

Г. В. Бадалян

О некоторых граничных свойствах функций, представимых обобщенным рядом Тейлора

В настоящей работе доказываются аналоги теорем М. П. Щеглова „О поведении степенного ряда на круге сходимости“ (см. [1]; 101—130) для обобщенного ряда Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad (1)$$

где

$$t \in (0, 1], \quad \omega_n(t) = \frac{\prod_{s=1}^n \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{s=0}^n (\zeta + \gamma_s)}, \quad \omega_0(t) = 1, \quad (2)$$

$$\gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_s} = \infty, \quad (3)$$

а простой контур C здесь и впредь, в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подинтегральной функции.

В работе использован метод М. П. Щеглова, который существенным образом приспособлен для наших целей.

Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма А. Пусть функция $g(t)$, $t > 0$ обладает свойствами:

1. существуют $g'(t)$, $g_2(t) = \left(\frac{g'(t)}{t^{n-1}} \right)'$ при $t > 0$;
2. $g(t_m) = o(1)$, а $t_m \rightarrow 0$ по последовательности $\{t_m\}$, где

$$(a) \begin{cases} t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \\ \frac{t_m}{t_{m+1}} < d, \quad \text{где } d > 1 \text{ любое конечное число;} \end{cases}$$

3. $t^{n+1} g_2(t) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$,

тогда

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Для доказательства рассмотрим формулу

$$g(t) - g(t_m) = \frac{g'(t_m)}{t_m^{\gamma_1-1}} \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 + \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_{t_m}^{t_1} g_2(t_2) dt_2 \quad (4)$$

см. [2], стр. 3.

Заметим также, что

$$\int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 = -t_m^{\gamma_1} \omega_1\left(\frac{t}{t_m}\right), \quad (5)$$

а

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_{t_m}^{t_1} dt_2 &= - \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1-1} \frac{t_m}{2\pi i} \int_{\zeta}^{\left(\frac{t_1}{t_m}\right)^{-\zeta}} d\zeta dt_1 = \\ &= \frac{t_m^{\gamma_1+1}}{2\pi i} \int_{\zeta}^{\left(\frac{t}{t_m}\right)^{-\zeta+\gamma_1}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta+1)(\zeta-\gamma_1)} = t_m^{\gamma_1+1} \omega_2\left(\frac{t}{t_m}\right), \end{aligned} \quad (5')$$

где

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta+\gamma_1)}, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta+\gamma_1)(\zeta+\gamma_1+1)} \quad (5'')$$

см. [2] стр. 6.

Из (4) в силу (5) и (5') получаем

$$\begin{aligned} g(t) - g(t_m) &= t_m g'(t_m) \omega_1\left(\frac{t}{t_m}\right) + \\ &+ g_2(\xi) t_m^{\gamma_1+1} \omega_2\left(\frac{t}{t_m}\right), \quad t \leq \xi \leq t_m. \end{aligned} \quad (4')$$

Согласно условиям леммы можно указать число $\eta = \eta(\varepsilon)$, такое, что

$$\begin{aligned} |g(t_m)| &< \varepsilon, \quad t_m \in (0, \eta), \\ |t_m^{\gamma_1+1} g_2(t)| &< \varepsilon, \quad t \in (0, \eta). \end{aligned} \quad (6)$$

Подберем числа r и s так, чтобы

$$0 < r < s < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1-r}{1-s} > d. \quad (7)$$

Последовательность $\{t_m\}$ имеет хотя бы один, отличный от t_m , элемент, принадлежащий интервалу

$$(t_m - st_m, t_m - rt_m), \text{ см. [1], стр. 110.}$$

Пусть t_m^* тот элемент, который принадлежит $(t_m - st_m, t_m - rt_m)$. Составим

$$g(t_m^*) - g(t_m) = t_m g'(t_m) \omega_1\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) + g_2(\xi) t_m^{n+1} \omega_2\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right), \quad (4'')$$

