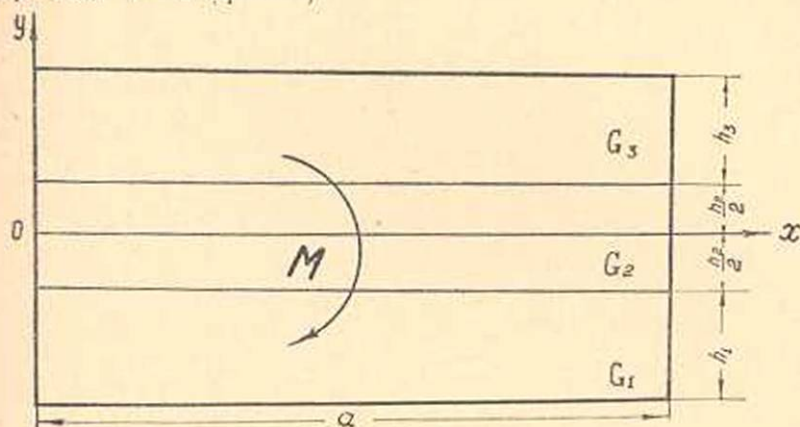
Жесткость на кручение многослойного призматического стержня с сечением в виде узкого прямоугольника определяется так

$$C = 2 \int_{D_0} F(y) dx dy = 2a \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} F_i(y) dy,$$

или

$$C = 2a \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{C_i (h_i^3 - h_{i-1}^3)}{3} + \frac{A_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)}{2} + B_i (h_i - h_{i-1}) \right\}. \quad (28)$$

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим частный случай, когда $n = 3$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

При этом в формулах (26)–(28) нужно вместо h_i положить

$$h_0^* = -h_1 - \frac{h_2}{2}, \quad h_1^* = -\frac{h_2}{2}, \quad h_2^* = \frac{h_2}{2}, \quad h_3^* = h_3 + \frac{h_2}{2}.$$

Из условия симметрии

$$F_2(y) = F_2(-y),$$

$$A_2 = 0.$$

Решая уравнения (26) и (27) для этого случая, получим

$$A_1 = A_3 = 0;$$

$$B_1 = G_1 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^2;$$

$$B_2 = G_2 \frac{h_2^2}{4} + G_1 (h_1^2 + h_1 h_2);$$

$$B_3 = G_3 \left(h_3 + \frac{h_2}{2} \right)^2.$$

Итак, функция напряжения $F_i(y)$ определена.

Определим жесткость стержня, используя формулу (28)

$$C = \frac{[4h_1^3 + 6h_2^2(h_1 + h_2) + 3h_1^2h_2]G_1 + G_2h_2^3 + (4h_3^3 + 3h_2h_3^2)G_3}{3}a. \quad (29)$$

Рассмотрим два простых случая.

а) Предположим $h_1 = h_2 = h$, $G_1 = G_3$. Тогда (29) примет такой вид

$$C = \frac{[8h^3 + 6h_2^2h + 6h^2h_2 + 6h_2^3]G_1 + h_2^3G_2}{3}a.$$

б) Предположим $h_1 = h_2 = h_3 = h$, тогда

$$C = \frac{(26G_1 + G_2)h^3a}{3}.$$

Это выражение уже было получено в предыдущем пункте.

§ 2. Кручение многослойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с учетом ползучести

1°. Рассмотрим призматический стержень прямоугольного поперечного сечения, составленный из различных материалов. На торцах стержня действуют два крутящих момента M (фиг. 1). Исследуется случай, когда модули мгновенной деформации сдвига материалов изменяются во времени столь незначительно, что их можно считать постоянными $G_i(t) = G_i = \text{const}$.

Как известно [3], задача о кручении составного призматического стержня с учетом линейной ползучести приводится к определению непрерывной в области D_0 функции напряжений $F(x, y, t)$, которая удовлетворяет в соответствующих областях D_i дифференциальным уравнениям

$$\Delta F_i = A_i(t), \quad (1)$$

контурному условию

$$F = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (2)$$

условиям непрерывности

$$F_i = F_j \quad \text{на } L_{ij} \quad (3)$$

и условиям разрыва ее нормальной производной на линиях раздела

$$\frac{1}{G_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial y} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial F_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau = \frac{1}{G_j} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial F_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau \quad \text{на } L_{ij}. \quad (4)$$

