

С. Е. Карапетян

Пара A и некоторые свойства пары T

1. В этой статье рассматриваются две конгруэнции, которые удовлетворяют требованию, изложенному в пункте 2. В работе применен метод внешних форм Картана [1].

Инфинитезимальное перемещение свободного точечного репера $\{A_i\}$ в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (A)$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^s \omega_s^k].$$

Рассмотрим две гиперболические конгруэнции k, k' , между лучами которых установлено взаимно-однозначное соответствие так, что соответствующие лучи не пересекаются.

Отнесем конгруэнцию k к координатному тетраэдру $\{A_i\}$ первого порядка [2], т. е. совместим две вершины A_1, A_2 тетраэдра с фокусами этой конгруэнции и две грани ее — с фокальными плоскостями; тогда компоненты инфинитезимального преобразования будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \quad (1)$$

При этом ребро тетраэдра A_3A_4 остается совершенно произвольным. Поэтому, не нарушая общности, можно его совместить с соответствующим лучом второй конгруэнции.

Дифференциалы аналитических прямых $\{A_1A_2\} \equiv [12]$, $\{A_3A_4\} \equiv [34]$, в силу уравнений (A) и (1), напишутся в виде:

$$\begin{aligned} d[12] &= (\omega_1^3 + \omega_2^4)[12] - \omega_1^3[23] + \omega_2^4[14], \\ d[34] &= (\omega_3^1 + \omega_4^2)[34] - \omega_4^2[23] + \omega_3^1[14] - \omega_1^3[13] - \omega_2^4[42]. \end{aligned} \quad (2)$$

Из первого уравнения этой системы следует, что ω_1^3 и ω_2^4 являются линейно независимыми формами. Так как установлено взаимнооднозначное соответствие между лучами конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) , то

все формы, от которых зависит луч (A_3A_4) , должны быть линейно зависимыми от форм ω_1^3, ω_2^4

$$\begin{aligned}\omega_3^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + a'\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= c\omega_1^3 + e\omega_2^4, & \omega_4^1 &= e'\omega_1^3 + c'\omega_2^4.\end{aligned}\quad (3)$$

2. В этом пункте познакомимся с понятием, приводящим к новой паре конгруэнций, для которой пара T является особым случаем.

С каждым лучом конгруэнции (A_1A_2) будем связывать принадлежащую этой конгруэнции некоторую линейчатую поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$. Аналогичная линейчатая поверхность для второй конгруэнции пусть определяется уравнением $\omega_2^4 = \lambda'\omega_1^3$ (вообще $\lambda \neq \lambda'$). Потребуем, чтобы касательная плоскость каждой из этих линейчатых поверхностей вдоль каждого луча конгруэнции проходила через точку касания другой линейчатой поверхности.

Касательная плоскость линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ в точке $A_1 + \rho A_2$ определяется тремя точками $A_1, A_2, A_3 + \lambda\rho A_4$ и пересекается с соответствующим лучом A_3A_4 в точке $A_3 + \lambda\rho A_4$. Касательная плоскость линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda'\omega_1^3$ в точке $A_3 + \lambda'\rho A_4$ определяется тремя точками

$$A_3, A_4, \{a + \lambda'b + \lambda\rho(e' + \lambda'c')\}A_1 + \{c + \lambda'e + \lambda\rho(b' + \lambda'a')\}A_2.$$

Эта плоскость пройдет через точку касания $(A_1 + \rho A_2)$ линейчатой поверхности первой конгруэнции тогда и только тогда, когда будет выполнено уравнение

$$\rho^2\lambda(e' + \lambda'c') + \rho(a + \lambda'b - \lambda b' - \lambda\lambda'a') - c - \lambda'e = 0. \quad (4)$$

Это соотношение показывает, что вообще для каждой пары соответствующих лучей конгруэнций k и k' (с произвольными λ и λ') существуют только две точки, удовлетворяющие нашему требованию.

Наше требование выполняется для каждой точки соответствующих лучей конгруэнций только при условиях

$$\begin{aligned}e' + \lambda'c' &= 0, & c + \lambda'e &= 0, \\ a + \lambda'b - \lambda(b' + \lambda'a') &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Из первых двух уравнений непосредственно получим

$$[\omega_2^3\omega_4^1] = 0 \quad (6)$$

—единственное условие, которому должны удовлетворять конгруэнции (kk') . Остальные два уравнения системы (5) однозначно определяют λ и λ' .