где

$$\omega_1(t) \text{ и } \omega_2(t) \text{ определены в (5''),}$$

и заметим, что $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ при $t \in (0, 1]$ монотонно убывают, тогда из условия, что

$$t_m(1-s) < t_m^* < t_m(1-r) < t_m, \quad (8)$$

следует, что

$$\omega_1(1-r) < \omega_1\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) < \omega_1(1-s)$$

и

$$\omega_2(1-r) < \omega_2\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) < \omega_2(1-s). \quad (9)$$

Из (4'') в силу (9) получаем

$$|t_m g'(t_m)| \leq \frac{|g(t_m^*) - g(t_m)|}{\omega_1(1-r)} + |g_2(\xi) \xi^{n+1}| \left(\frac{t_m}{\xi}\right)^{n+1} \frac{\omega_2(1-s)}{\omega_1(1-r)}.$$

Таким образом, в силу (6) получаем

$$|t_m g'(t_m)| < \frac{2\varepsilon}{\omega_1(1-r)} + \varepsilon \left(\frac{t_m}{\xi}\right)^{n+1} \frac{\omega_2(1-s)}{\omega_1(1-r)}, \quad t_{m+1} \leq \xi < t_m,$$

но $\frac{t_m}{\xi} \leq \frac{t_m}{t_m^*} < \frac{1}{1-s}$, значит

$$|t_m g'(t_m)| < \varepsilon \cdot k,$$

где $k = k(s, r) > 0$ конечное число.

Лемма В. Пусть функция $g(t)$, $t > 0$ обладает свойствами:

1. существуют $g'(t)$, $g_2(t)$, $t > 0$,

2. $g(t_m) = o(1)$, $t_m \rightarrow 0$ по последовательности $\{t_m\}$, где $\{t_m\}$ удовлетворяет условиям

$$(\beta) \quad t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+i}} = 1,$$

3. $t^{n+1} g_2(t) = o(1)$, $t \rightarrow 0$,

тогда

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad t_m \rightarrow 0.$$

Для доказательства заметим, что при заданном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом m будем иметь

$$|g(t_m)| < \varepsilon^{2\gamma},$$

$$\frac{t_m}{t_{m+1}} < \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (10)$$

$$|g_2(t) t^{\gamma+1}| < C < \infty, \quad \text{где } t \in (0, 1].$$

С другой стороны, начиная с некоторого номера, в интервал $(t_m - \varepsilon t_m, t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m)$ попадает хотя бы одно из чисел t_m , иначе, если

$$t_{m_1} > t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m, \quad t_{m_1+1} < t_m - \varepsilon t_m,$$

то

$$\frac{t_{m_1}}{t_{m_1+1}} > \frac{1-\frac{\varepsilon}{3}}{1-\varepsilon}, \quad (\text{см. [1], стр. 120})$$

чего быть не может.

Это значит, что некоторый

$$t_m^* \in \{t_m\}, \quad t_m^* \in (t_m - \varepsilon t_m, t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m). \quad (11)$$

Заметим, наконец, что

$$\omega_1(1-\varepsilon) = C \cdot \varepsilon^{\gamma_1} + o(\varepsilon^{\gamma_1}), \quad (12)$$

а

$$\begin{aligned} \omega_2(1-\varepsilon) &= (1-\varepsilon)^{\gamma_2-1} \int_1^{1-\varepsilon} x^{-\gamma_2} \omega_1(x) dx < \\ &< (1-\varepsilon)^{\gamma_2-1} \cdot (1-\varepsilon)^{-\gamma_1} \cdot \omega_1(1-\varepsilon) \int_1^{1-\varepsilon} dx \end{aligned}$$

или

$$\omega_2(1-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \omega_1(1-\varepsilon). \quad (13)$$

Из (4'') в силу (10), (11), (12) и (13) получаем

$$t_m g'(t_m) \leq C_1 \varepsilon^{2\gamma_1-1} + C \left(\frac{t_m}{\varepsilon}\right)^{\gamma_1+1} \cdot \frac{\omega_2\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\omega_1(1-\varepsilon)}$$

или

$$|t_m g'(t_m)| \leq (C_1 + C_2) \varepsilon^{\delta}, \quad (14)$$

где

$$\delta = \min(\gamma_1, 1).$$

Этим лемма доказана.