Здесь $A_i(t)$ — неизвестная функция в области D_i , зависящая только от времени t , $\omega_i(t, \tau)$ — мера ползучести при чистом сдвиге. При этом, для определения функций $A_i(t)$ и степени закручивания $\theta(t)$, имеются следующие соотношения [3]:

$$A_i(t) - G_i \int_{\tau_1}^t A_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau = -2G_i \theta(t); \quad (5)$$

$$M = 2 \sum_{i=1}^n \int_{D_i^*} F_i(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что решение дифференциального уравнения (1) можно представить в следующем виде

$$F_i(x, y, t) = \sum_{k=1, 3}^{\infty} [B_{k,i}(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + D_{k,i}(t) \operatorname{ch} \alpha_k y - A_i(t) b_k] \sin \alpha_k x, \quad (7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad b_k = \frac{4a^2}{\pi^3 k^3}.$$

$B_{k,i}(t)$ и $D_{k,i}(t)$ — неизвестные функции, которые получаются при интегрировании дифференциальных уравнений (1).

Для определения неизвестных функций $B_{k,i}(t)$, $D_{k,i}(t)$, $A_i(t)$ и $\theta(t)$, имея в виду выражение (7), напомним уравнения (2)–(6)

$$\begin{aligned} B_{k,1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_0 + D_{k,1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_0 - A_1(t) b_k &= 0; \\ B_{k,n}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_n + D_{k,n}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_n - A_n(t) b_k &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j + D_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j - A_j(t) b_k &= B_{k,j+1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j + \\ + D_{k,j+1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j - A_{j+1}(t) b_k \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_j} \{B_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} - \\ & - \int_{\tau_1}^t \{B_{k,j}(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} \frac{\partial \omega_j(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = \frac{1}{G_{j+1}} \{B_{k,j+1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} - \\ & - \int_{\tau_1}^t \{B_{k,j+1}(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} \frac{\partial \omega_{j+1}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ & [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_j(t) - G_j \int_{\tau_1}^t A_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau = -2G_j \theta(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (11)$$

$$M = 2 \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \int_{k=1}^{\infty} \{B_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + D_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k y - A_j(t) b_k\} \sin \alpha_k x dx dy. \quad (12)$$

Предполагается, что во всех областях материал обладает ползучестью и для меры ползучести материала $\omega_j(t, \tau)$ при чистом сдвиге принимается следующая зависимость [5]

$$\omega_j(t, \tau) = \varphi_j(\tau) [1 - e^{-\gamma_j(t-\tau)}] \quad \text{где} \quad \varphi_j(\tau) = \omega_{j0} + \frac{\omega_{j1}}{\tau}. \quad (13)$$

Причем ω_{j0} — предельное значение меры ползучести данного материала при чистом сдвиге, γ_j , ω_{j1} — некоторые параметры, подобранные так, чтобы соотношение (13) лучше описывало экспериментальные кривые ползучести данного материала, τ_1 — возраст материала.

Принятое выражение для меры ползучести при чистом сдвиге — $\omega_j(t, \tau)$ в форме (13) позволяет свести решение интегральных уравнений (10) и (11) к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В самом деле, уравнение (11) дифференцируем по t

$$\begin{aligned} A_j'(t) - G_j \int_{\tau_1}^t A_j(\tau) [\varphi_j'(\tau) + \gamma_j \varphi_j(\tau)] \gamma_j e^{-\gamma_j(t-\tau)} d\tau + A_j(t) \gamma_j G_j \varphi_j(t) = \\ = -2\theta'(t) G_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая значение интеграла из соотношений (11) и (14) и дифференцируя полученные равенства еще раз по t , получается следующее дифференциальное уравнение

$$A_j''(t) + A_j'(t) a_j(t) = -2\theta''(t) G_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

где

$$a_j(t) = \gamma_j [1 + \varphi_j(t) G_j].$$

При этом имеем следующие начальные условия

$$\begin{aligned} A_j(\tau_1) &= -2G_j \theta(\tau_1) \\ A_j'(\tau_1) &= 2G_j [\theta(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) G_j - \theta'(\tau_1)] \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично из уравнения (10) получается следующая система

$$\begin{aligned} [B_{k,j}''(t) + B_{k,j}'(t) a_j(t)] + [D_{k,j}''(t) + D_{k,j}'(t) a_j(t)] \operatorname{th} \alpha_k h_j = \\ = [B_{k,j+1}''(t) + B_{k,j+1}'(t) a_{j+1}(t)] q_{j,j+1} + \\ + [D_{k,j+1}''(t) + D_{k,j+1}'(t) a_{j+1}(t)] q_{j,j+1} \operatorname{th} \alpha_k h_j \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$q_{j,j+1} = \frac{G_j}{G_{j+1}},$$