Естественно рассмотреть тот случай, когда через каждый луч проходит ∞^1 линейчатых поверхностей, удовлетворяющих нашему требованию. Из системы (5) легко заметить, что для этого необходимо и достаточно выполнение уравнений

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (1) и (7) характеризуют пару Т Финикова [3], [4]. Эта пара определяется следующим образом: две конгруэнции, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, образуют пару Т, если можно так сопоставить фокусы соответствующих лучей, чтобы прямые, соединяющие сходственные фокусы, касались фокальных поверхностей и первой и второй конгруэнций.

В случае (7) одна из линейчатых поверхностей задается произвольно, а вторая линейчатая поверхность определяется последним уравнением (5).

Таким образом: *одна из линейчатых поверхностей конгруэнций задается произвольно тогда и только тогда, когда эти конгруэнции образуют пару Т.*

3. В этом пункте рассмотрим случай, когда линейчатые поверхности $\omega_2^1 = \lambda \omega_1^1$ и $\omega_2^2 = \lambda' \omega_1^2$ соответствуют друг другу. В дальнейшем их назовем *главными линейчатыми поверхностями пары*.

Согласно этому требованию будем иметь:

$$\lambda = \lambda'. \quad (8)$$

В силу (8) из системы (5) получим (6) и еще два уравнения

$$c + e\lambda = 0, \quad c e (b - b') + a' c^2 - a e^2 = 0. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (9) определяет *единственную главную линейчатую поверхность* для пары конгруэнций (kk') , второе уравнение той же системы накладывает новое условие на (kk') . В дальнейшем, для краткости изложения, мы эту пару назовем *парой (А)*.

Если потребовать существование по меньшей мере двух главных линейчатых поверхностей, то из системы (5) получим уравнения (7) и еще одно квадратное уравнение относительно λ :

$$\lambda^2 a' - \lambda (b - b') - a = 0. \quad (10)$$

Следовательно, и в этом пункте *неединственность главных линейчатых поверхностей приводит к паре Т.*

4. Как известно, каждая прямая проективного пространства P_3 изображается в перенесении Плюккера точкой гиперквадрики Q_1^2 в P_5 . Двум прямым L_1 и L_2 в P_3 соответствуют две точки L_1, L_2 на гиперквадрике и, следовательно, прямая линия $L_1 L_2$ в P_5 . Отсюда двум конгруэнциям, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, присоединено двупараметрическое семейство прямых в P_3 . Известно также [5], что двупараметрическое семейство $(L_1 L_2)$ в P_5 имеет два фокальных подсемейства только для пары Т, и это свойство характеризует пару Т.

Докажем следующую теорему: *для пары А, и только для нее, двупараметрическое семейство прямых $(L_1 L_2)$ в P_5 обладает одним фокальным подсемейством.*

Действительно, если $F = [12] + \rho[34]$ есть фокус луча $L_1 L_2$ и $\omega_2^1 = \sigma \omega_1^1$ — уравнение подсемейства, то согласно (2) будем иметь

$$[\omega_1^3 + \rho\omega_2^3, \omega_2^4 - \sigma\omega_1^4] = 0, \quad [\omega_2^4 + \rho\omega_1^4, \omega_1^3 - \sigma\omega_2^3] = 0, \quad (11)$$

$$[\omega_1^4, \omega_2^3 - \sigma\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_2^3, \omega_1^4 - \sigma\omega_2^4] = 0. \quad (12)$$

Эти четыре уравнения для ρ и σ дадут одно решение только при условии

$$c + \sigma e = 0, \quad [\omega_3^1 \omega_4^2] = 0, \quad ce(b - b') + a'e^2 - ae^3 = 0. \quad (13)$$

Последние два уравнения системы (13) характеризуют пару (A), первое уравнение определяет σ , которая в силу (9) равна λ , т. е. *главные линейчатые поверхности пары (A) соответствуют развертывающимся поверхностям двупараметрического семейства прямых $(L_1 L_2)$ в P_5* .

Системы (11) и (12) допускают два решения для ρ и σ тогда и только тогда, когда конгруэнции k и k' образуют пару T .

Таким образом получаем следующую более общую теорему: *двупараметрическое семейство прямых $(L_1 L_2)$ в P_5 является фокальным тогда и только тогда, когда оно является образом либо пары A, либо пары T, причем для пары A это семейство имеет только один фокус, а для пары T — два фокуса (действительных, различных, мнимых сопряженных или совпавших).*

Если пара конгруэнций (kk') составляет пару T , то развертывающиеся поверхности конгруэнции $(L_1 L_2)$ в P_5 (или, как Калапсо [7], [8] называет, главные направления пары T) определяются из системы уравнений (11)

$$\sigma^2 a' - \sigma(b - b') - a = 0$$

и в силу (10) немедленно получим $\sigma = \lambda$, т. е. *направления главных линейчатых поверхностей пары T совпадают с главными направлениями той же пары.*