Лемма С. Пусть функция $g(t)$, $t > 0$ обладает свойствами:

1. существует $g_2(t)$ при $t > 0$,
2. $g(t_m) = O(1)$, $t_m \rightarrow 0$ по последовательности $\{t_m\}$, где последовательность $\{t_m\}$ удовлетворяет условиям леммы А,
3. $g_2(t) \cdot t^{i+1} = O(1)$, $t \rightarrow 0$,

тогда

$$g'(t_m) t_m = O(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Лемма доказывается повторением всего хода доказательства леммы А, поэтому мы его не приводим.

Теорема А. Пусть даны:

1. $\{a_n\}$, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$,
2. $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$, $t \in (0, 1]$,
3. $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S$, где S — некоторое число (конечное), а $t_m \rightarrow 0$ по последовательности, удовлетворяющей условиям (а) леммы А,

тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Доказательство.

Из условия 1 следует, что ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) \quad (15)$$

сходится в $t \in (0, 1]$.

Составим

$$g(t) = \varphi(t) - S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) - S \quad (15')$$

и покажем, что $g(t)$ удовлетворяет всем условиям леммы А.

Действительно, зная, что внутри своего промежутка сходимости ряд (15) можно дифференцировать почленно в любое число раз (см. [2]), получаем

$$g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta-\gamma_n-1}}{\prod_{\gamma} (\zeta + \gamma_n)} d\zeta \quad (16)$$

или

$$t^{n+1} g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \gamma_n \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)}; \quad (16')$$

значит

$$\begin{aligned} |t^{n+1} g_2(t)| &\leq A \sum_{n=2}^N \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)} + \\ &+ \varepsilon_N \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)}, \end{aligned}$$

где

$$A = \max_{2 \leq n \leq N} |\gamma_n \cdot a_n|, \quad \varepsilon_N = \max_{n > N} |a_n \gamma_n|,$$

или

$$\begin{aligned} |t^{n+1} g_2(t)| &\leq A \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=2}^N \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)} t^{-\zeta} d\zeta + \\ &+ \varepsilon_N \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)} t^{-\zeta} d\zeta = \\ &= A \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \left[1 - \prod_{v=2}^N \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v} \right] \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} + \\ &+ \varepsilon_N \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=2}^{N+1} \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (16'')$$

Известно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\prod_1^n \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{s=0}^n (\zeta + \gamma_s)} = 1 \quad (\text{см. [3] стр. 8}).$$

Это значит, что для всякого $\varepsilon < 0$ можно указать $\eta > 0$, такое, что

$$|t^{n+1} g_2(t)| < \varepsilon, \quad t \in (0, \eta). \quad (17)$$

т. е.

$$t^{n+1} g_2(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (17')$$

Из условия 3 и (15') следует, что

$$g(t_m) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (18)$$

Этим удовлетворены условия леммы А, значит

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad t_m \rightarrow 0. \quad (19)$$

Согласно условию 1 для каждого n существует число $\varepsilon_n > |a_n \gamma_n|$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, значит

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n - a_n \gamma_n) \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z-1} dz}{\prod_{s=1}^n (\zeta + \gamma_s)} > 0, \quad (20)$$

но

$$- \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z-1} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} = g'(t);$$

следовательно

$$\psi(t) = t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} + g'(t). \quad (20')$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} = o(1), \quad \text{когда } t \rightarrow 0 \quad (21)$$

в чем можно убедиться, повторяя ход оценки $t^{n+1} g_2(t)$.