при следующих начальных условиях

$$\begin{aligned}
 & B_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j = \\
 & = q_{j,j+1} [B_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j]; \\
 & \frac{B'_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D'_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j}{G_j} + [B_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j] \times \\
 & \times \gamma_j \varphi_j(\tau_1) = \frac{B'_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D'_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j}{G_{j+1}} + \\
 & + [B_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j] \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1) \\
 & [j = 1, 2, \dots, (n-1)].
 \end{aligned} \quad (18)$$

Присоединим к этим уравнениям уравнения (8), (9) и (12)

$$B_{k,1}(t) \operatorname{th} \alpha_k h_0 + D_{k,1}(t) = A_1(t) \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_0}; \quad (8')$$

$$B_{k,n}(t) \operatorname{th} \alpha_k h_n + D_{k,n}(t) = A_n(t) \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_n};$$

$$\begin{aligned}
 & [B_{k,j}(t) - B_{k,j+1}(t)] \operatorname{th} \alpha_k h_j + [D_{k,j}(t) - D_{k,j+1}(t)] = \\
 & = [A_j(t) - A_{j+1}(t)] \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_j}; \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)];
 \end{aligned} \quad (9')$$

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n [d_{k,j} B_{k,j}(t) + e_{k,j} D_{k,j}(t) + f_{k,j} A_j(t)]. \quad (12')$$

Здесь

$$d_{k,j} = \frac{4}{\alpha_k^2} (\operatorname{ch} \alpha_k h_j - \operatorname{ch} \alpha_k h_{j-1}); \quad e_{k,j} = \frac{4}{\alpha_k^2} (\operatorname{sh} \alpha_k h_j - \operatorname{sh} \alpha_k h_{j-1});$$

$$f_{k,j} = -\frac{b_k(h_j - h_{j-1})}{\alpha_k}.$$

Итак, имеем $3n + 1$ уравнений в (15), (17), (8'), (9'), (12') и столько же неизвестных функций $A_j(t)$, $B_{k,j}(t)$, $D_{k,j}(t)$, $\theta(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Решая эти уравнения, получим все неизвестные функции, следовательно будем иметь $F(x, y, t)$ в каждой области.

2°. Рассмотрим составной призматический стержень узкого прямоугольного сечения ($a \gg h_n$) (фиг. 3). Предполагается, что слои стержня изготовлены из различных материалов. Число слоев равно n .

Для узкого прямоугольника уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 F_j}{dy^2} = A_j(t). \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19), получим

$$F_j(y, t) = \frac{A_j(t) y^2}{2} + B_j(t) y + D_j(t). \quad (20)$$

Граничные и контактные условия (2)–(4), а также выражения (5) и (6) принимают вид:

$$\frac{A_1(t) h_0^2}{2} + B_1(t) h_0 + D_1(t) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{A_n(t) h_n^2}{2} + B_n(t) h_n + D_n(t) = 0;$$

$$[A_j(t) - A_{j+1}(t)] \frac{h_j^2}{2} + [B_j(t) - B_{j+1}(t)] h_j + [D_j(t) - D_{j+1}(t)] = 0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_j} [A_j(t) h_j + B_j(t)] - \int_{\tau_1}^t [A_j(\tau) h_j + B_j(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{G_{j+1}} [A_{j+1}(t) h_j + B_{j+1}(t)] - \int_{\tau_1}^t [A_{j+1}(\tau) h_j + B_{j+1}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_j(t)}{G_j} - \int_{\tau_1}^t A_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau &= \frac{A_{j+1}(t)}{G_{j+1}} - \int_{\tau_1}^t A_{j+1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau; \\ [j &= 1, 2, \dots, (n-1)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$M = 2a \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{A_j(t)}{6} (h_j^3 - h_{j-1}^3) + \frac{B_j(t)}{2} (h_j^2 - h_{j-1}^2) + D_j(t) (h_j - h_{j-1}) \right\}. \quad (25)$$