5. Рассмотрим случай, когда линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям первой фокальной поверхности, конгруэнции $(A_1 A_2)$ пары T , совпадают с главными линейчатыми поверхностями. Как известно ([2], стр. 351), асимптотические линии поверхности (A_1) относительно тетраэдра первого порядка конгруэнции определяются дифференциальным уравнением

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (14)$$

В силу уравнения (10) дифференциальное уравнение главных линейчатых поверхностей напишется в виде

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + (b - b')\omega_1^3\omega_2^4 - a'(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (15)$$

Поверхности (14) и (15) совпадают тогда и только тогда, когда

$$b - b' = 0, \quad (16)$$

$$2a' + \gamma a = 0. \quad (17)$$

Как известно [3] и [4], пара T определяется уравнениями (1) и (7). Внешнее дифференцирование этих уравнений и их раскрытие приводят к линейным уравнениям

$$\begin{aligned}\omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + a'\omega_2^4,\end{aligned}\quad (18)$$

и еще к двум конечным уравнениям

$$\begin{aligned}a\gamma + a'\alpha &= \beta(b - b'), \\ \alpha\gamma' + \alpha'\gamma' &= \beta'(b' - b).\end{aligned}\quad (19)$$

В силу уравнения (16) из системы (19) получим либо

$$\alpha\gamma' - \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha a' + \gamma a = 0, \quad (20)$$

либо

$$a = 0, \quad a' = 0. \quad (21)$$

В первом случае, когда выполняются уравнения (16) и (20), пара T образует известную конфигурацию Бианки (см. [3], стр. 259—262). Эта конфигурация характеризуется следующими свойствами: асимптотические линии на всех фокальных поверхностях пары T соответствуют друг другу, следовательно, все четыре конгруэнции этой пары являются конгруэнциями W .

Во втором случае, когда выполняются уравнения (16) и (21), главные линейчатые поверхности (15) становятся неопределенными, развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют накрест и, следовательно, вспомогательные конгруэнции (A_1A_3) и (A_2A_4) принадлежат одному и тому же линейному комплексу. В этом случае две конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) являются полярно сопряженными относительно нулевой системы этого линейного комплекса.

Таким образом: если главные линейчатые поверхности пары T совпадают с линейчатыми поверхностями, соответствующими асимптотическим линиям какой-либо фокальной поверхности пары, то либо пара T является конфигурацией Бианки, либо ее вспомогательные конгруэнции принадлежат одному линейному комплексу.

6. В этом пункте рассмотрим случай, когда главные линейчатые поверхности пары T соответствуют гармоническим линиям одной фокальной поверхности первой конгруэнции пары.

Как известно [8], [9], гармоническими одной фокальной поверхности называются такие линейчатые поверхности конгруэнции, квадрики Ли которых пересекаются с этой фокальной поверхностью по двум фокальным касательным.

Линии на этой фокальной поверхности, соответствующие гармоническим линейчатым поверхностям, называются гармоническими линиями [8], [10], [11], [12].

Гармонические линии фокальной поверхности (A_1) определяются уравнениями

$$\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (22)$$

Согласно требованию дифференциальные уравнения (22) и (15) должны определять одни и те же линии, а для этого необходимо и достаточно выполнение равенств

$$b - b' = 0, \quad \alpha a' - \gamma a = 0. \quad (23)$$

Система уравнений (19) в силу (23) напишется в виде

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad b - b' = 0.$$

Эти соотношения снова характеризуют пару T , вспомогательные конгруэнции которой принадлежат одному линейному комплексу. Итак: *гармонические линии одной фокальной поверхности пары T соответствуют главным линейчатым поверхностям тогда и только тогда, когда вспомогательные конгруэнции пары принадлежат одному линейному комплексу.*

Для такой пары T , как видно из уравнения (15), главные линейчатые поверхности станут неопределенными.

7. В этом пункте мы докажем следующую теорему: *главные линейчатые поверхности пары T и ее вспомогательной пары соответствуют друг другу.*

Уравнение главных линейчатых поверхностей (15), в силу (3), можно записать в виде

$$\omega_1^3 \omega_3^1 - \omega_2^4 \omega_4^2 = 0. \quad (24)$$

Изменим обозначения вершин пары T следующим образом

$$\bar{A}_1 = A_3, \quad \bar{A}_2 = A_1, \quad \bar{A}_3 = A_4, \quad \bar{A}_4 = A_2. \quad (25)$$