Из (20') в силу (19) и (21) следует, что

$$t_m \psi(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Покажем теперь, что из (22) в силу свойств последовательности $\{t_m\}$ следует, что

$$t \psi(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Действительно, из (20) следует, что

$$t^{1-\gamma_1} \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n - a_n \gamma_n) \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{j=1}^n (\zeta + \gamma_j - \gamma_1)}, \quad (20'')$$

где каждый член ряда правой части (20'') при $t \in (a, 1]$ монотонно убывает, следовательно, при $t \rightarrow 0$

$$t^{1-\gamma_1} \psi(t)$$

монотонно возрастает.

Это значит, что

$$t_m^{1-\gamma_1} \psi(t_m) \leq t^{1-\gamma_1} \psi(t) \leq t_{m+1}^{1-\gamma_1} \psi(t_{m+1}), \quad (23)$$

где

$$t_{m+1} \leq t \leq t_m,$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t}{t_m}\right)^{\gamma_1} \leq t \psi(t) \leq \left(\frac{t}{t_{m+1}}\right)^{\gamma_1} t_{m+1} \psi(t_{m+1}). \quad (23')$$

Последнее неравенство еще более усилится, если его записать в виде

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t_{m+1}}{t_m}\right)^{\gamma_1} \leq t \psi(t) \leq \left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{\gamma_1} t_{m+1} \psi(t_{m+1}). \quad (23'')$$

Зная, что $t_m \psi(t_m) = o(1)$ и $1 < \frac{t_m}{t_{m+1}} \leq d < \infty$, заключаем, что вообще

$$t \psi(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (24)$$

Возвращаясь теперь к

$$t \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{j=1}^n (\zeta + \gamma_j)} + t g'(t), \quad (20''')$$

в силу (21) и (24) получаем, что

$$t g'(t) = o(1) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (25)$$

Из равенства

$$g(t) = g(t_m) + (t - t_m) g'(\xi), \quad t_{m+1} < t < \xi < t_m$$

в силу (18) и (25) следует, что

$$g(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (18')$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно вспомнить, что

$$g(t) = \varphi(t) - S,$$

откуда в силу (18') получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = S.$$

Этим теорема А доказана.

Теорема А. Пусть последовательность чисел $(t_m) \in (0, 1]$ обладает свойствами

$$(a) \quad \begin{cases} t_m \downarrow 0, & m \rightarrow \infty, \\ \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty, \end{cases}$$

тогда существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, такой, что

$$1. \quad a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty,$$

$$2. \quad \varphi(t_m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) = o(1),$$

где $t_m \rightarrow 0$ по последовательности (a),

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t).$$

Лемма А. Если

$$a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{s=1}^n \frac{1}{\gamma_s^2}}\right), \quad S_m = \sum_0^m a_n,$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

тогда справедливо соотношение

$$S_m = \varphi(t_m) + o(1), \quad (26)$$

где

$$\tau_m = \prod_{\nu=2}^m \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu} \right)^{1/\gamma_1}.$$

Доказательство леммы.

Действительно

$$S_m - \varphi(t) = \sum_{n=1}^m a_n [1 - \omega_n(t)] = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

согласно условию

$$|a_n| < \frac{\varepsilon_n}{\gamma_n}, \quad \text{где } \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\gamma_\nu^2}}\right). \quad (27)$$

Известно также, что

$$0 < 1 - \omega_n(t) < C \cdot t^{\gamma_1} \prod_{\nu=2}^n \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu - \gamma_1}, \quad (28)$$

см. [4], стр. 9.

Это значит, что

$$\begin{aligned} |S_m - \varphi(t)| &\leq C t^{\gamma_1} \sum_{n=1}^m \varepsilon_n \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^n (\gamma_\nu - \gamma_1)} + \\ &+ \varepsilon'_m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)}, \quad \varepsilon'_m = \max_{n \geq m} \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Из факта $\varepsilon_n \rightarrow 0$ когда $n \rightarrow \infty$ следует, что при достаточно большом m

$$\prod_{\nu=2}^m \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} \sum_{n=1}^m \varepsilon_n \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^n (\gamma_\nu - \gamma_1)} < \frac{\varepsilon}{C}, \quad (30)$$

(см. [3] стр. 3—4).