Имея в виду уравнение (24), из уравнения (23) легко получается

$$\begin{aligned} \frac{B_j(t)}{G_j} - \int_{\tau_1}^t B_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau &= \frac{B_{j+1}(t)}{G_{j+1}} - \int_{\tau_1}^t B_{j+1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau \\ [j &= 1, 2, \dots, (n-1)]. \end{aligned} \quad (23')$$

Если иметь в виду выражения (13), то система (24) сводится к следующей системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$A_j'(t) + A_j'(t) a_j(t) = q_{j, j+1} [A_{j+1}'(t) + A_{j+1}'(t) a_{j+1}(t)], \quad (26)$$

при начальных условиях:

$$\begin{aligned} A_j(\tau_1) &= q_{j, j+1} A_{j+1}(\tau_1); \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)], \\ \frac{A_j'(\tau_1)}{G_j} + A_j(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) &= \frac{A_{j+1}'(\tau_1)}{G_{j+1}} + A_{j+1}(\tau_1) \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично и для системы (23')

$$B_j^*(t) + B_j^*(t) a_j(t) = q_{j,j+1} [B_{j+1}^*(t) + B_{j+1}^*(t) a_{j+1}(t)]; \quad (28)$$

$$t = \tau_1$$

$$B_j(\tau_1) = q_{j,j+1} B_{j+1}(\tau_1); \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)],$$

$$\frac{B_j^*(\tau_1)}{G_j} + B_j(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) = \frac{B_{j+1}^*(\tau_1)}{G_{j+1}} + B_{j+1}(\tau_1) \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1). \quad (29)$$

Таким образом имеем $3n$ уравнений в (21), (22), (25), (26), (28) и столько же неизвестных функций.

3°. Рассмотрим более конкретный случай, т. е. когда имеем трехслойный стержень узкого прямоугольного сечения (фиг. 4).

Функция напряжения принимает вид

$$F_j(y, t) = \frac{A_j(t) y^2}{2} + B_j(t) y + D_j(t) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (30)$$

Определим неизвестные функции $A_j(t)$, $B_j(t)$, $D_j(t)$.

Из условия симметричности $F_2(y)$ во второй области следует

$$B_2(t) = 0. \quad (31)$$

Имея в виду выражение (31), из системы (23') находим

$$\begin{aligned} B_1(t) - G_1 \int_{\tau_1}^t B_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_1(t, \tau) d\tau &= 0; \\ B_3(t) - G_3 \int_{\tau_1}^t B_3(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_3(t, \tau) d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Система (32) однородных интегральных уравнений, как известно, не имеет решений отличных от нуля. Следовательно

$$B_1(t) = B_3(t) = 0. \quad (33)$$

Из соотношений (21) и (22), имея в виду (31) и (33), получаем:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= -\frac{A_1(t)}{8} (2h_1 + h_2)^2; \\ D_2(t) &= -\frac{1}{8} [4A_1(t) (h_1^2 + h_1 h_2) + A_3(t) h_2^2]; \\ D_3(t) &= -\frac{A_3(t)}{8} (2h_3 + h_2)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Для определения $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) имеем дифференциальные уравнения (26) с начальными условиями (27) и выражение (25)

$$\begin{aligned} A_1'(t) + A_1(t) a_1(t) &= q_{1,2} [A_2'(t) + A_2(t) a_2(t)]; \\ A_2'(t) + A_2(t) a_2(t) &= q_{2,3} [A_3'(t) + A_3(t) a_3(t)]; \end{aligned} \quad (35)$$

$$M = -[A_1(t) H_1 + A_2(t) H_2 + A_3(t) H_3], \quad (36)$$

где

$$H_1 = \frac{a}{6} (4h_1^3 + 9h_1^2 h_2 + 6h_1 h_2^2), \quad H_2 = \frac{a h_2^3}{6}, \quad H_3 = \frac{a}{6} (4h_3^3 + 3h_3^2 h_2).$$