Согласно (25) пара T с конгруэнциями $(\bar{A}_1 \bar{A}_2) \equiv (A_3 A_1)$, $(\bar{A}_3 \bar{A}_4) \equiv (A_4 A_2)$ и ее компоненты $\bar{\omega}_i^k$ получаются из первоначальной пары посредством замены индексов по закону $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Согласно (24) уравнение главных линейчатых поверхностей пары $(\bar{A}_1 \bar{A}_2)$, $(\bar{A}_3 \bar{A}_4)$ напишется в виде

$$\bar{\omega}_1^3 \bar{\omega}_3^1 - \bar{\omega}_2^4 \bar{\omega}_4^2 = 0,$$

которое, после замены индексов, равносильно уравнению

$$\omega_1^2 \omega_2^1 - \omega_3^4 \omega_4^3 = 0,$$

а последнее уравнение, в силу системы (3), эквивалентно уравнению

$$(\alpha\beta' + \beta\gamma')(\omega_1^3)^2 + (\gamma\gamma' - \alpha\alpha')\omega_1^3\omega_2^4 + (\beta\alpha' + \gamma\beta')(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (26)$$

В силу условий (19) уравнения (15) и (26) совпадают. Обращение в нуль всех коэффициентов уравнения (26) означает, что конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) принадлежат к одному линейному комплексу.

Армянский пед. институт
им. Х. Абовяна

Поступила 27 X 1958

Ս. Ե. Կարապետյան

Ա ՉՈՒՅԳԸ ԵՎ T ՉՈՒՅԳԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են k և k' երկու կոնգրուենցիաներ, որոնք միացվում են երրորդ կոնգրուենցիայով ախպես, որ վերջինի ֆոկալ (գծավոր) մակերևույթներից մեկը պատկանի k -ին, մյուսը k' -ին: Ապացուցվում է, որ՝

1. Այդ գծավոր մակերևույթները միակն են, եթե (kk') զույգը T չէ:
2. Եթե (kk') կոնգրուենցիաների զույգը T է, ապա գծավոր մակերևույթներից ցանկացած մեկը ընտրվում է կամավոր, իսկ մյուսը որոշվում է միարժեք ձևով:

Եթե այդ գծավոր մակերևույթները համապատասխանում են միմյանց, ապա նրանք կոչվում են գլխավոր գծավոր մակերևույթներ, իսկ (kk') զույգը կոչվում է A զույգ:

3. T -ից տարբեր A զույգի մեջ գոյություն ունի միակ գլխավոր մակերևույթը:

4. T զույգում գոյություն ունեն աննվազն երկու գլխավոր մակերևույթներ: Այդ մակերևույթները համընկնում են նրանց գլխավոր ուղղությունների հետ:

5. k և k' զույգին համապատասխանող ուղիղների ընտանիքը P_3 -ում ֆոկուսային է միմիայն աչն զեպքում, երբ նա կամ A զույգի, կամ T զույգի արտապատկերումն է, ըստ որում A զույգի համար նա ունի միայն մեկ ֆոկուս, իսկ T զույգի համար՝ երկու ֆոկուս:

6. Եթե զույգի գլխավոր գծավոր մակերևույթները համընկնում են որևէ կոնգրուենցիայի ասիմպտոտական գծավոր մակերևույթների հետ, ապա T -ն դառնում է կամ Բիանկիի կոնֆիգուրացիան կամ նրա օժանդակ կոնգրուենցիաները պատկանում են միևնույն կոմպլեքսին:

7. T զույգի և նրա օժանդակ զույգի գլխավոր գծավոր մակերևույթները իրար համապատասխանում են:

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, М., 1948.
 2. Фиников С. П. Теория конгруэнций, М., 1950.
 3. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
 4. Финиква С. П. Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.
- 3 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 4

5. Розенфельд Б. А., Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах. Математический сб., 22, 437—492, (1948).
6. Calapso (Calapso R.), Sur la configuration de M. Finikoff et sur les elements projectifs qui s'y rattachent. Mat. сб. 1935, 42, 451—458.
7. Calapso. Sur la configuration (T) de Finikoff et sur les elements projectifs qui s'y rattachent. ДАН СССР 1935 2, 441—446.
8. Карапетян С. Е., Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Научные доклады ВШ., 1958, № 1.
9. Карапетян С. Е., Поверхность второго порядка ли для линейчатых поверхностей конгруэнции. ДАН СССР, 117, 2, (1957).
10. Карапетян С. Е., Гармонические квадратики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. ДАН СССР, 122, 3, (1958).
11. Карапетян С. Е., Преобразование конгруэнций с помощью демиквадрик. Мат. сб., в печати.
12. Карапетян С. Е., Две конгруэнции с общими инвариантами F и F' . Научные доклады ВШ., 2, (1958).