С другой стороны,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \frac{\prod_1^m \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=0}^m (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= \prod_{v=1}^m \gamma_v \left[\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta^2 \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right],$$

где контур C' — оставляет вне области точку $\zeta=0$;

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta^2 \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{t^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right)' = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{t^{-\zeta} \ln \frac{1}{t}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} - \frac{t^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \sum_{v=1}^m \frac{1}{\zeta + \gamma_v} \right] = \\ &= \frac{1}{\prod_{v=1}^m \gamma_v} \cdot \left(\ln \frac{1}{t} - \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Примем

$$t = \prod_{v=2}^m \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_v} \right)^{1/\gamma_1}, \quad (31')$$

тогда

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{t} - \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v} &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} = \\ &= -\frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_v} \right) - \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \frac{\gamma_1}{\gamma_v^2} + \frac{1}{3} \sum_{v=1}^m \frac{\gamma_1^2}{\gamma_v^3} + \dots \end{aligned}$$

Это значит, что

$$0 \leq \ln \frac{1}{t} - \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v} < C \cdot \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2}. \quad (32)$$

Заметим еще, что

$$\frac{\prod_{v=1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \rightarrow 0, \quad \text{когда } t \in (0, 1), t \rightarrow 1,$$

следовательно

$$\frac{\prod_{v=1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} = 0 \left(\sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2} \right). \quad (33)$$

Из (29) в силу (27), (30), (31) и (33) получаем

$$\left| S_m - \varphi \left(\prod_{v=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_v} \right) \right)^{1/\gamma_1} \right| < \varepsilon + o \left(\frac{1}{\sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2}} \right) \cdot O \left(\sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2} \right) = \varepsilon_1. \quad (29')$$

Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность целых чисел

$$(m_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяющую условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m_{2l}}^{m_{2l+1}} \frac{1}{\gamma_v} = \infty. \quad (34)$$

Докажем, что тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_l = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\prod_{v=2}^{m_{2l+1}} \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1}}{\prod_{v=2}^{m_{2l}} \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1} = \infty. \quad (35)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \ln J_l &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} \ln \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \\ &= \sum_{m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} \left[\frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{\gamma_1}{2(\gamma_v - \gamma_1)^2} + \dots \right] > \frac{1}{2} \sum_{m_{2l}+1}^{m_{2l+1}} \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}, \quad m_{2l} > n_0. \end{aligned}$$

Этим (35), в силу (34), доказано.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ определим следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \in [m_{2l}, m_{2l+1}] \\ \varepsilon_{m_{2l}} \cdot \gamma_n^{-1}, & \text{когда } n = m_{2l}, m_{2l} + 1, \dots, r_l, \\ -\varepsilon_{m_{2l+1}} \cdot \gamma_n^{-1}, & \text{когда } n = r_l + 1, \dots, m_{2l+1}, \end{cases} \quad (36)$$

где целое число r_l определено из условия

$$\sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n},$$

$$\sum_{n=m_{2i}}^{r_i-1} \frac{1}{\gamma_n} \leq \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n},$$
(37)

а числа $\varepsilon_{m_{2i}}$ и $\varepsilon_{m_{2i+1}}$ из условия

$$\varepsilon_{m_{2i}} \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} = \varepsilon_{m_{2i+1}} \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} = A.$$
(38)

Из (37) имеем

$$2 \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} + \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}$$

и

$$2 \sum_{n=r_i}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=r_i}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} + \sum_{n=m_{2i}}^{r_i-1} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}.$$
(39)

Это в силу (38) значит, что

$$\varepsilon_{m_{2i}} \leq \frac{2A}{\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}} \rightarrow 0, \text{ когда } i \rightarrow \infty$$
(40)

$$\varepsilon_{m_{2i+1}} \leq \frac{2A}{\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}} \rightarrow 0, \text{ когда } i \rightarrow \infty.$$

Теперь заметим, что в силу (36) частичные суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$S_{m_{2i}}$ и $S_{m_{2i+1}}$ соответственно равны

$$S_{m_{2i}} = \frac{\varepsilon_{m_{2i}}}{\gamma_{m_{2i}}}, \quad S_{m_{2i+1}} = 0, \quad S_{r_i} = A,$$

где r_i определено в (37).