При этом имеем следующие начальные условия:

$$A_1(\tau_1) = q_{1,2} A_2(\tau_1);$$

$$A_2(\tau_1) = q_{2,3} A_3(\tau_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{A_1'(\tau_1)}{G_1} + A_1(\tau_1) \gamma_{11} \varphi_1(\tau_1) &= \frac{A_2'(\tau_1)}{G_2} + A_2(\tau_1) \gamma_{22} \varphi_2(\tau_1); \\ \frac{A_2'(\tau_1)}{G_2} + A_2(\tau_1) \gamma_{22} \varphi_2(\tau_1) &= \frac{A_3'(\tau_1)}{G_3} + A_3(\tau_1) \gamma_{33} \varphi_3(\tau_1); \end{aligned} \quad (37)$$

$$M = -[A_1(\tau_1) H_1 + A_2(\tau_1) H_2 + A_3(\tau_1) H_3];$$

$$A_1'(\tau_1) H_1 + A_2'(\tau_1) H_2 + A_3'(\tau_1) H_3 = 0.$$

Подставив значение $A_3(t)$ из уравнения (36) в систему (35), после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} A_2'(t) + A_2(t) \frac{H_2 G_2 a_3(t) + (H_1 G_1 + H_3 G_3) a_2(t)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} + \\ + A_1'(t) \frac{H_1 G_1 [a_3(t) - a_1(t)]}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} = 0; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_1'(t) + A_1(t) \frac{H_1 G_1 a_3(t) + (H_2 G_2 + H_3 G_3) a_1(t)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} + \\ + A_2'(t) \frac{H_2 G_2 [a_3(t) - a_2(t)]}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} = 0. \end{aligned}$$

Итак, имеем два дифференциальных уравнения с начальными условиями (37), откуда и можно определить $A_1(t)$ и $A_2(t)$.

Систему дифференциальных уравнений (38) можно решить степенными рядами, как в работе [3].

Теперь решим эту систему иным методом в следующих случаях:

а) Предположим, что наружные слои стержня составлены из одного и того же материала, т. е. $G_1 = G_3$. Предположим также, что в первой и третьей областях меры ползучести одинаковы, т. е. $\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau)$, а во второй области — $\omega_2(t, \tau)$.

Учитывая эти предположения, первое уравнение системы (38) запишем так:

$$A_2'(t) + A_2'(t) \left(r_2 + \frac{p_2}{t} \right) = 0, \quad (39)$$

где

$$r_2 = \frac{G_1(H_1 + H_3)(1 + G_2\omega_{02})\gamma_{12} + G_2H_2\gamma_{11}(1 + G_1\omega_{01})}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3},$$

$$p_2 = \frac{G_1G_2\gamma_{12}\omega_{12}(H_1 + H_3) + G_2H_2\gamma_{11}G_1\omega_{11}}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}.$$

Интегрируя уравнение (39) и пользуясь обозначением функции влияния [5], находим

$$A_2(t) = d_1^{(2)} r_2^{-(1-p_2)} [\Phi(r_2 t, p_2) - \Phi(r_2 \tau_1, p_2)] + d_2^{(2)}, \quad (40)$$

где

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau,$$

$d_1^{(2)}$ и $d_2^{(2)}$ — постоянные интегрирования.

Подставляя значения $A_2(t)$ и $a_1(t)$ во второе уравнение системы (38), получим

$$A_1'(t) + A_1'(t) \left(r_1 + \frac{p_1}{t} \right) = \left(m + \frac{n}{t} \right) \frac{e^{-r_2 t}}{t^{p_1}}. \quad (41)$$

Здесь

$$r_1 = \gamma_1(1 + \omega_{01}G_1);$$

$$p_1 = \gamma_1\omega_{11}G_1;$$

$$m = \frac{d_1^{(2)}G_1H_2[\gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_2G_2\omega_{02} - \gamma_1\omega_{01}G_1]}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3};$$

$$n = \frac{d_1^{(2)}H_2G_1[\gamma_2G_2\omega_{12} - \gamma_1G_1\omega_{11}]}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}.$$

Легко видеть, что решение уравнения (41) можно представить так

$$A_1(t) = d_1^{(1)} r_1^{-(1-p_1)} [\Phi(r_1 t, p_1) - \Phi(r_1 \tau_1, p_1)] +$$

$$+ m r_0^{-(1-p_0)} [\Phi(r_0 t, p_0) - \Phi(r_0 \tau_1, p_0)] +$$

$$+ n \int_{\tau_1}^t c^{-(1-k)} [\Phi(c\tau, k) - \Phi(c\tau_1, k)] d\tau + d_2^{(1)}, \quad (42)$$

