

М. Л. Тер-Микаелян

Излучение релятивистского электрона, движущегося по окружности в плазме

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося в магнитном поле при наличии плазмы*. Компонента Фурье с индексом n векторного потенциала дается выражением:

$$A_n = \frac{e c i k R_0}{C R_0 T} \oint e^{i(n\omega_0 t - k r(t))} dr \quad (1)$$

Выражение (1) является обобщением аналогичного выражения для случая вакуума [1]. Нужно учесть, что связь между k и $\omega = n\omega_0$ в присутствии среды имеет вид:

$$k = n\omega_0 \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} q \quad (2)$$

Здесь q единичный вектор в направлении распространения, а $\omega_0 = \frac{ceH}{E}$ (3) частота обращения в магнитном поле. Учитывая дальнейшее применение формулы к астрофизическим проблемам, примем, что $\epsilon < 1$ и имеет вид:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \quad (4)$$

Здесь N число свободных электронов в 1 см^3 , m — масса и e — заряд электрона. Влиянием магнитного поля на вид диэлектрической постоянной можно пренебречь, если рассматривается излучение частот, превышающих ларморовскую частоту прецессии электронов.

* Как мне указал Гинзбург, в работе Гинзбурга В. Л. ДАН, 1952 г., том LXXXVII стр. 187 имеется условие (20) и указание на то, что спектр излучения в магнитном поле будет зависеть от диэлектрической постоянной. Этому же вопросу посвящена подробная статья Цытовича, опубликованная в „Вестнике“ МГУ, № 11, 1951 г. Однако интересующий нас случай автором не анализируется. Настоящая работа была доложена на теоретическом семинаре в ФИАН-е им. П. Н. Лебедева в 1953 г. в связи с аналогичной работой автора по тормозному излучению (ДАН XCIV, стр. 1033). Работа восстановлена по просьбе Гурзadian Г.

Мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $\varepsilon > 0$ ибо излучение частот, при которых $\varepsilon < 0$ не происходит. Естественно, что плазма предполагается прозрачной. Вектор Пойтинга, как известно, при наличии среды своего вида не меняет

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH]. \quad (5)$$

Нужно учесть, что в плоской волне

$$\sqrt{\varepsilon} |E| = |H|. \quad (6)$$

Тогда для излученной интенсивности n -ой гармоники в единицу телесного угла мы получим:

$$I_n = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} |H_n|^2 R_0^2 d\theta = \frac{c}{2\pi} |kA_n|^2 \frac{R_0^2}{\sqrt{\varepsilon}} d\theta. \quad (7)$$

Дальнейший расчет полностью повторяет аналогичные вычисления для случая вакуума. Если траектория частицы задается $y = r \sin \omega_0 t$ и $x = r \cos \omega_0 t$, то вводя $\varphi = \omega_0 t$, имеем

$$dx = -r \sin \varphi d\varphi \quad \text{и} \quad kr = kr \sin \theta \sin \varphi = \frac{nv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \sin \varphi,$$

где θ угол между направлением излучения и нормалью к плоскости движения.

Подставим полученные выражения в (1) и, используя известные свойства функций Бесселя, получим:

$$\begin{aligned} A_{nx} &= i \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} I_n' \left(\frac{nv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) \\ A_{ny} &= \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \frac{v}{c} \sin \theta} I_n \left(\frac{nv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) получим полную интенсивность излучения:

$$dI_n = \frac{e^2}{2\pi} \frac{n^2 \omega_0^2}{c \sqrt{\varepsilon}} \left[\varepsilon \frac{v^2}{c^2} I_n'^2 \left(n \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) + \operatorname{ctg}^2 \theta I_n^2 \left(n \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) \right] d\theta \quad (9)$$

Интегрирование по углам проводится способом, аналогичным случаю для вакуума и мы получаем окончательно:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2e^2 n H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{c^2 \sqrt{\varepsilon} m^2 v} \left\{ \frac{v^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon} I_{2n}' \left(2n \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \right) - \right. \\ &\quad \left. - n \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{2n} (2n \sqrt{\varepsilon} \xi) d\xi \right\} \end{aligned}$$

Как будет видно из дальнейшего, основную роль в излучении релятивистской частицы $\frac{E}{mc^2} \gg 1$ играют частоты с большими n .