Для краткости обозначим

$$t_m = \prod_{v=2}^m \left(\frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} \right)^{1/\gamma_1}, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (41)$$

тогда в силу (35) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$t_{m_2} > t_{m_1} > \dots \rightarrow 0,$$

удовлетворяющую условию теоремы, а именно:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{t_{m_{2l}}}{t_{m_{2l+1}}} = \infty. \quad (35')$$

С другой стороны, в силу (26)

$$\varphi(t_{m_{2l}}) = o(1), \quad \varphi(t_{m_{2l+1}}) = o(1), \quad (42)$$

но в силу леммы

$$\varphi \left(\prod_{v=2}^{r_l} \left(\frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} \right)^{1/\gamma_1} \right) = A + o(1). \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t).$$

Этим теорема доказана.

Теорема В. Пусть даны

$$1. \text{ числа } a_n = 0 \left(\frac{1}{\gamma_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$2. \text{ ряд } \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$3. \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S,$$

где S — некоторое число, $t_m \rightarrow 0$ по последовательности $\{t_m\}$, удовлетворяющей условию (β) леммы В. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Доказательство теоремы. Опять составляем

$$g(t) = \varphi(t) - S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) - S,$$

где

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m).$$

Покажем, что $g(t)$ удовлетворяет всем условиям леммы В. Действительно

$$g(t_m) = \varphi(t_m) - S = o(1),$$

при условии

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t^{n+1} \varphi_2(t) = t^{n+1} g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_{v=2}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)} = o(1),$$

Из последних условий в силу леммы В имеем

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Для продолжения доказательства теоремы составим

$$t\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C - a_n \gamma_n) \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

где

$$C = \sup_{\{n\}} |a_n \gamma_n|.$$

Это значит, что

$$t\psi(t) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} + t g'(t), \quad (45)$$

но

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Если заметить еще, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} = 1, \quad (46)$$

то

$$t_m \psi(t_m) = C + o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Здесь также функция $t^{1-n} \psi(t)$ монотонно убывающая, значит

$$t_m^{1-n} \psi(t_m) \leq t^{1-n} \psi(t) \leq t_{m+1}^{1-n} \psi(t_{m+1}),$$

где

$$t_{m+1} < t < t_m,$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t}{t_m}\right)^{1-n} \leq t \psi(t) \leq t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left(\frac{t}{t_{m+1}}\right)^{1-n},$$



г. е.

$$t_m \psi(t_m) d^{-n} < t \psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) d^n.$$

В силу (47) это значит, что

$$t \psi(t) = C + o(1) \quad (48)$$

или

$$t \psi(t) - t_m \psi(t_m) = o(1) \quad (49)$$

когда

$$t_m > t > t_{m+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Но

$$tg'(t) = o(1) + t \psi(t) - t_m \psi(t_m).$$

Это значит, что

$$tg'(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (50)$$

Таким образом, имеем

$$g(t_m) = o(1), \quad tg'(t) = o(1),$$

следовательно, из равенства

$$g(t) = g(t_m) + (t - t_m)g'(t)$$

получаем, что при $t \rightarrow 0+$

$$g(t) = o(1).$$

Но

$$g(t) = \varphi(t) - S,$$

это значит, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Теорема доказана.

Теорема В. Пусть последовательность $\{t_m\} \in (0, 1]$ обладает свойствами

$$(\beta) \quad t_m \downarrow 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} = d,$$

где $d \neq 1$ произвольное число, тогда существует ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

такой, что

$$1. \quad a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty,$$

$$2. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S, \quad \text{где } \{t_m\} \text{ удовлетворяет условию } (\beta),$$

S — некоторое число,

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$S_0 = 1, \quad S_n = \frac{1}{\lambda} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_v}\right) = \sum_{v=0}^n a_v, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\lambda = \frac{2\pi}{\ln d}.$$

Покажем, что $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$ действительно.