где

$$r_0 = r_2 - 2r_1; \quad c = r_1 - r_2;$$

$$p_0 = p_2 - 2p_1 - 1; \quad k = p_2 - p_1 - 1.$$

Для постоянных $d_1^{(1)}$, $d_1^{(2)}$, $d_2^{(1)}$ и $d_2^{(2)}$, определяемых из начальных условий [27], получены следующие значения

$$d_1^{(1)} = - \frac{M |\gamma_2 \tilde{\varphi}_2(\tau_1) G_2 - \gamma_1 \tilde{\varphi}_1(\tau_1) G_1| G_1 G_2 H_2 e^{\gamma_1 \tau_1} \tau_1^{p_1}}{[(H_1 + H_2) G_1 + H_2 G_2]^2};$$

$$d_1^{(2)} = \frac{M |\gamma_2 \tilde{\varphi}_2(\tau_1) G_2 - \gamma_1 \tilde{\varphi}_1(\tau_1) G_1| G_1 G_2 (H_1 + H_2) e^{\gamma_1 \tau_1} \tau_1^{p_1}}{[(H_1 + H_2) G_1 + H_2 G_2]^2};$$

$$d_2^{(1)} = - \frac{M G_1}{(H_1 + H_2) G_1 + H_2 G_2}; \quad d_2^{(2)} = - \frac{M G_2}{(H_1 + H_2) G_1 + H_2 G_2}.$$

Имея функции $A_1(t)$ и $A_2(t)$, можем с помощью (36) определить $A_3(t)$. Следовательно, функции $F_i(y, t)$ определены ($i = 1, 2, 3$).

б) Предположим, что наружные слои стержня составлены из одного и того же материала, а средний слой подчиняется закону Гука, т. е.

$$\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau),$$

$$\omega_2(t, \tau) = 0.$$

Имея в виду эти соотношения из системы (38) получим

$$A_2(t) + A_2(t) \left(r_2 + \frac{p_2}{t} \right) = 0;$$

$$A_1(t) + A_1(t) \left(r_1 + \frac{p_1}{t} \right) + A_2(t) \frac{a_1(t)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} = 0. \quad (43)$$

Здесь

$$r_2 = \frac{H_2 G_2 \gamma_1 [1 + \omega_{10} G_1]}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3}; \quad r_1 = \frac{\gamma_1 (1 + \omega_{01} G_1)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3};$$

$$p_2 = \frac{H_2 G_2 \gamma_2 G_1 \omega_{11}}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3}; \quad p_1 = \frac{\gamma_1 \omega_{11} G_1}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3}.$$

Интегрируя первое уравнение системы (43) получаем:

$$A_2(t) = d_1^{(2)} r_2^{-(1-p_2)} [\Phi(r_2 t, p_2) - \Phi(r_2 \tau_1, p_2)] + d_2^{(2)}.$$

Остальные функции определяются аналогично первому случаю.

в) Предположим, что во второй области материал обладает ползучестью, а в первой и третьей областях справедлив закон Гука.

Тогда

$$\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau) = 0, \quad \omega_2(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}].$$

Предполагается, что $G_1 = G_3$.

В этом случае получим

$$A_2^*(t) + A_2^*(t) \left(r + \frac{p}{t} \right) = 0;$$

$$A_1(t) = A_3(t) = - \frac{A_2(t) H_2}{H_1 + H_3} - \frac{M}{H_1 + H_3}; \quad (44)$$

$$t = \tau_1$$

$$A_2(\tau_1) = \frac{M_0}{1 + V};$$

$$A_2^*(\tau_1) = - \frac{M_0 G_2 \gamma \varphi(\tau_1)}{(1 + V)^2}, \quad (45)$$

где

$$r = 1 + \frac{G_2 \gamma \omega_0}{1 + V}; \quad p = \frac{G_2 \gamma \omega_1}{1 + V}; \quad q = \frac{G_2}{G_1};$$

$$M_0 = - \frac{Mq}{H_1 + H_3}; \quad V = \frac{H_2 q}{H_1 + H_2}.$$

Из уравнения (44) для $A_2(t)$ получаем такое компактное выражение

$$A_2(t) = d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)] + d_2.$$

Постоянные d_1 и d_2 определяются из условий (45)

$$d_1 = - \frac{M_0 \tau_1^p e^{-\tau_1} G_2 \gamma \left(\omega_0 + \frac{\omega_1}{\tau_1} \right)}{(1 + V)^2};$$

$$d_2 = \frac{M_0}{(1 + V)}.$$

Определим касательное напряжение во втором слое:

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = A_2(t) y,$$

или

$$\tau_{xz}^{(2)} = y \{ d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)] + d_2 \},$$

при

$$t = \tau_1 \quad \tau_{xz}^{(2)}(y, \tau_1) = d_2 y.$$

Напряжение $\tau_{xz}^{(2)}$ в зависимости от времени можно представить в следующем виде

$$\tau_{xz}^{(2)}(y, t) = R_2(t, \tau_1) \tau_{xz}^{(2)}(y, \tau_1),$$

где

$$R_2(t, \tau_1) = 1 + \frac{d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{d_2}.$$

Функция $R_2(t, \tau_1)$ характеризует изменение напряженного состояния стержня во времени под влиянием линейной ползучести.