Используя для этого случая асимптотическое представление функций Бесселя, имеем для случая

$$n \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \gg 1 \quad (11)$$

$$I_n = - \frac{2e^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2}}{V \pi m^2 c^2} \left\{ \Phi'(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2} \int_n^\infty \Phi(u) du \right\} \quad (12)$$

где

$$u = 2n^{1/2} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon}\right) \quad (13)$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (12).

Нас будет интересовать случай плазмы, для которой ε мало отличается от единицы т. е.

$$\sqrt{\varepsilon} \approx 1 - \frac{2\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}.$$

Пусть

$$u = n^{1/2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{4\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}\right) \ll 1. \quad (14)$$

В этом случае $\Phi'(0) = -0,4587$ и интенсивность дается выражением, полностью совпадающим со случаем вакуума:

$$I_n = 0,52 \cdot \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2} \quad (15)$$

При этом условие (14) налагает ограничения на излученные частоты

$$1 \ll n \ll \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (14')$$

а также

$$n \gg \left(\frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}\right)^{1/2}.$$

Другой предельный случай соответствует: $u \gg 1$, т. е.

либо
$$n \gg \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

либо
$$n \gg \left(\frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}\right)^{1/2} \quad (16)$$

Формулу (12) для интенсивности излучения можно в этом случае переписать в виде (17), воспользовавшись асимптотическим свойством функций Эйри

$$I_n = \frac{e^4 H^2}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon\right)^{1/2} e^{-\frac{2}{3} n \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon\right)^{3/2}} \quad (17)$$

Суммируем результаты. Для излучения волн с частотой $n\omega_0$, которые удовлетворяют неравенству (14')

$$\omega_0 \ll \left(\frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}\right)^{1/2} \omega_0 \ll n \omega_0 \ll \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (14'')$$

интенсивность излучения дается выражением (15), независящим от диэлектрической постоянной. Для частот, находящихся как справа, так и слева этого интервала $n > 1$ и, следовательно, нужно пользоваться формулой (17), в которую существенным образом входит диэлектрическая постоянная.

Для существования интервала (14'') необходимо выполнение неравенства: $n \ll 1$ или

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \gg \frac{4\pi N m c^2}{H^2} \gg 1. \quad (18)$$

Проведем упрощение формулы (17) при выполнении условия (18).

Множители $1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon$, входящие в форму (17), можно заменить на $1 - \frac{v^2}{c^2}$ при условии $1 - \frac{v^2}{c^2} \gg \frac{4\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}$, которое перепишем в виде

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \ll \frac{n^2 H^2}{4\pi m c^2 N}. \quad (19)$$

В районе максимума, где $n \sim \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2/3}$, неравенство (19) совпадает с условием (18).

Таким образом, около максимума и справа от него формула (15) должна переходить в формулу (17), в которой можно положить $\varepsilon = 1$. В другом крайнем случае, на левой стороне спектра $n \approx \left(\frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}\right)^{1/2}$ (см. условие 14''). Подставляя это значение в формулу

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{4\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}, \quad (20)$$

противоположную формуле (19), придем вновь к условию (18). Таким образом, около левой части спектра излучения, формула (15) переходит

в формулу (17), в которой можно пренебречь $1 - \frac{v^2}{c^2}$ по сравнению с $\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}$, т. е. интенсивность излучения будет даваться формулой:

$$I_n = \frac{e^4 H^2}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2} \left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{2}{3} \pi \left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}\right)^{3/2}} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (18) не выполняется, т. е.

$$1 \ll \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \ll \frac{4\pi Nmc^2}{H^2} \quad (22)$$

Это означает, что для всего интервала излученных частот, интенсивность излучения дается формулой (17) (поскольку $u \gg 1$) и экспоненциально мала. Формулу (17) опять таки можно упростить в двух случаях, исходя из условий (19) и (20).

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 7 III 1959

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ

ՊԼԱԶՄԱՅԻ ՄԵԶ ՇՐՋԱՆԱԳԾՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐՈՆԻ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է էլեկտրոնի ճառագայթումը մագնիսական դաշտում, պլազմայի առկայությանը: Հետաքրքրական է նշել, որ (22) անհավասարության դեպքում ճառագայթումը էքսպոնենցիալ փոքր է: Ի տարբերություն այն ճառագայթման, որն տեղի ունի վակուումում, (18) պայմանի դեպքում փափուկ քվանտները խիստ պակասում են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, 1948, стр. 225.