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_v}\right) - \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_v}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_v}\right) \left(1 + \frac{i\lambda}{\gamma_n} - 1\right) = \frac{i}{\gamma_n} \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_v}\right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$|a_n| = \frac{1}{\gamma_n} \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma_v^2}\right)^{1/2} < \frac{C}{\gamma_n}$$

так как $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2}$ сходится.

Рассмотрим теперь

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

правая часть которого после применения преобразования Абеля запишется:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^n (\gamma_v - i\lambda)}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_v)}, \end{aligned}$$

где здесь и везде

$$\prod_{v=k}^{k-1} \alpha_k = 1.$$

Нетрудно заметить, что при $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^n (\gamma_v - i\lambda)}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} = \frac{1}{\zeta + i\lambda},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^n (\gamma_v - i\lambda)}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} t^{-\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + i\lambda} = t^{i\lambda} = e^{i\lambda \ln t}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)},$$

так как

$$\lim_{t \rightarrow 0+} e^{i\lambda \ln t} \neq \overline{\lim_{t \rightarrow 0+} e^{i\lambda \ln t}}.$$

Покажем теперь, что существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S \neq 0.$$

Действительно, возьмем произвольную пару целых чисел $p, q > 0$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi(t_p) - \varphi(t_q) &= \exp(i\lambda \ln t_p) - \exp(i\lambda \ln t_q) = \\ &= \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \left[\exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln \frac{t_p}{t_q}\right) - \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln \frac{t_q}{t_p}\right) \right]. \end{aligned}$$

Знаем также, что $\frac{t_p}{t_q} = d^{q-p}$ и $\lambda = \frac{2\pi}{\ln d}$, значит

$$\begin{aligned} \varphi(t_p) - \varphi(t_q) &= 2i \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \sin \frac{\frac{2\pi}{\ln d} \cdot (q-p) \ln d}{2} = \\ &= 2i \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \sin [\pi(q-p)] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом построен пример функции $\varphi(t)$ такой, что

$$\varphi(t_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

но

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)$$

чем и доказана теорема.

Теорема С. Пусть

$$1. \quad a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2. \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

$$3. \quad \varphi(t_m) = O(1),$$

где $t_m \rightarrow 1$, по последовательности (а) леммы А. Тогда

$$\varphi(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}, \quad t \in (0, 1]$$

и покажем, что она удовлетворяет условиям леммы С.

Для этого заметим, что

$$\varphi_2(t) = \left(\frac{\varphi'(t)}{t^{\gamma_1-1}} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta-\gamma_1-1} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}. \quad (48)$$

Из (48) следует, что

$$\begin{aligned} |t^{\gamma_1+1} \varphi_2(t)| &\leq \gamma_1 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n \gamma_n| \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} \leq \\ &\leq C^* \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{C^*}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = C^*, \end{aligned} \quad (48')$$

где $C^* = \gamma_1 \max_{n \geq 2} |a_n \gamma_n|$.

Таким образом, в силу условия 3 теоремы и (48') функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем требованиям леммы C, следовательно,

$$t_m \varphi'(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (49)$$

Сравнивая $t_m \varphi'(t_m)$ с

$$t\psi(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C^*}{\gamma_1} - a_n \gamma_n \right) \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{C^*}{\gamma_1} - t\varphi(t)$$

заключаем, что

$$t_m \psi(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Далее заметим, что на $(0, 1]$ функция $t^{1-\gamma_1} \psi(t)$ монотонно убывает (для чего достаточно повторить соответствующие рассуждения теоремы A), значит

$$t_m^{1-\gamma_1} \psi(t_m) < t^{1-\gamma_1} \psi(t) < t_{m+1}^{1-\gamma_1} \psi(t_{m+1}), \quad t \in (t_{m+1}, t_m)$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t}{t_m} \right)^{\gamma_1} < t\psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left(\frac{t}{t_{m+1}} \right)^{\gamma_1},$$