Аналогично определяются $\tau_{xz}^{(1)}$ в первом слое

$$\tau_{xz}^{(1)}(y, t) = R_1(t, \tau_1) \tau_{xz}^{(1)}(y, \tau_1),$$

где

$$R_1(t, \tau_1) = 1 + \frac{H_2 d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{M + H_2 d_2}$$

$R_1(t, \tau_1)$ — коэффициент, который характеризует изменения касательного напряжения в первом слое во времени под влиянием ползучести второго слоя.

Для определения жесткости составного стержня получается следующая формула

$$\theta(t) = \theta^*(t, \tau_1) \theta(\tau_1),$$

где

$$\theta^*(t, \tau_1) = 1 + \frac{H_2 d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{M + H_2 d_2}.$$

Ниже, в таблице, приводится результат вычислений значений коэффициентов $R_1(t, \tau_1)$, $R_2(t, \tau_1)$ и $\theta^*(t, \tau_1)$ в зависимости от времени t для железобетонной балки с узким прямоугольным поперечным сечением, армированной с обеих сторон и находящейся под действием постоянных крутящих моментов M , приложенных на ее торцах в возрасте бетона $\tau_1 = 14$ дней.

Приняты следующие характеристики меры ползучести бетона при чистом сдвиге:

$$\omega_1 = 12,05 \cdot 10^{-5}; \quad \omega_0 = 2,25 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026;$$

$$G_1 = G_3 = G_{\text{ж}} = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad G_2 = G_6 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2;$$

$$q = 0,1; \quad \tau_1 = 14 \text{ дней}; \quad h_1 = h_3 = \frac{1}{10} h; \quad h_2 = h.$$

Таблица

t в днях	14	28	45	90	180	∞
$R_1(t, \tau_1)$	1	1,0653	1,0973	1,1078	1,1085	1,1085
$R_2(t, \tau_1)$	1	0,5023	0,2904	0,2121	0,2087	0,2087
$\theta^*(t, \tau_1)$	1	1,0653	1,0973	1,1078	1,1085	1,1085

Из таблицы видно, что начальные касательные напряжения в бетоне $\tau_{xz}^{(2)}$ с течением времени под влиянием линейной ползучести очень быстро затухают.

Ереванский государственный
университет

По ступила 19 IX 1958

Վ. Ս. Սարգսյան

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ
ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածի առաջին մասում քննարկված է ուղղանկյուն ընդլայնական հատվածք ունեցող բազմաշերտ իզոտրոպ առաձգական ձողերի ոլորման խնդիրը: Լուծումը ներկայացված է անվերջ եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, զործակիցների համար ստացված են սեկուրենտ համասարումներ: Որպես մասնավոր դեպք առաջադրված է բարակ ($\alpha \gg h_0$) բազմաշերտ առաձգական ձողերի ոլորման խնդիրը: Ստացված են լարումների կոշտության համար կոմպակտ արտահայտություններ:

Հոդվածի երկրորդ մասում հետազոտված է բազադրվալ ձողերի ոլորման խնդիրը սողքի հաշվառումով:

Տրված է բարակ շերտավոր ձողերի ոլորման խնդրի լուծումը դժպին սողքի հաշվառումով, ստացված են արտահայտություններ՝ կախված է ժամանակից ոլորման անկյան և լարումների կոմպոնենտների համար:

Վերջում, բարակ եռաշերտ ձողի ոլորման խնդրի լուծման ժամանակ ստացված արդյունքների համար կազմված է աղյուսակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
2. Чобанян К. С. Применение функции напряжения в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и технич. наук, т. VIII, № 2, 1955.
3. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести. Изв. АН СССР, отд. технических наук, № 6, 1956.
4. Лехницкий С. Г. Кручение многослойного прямоугольного стержня. Инженерный сборник, т. 23, 1956.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.