следовательно и

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t_{m+1}}{t_m} \right)^{\gamma_1} < t\psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left(\frac{t_m}{t_{m+1}} \right)^{\gamma_1}.$$

Это значит, что

$$t\psi(t) = O(1), \quad \text{когда } t \rightarrow 0+. \quad (50)$$

Вернемся снова к

$$\begin{aligned} t\psi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C - a_n \gamma_n) \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\ &= C - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = C - t\varphi'(t). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (50) и (51) следует, что

$$t\varphi'(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (52)$$

Из формулы

$$\varphi(t) = \varphi(t_m) + (t - t_m) \varphi'(\xi), \quad t_{m+1} < t < \xi < t_m,$$

в силу условия 3 теоремы и (52) получаем

$$\varphi(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Этим теорема доказана.

Теорема С. Пусть последовательность $\{t_m\} \in (0, 1]$ удовлетворяет условию

$$(\overline{C}) \quad t_m \downarrow 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty,$$

тогда существует ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

такой, что

1. $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right),$
2. $\varphi(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty,$
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = \infty.$

Теорема доказывается путем повторения всего хода доказательства теоремы А, но только вместо абсолютной постоянной А, взятой там, здесь нужно взять

$$A = A(m_{2i}, m_{2i+1})$$

так, чтобы

1. $\lim_{i \rightarrow \infty} A(m_{2i}, m_{2i+1}) = +\infty,$
2. $A(m_{2i}, m_{2i+1}) = O\left(\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}\right), \quad i \rightarrow \infty.$

Последние условия в силу расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

всегда выполняемы.

В частном случае когда $\gamma_v = \gamma$, $v = 0, 1, 2, \dots$, получаются вышеотмеченные результаты М. П. Щеглова.

2. զ. Բազալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՇԱՐՔՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Աշխատություն մեջ դիտարկվում են

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu}} = \infty$$

Թվային հաջորդականությունը և

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

 $t \in (0, 1]$ միջակայքում զուգամետ շարքը, որտեղ

$$\omega_n(t) = \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}$$

պարզ կոնտուր C -ն ընդգրկում է ընդլինսեղրալ ֆունկցիայի հալտարարի զերոների շրջակայքը:Ցույց է տրվում, որ այս շարքերի համար տեղի ունեն աստիճանային շարքերի վերաբերյալ Մ. Պ. Շչեգլովի հայտնի թեորեմաների ընդհանրացումները, որոնք համընկնում են նրանց հետ, երբ $\gamma_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Նշենք այդ թեորեմաներից երկուսը.

A. Դիցուք արված են՝

$$1. \{a_n\}, \quad a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right),$$

$$2. \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S.$$

որտեղ S -ը վերջավոր քիվ է, իսկ $\{t_m\}$ բազաբառում է նետեյալ պայմաններին՝

$$t_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} < d < \infty,$$

այդ դեպքում

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(s) = S.$$

Համ որում գոյություն ունի շարք

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

որտեղ

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

բայց

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t),$$

եթե

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty.$$

B. Գիցուք

$$1. a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$2. \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

որտեղ S -ը վերջավոր թիվ է, իսկ $\{t_m\}$ բաժարարում է

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = 1$$

պայմաններին, ապա

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S,$$

բառ որում գոյություն ունի շարք

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

որտեղ

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

բայց

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t),$$

եթե

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} = d \neq 1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Щеглов М. П. К вопросу о поведении степенного ряда на круге сходимости. Математический сборник, новая серия, т. 14 (56) 1944.
2. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций. Известия АН АрмССР, том VI, № 5—6, 1953.
3. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, том XI, № 2, 1958.
4. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, том XI, № 3, 1958.