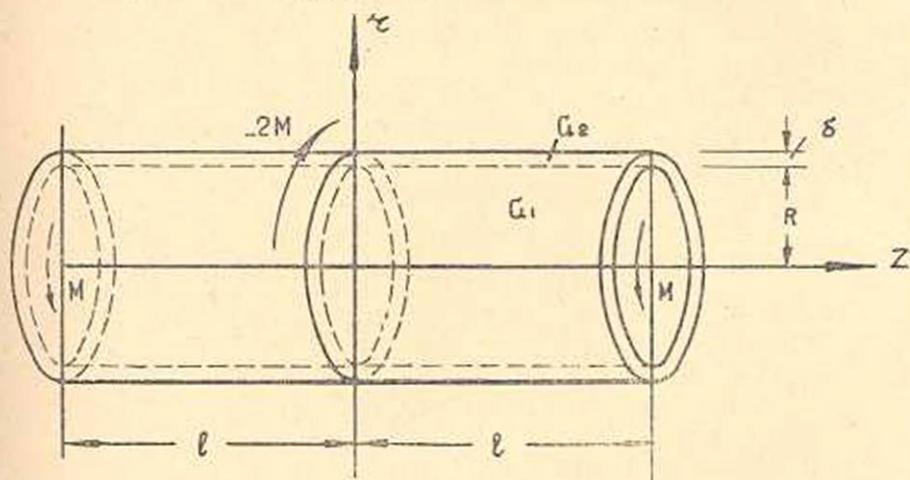


А. А. Баблоян

Кручение вала с тонким усиливающим слоем, сосредоточенными моментами

Для задачи о кручении вала переменного сечения с тонким усиливающим покрытием приближенный метод решения был предложен К. С. Чобаняном [1].

В настоящей заметке рассматривается кручение вала, имеющего тонкое усиливающее покрытие на боковой поверхности, когда скручивающая нагрузка приложена на его торцах и в средней части боковой поверхности сосредоточенными моментами (фиг. 1).



Фиг. 1.

Такая задача для изотропного бесконечно длинного вала была рассмотрена А. Тимпе [2].

Решение задачи о кручении вала переменного сечения, имеющего тонкий усиливающий слой на боковой поверхности, сводится к определению функции напряжения $\Phi(r, z)$, удовлетворяющей в области осевого сечения вала уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

и граничному условию

$$G_1 \Phi + G_2 \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = - \int_0^s r^2(s) P(s) ds, \quad (2)$$

где

$$P(s) = \tau_{r\varphi} \frac{dz}{ds} - \tau_{z\varphi} \frac{dr}{ds}, \quad (3)$$

$r(s)$ — радиус вала в данном месте.

Величины напряжений $\tau_{r\varphi}^*$ и $\tau_{z\varphi}^*$ в усиливающем слое и $\tau_{r\varphi}^*$, $\tau_{z\varphi}^*$ в основном материале определяются через функцию $\Phi(r, z)$ формулами

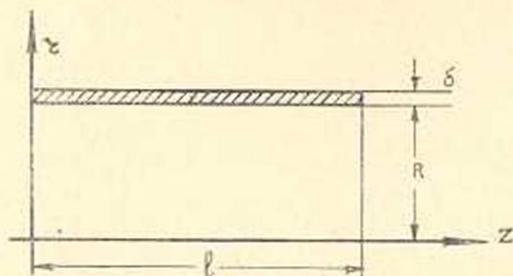
$$\tau_{r\varphi}^* = - \frac{G_1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4)$$

$$\tau_{z\varphi}^* = \frac{G_1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\tau_{r\varphi}^* = - \frac{G_2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (5)$$

$$\tau_{z\varphi}^* = \frac{G_1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Для определения функции $\Phi(r, z)$, в силу симметрии, достаточно рассмотреть половину осевого сечения стержня (фиг. 2). На контуре этой части функция $\Phi(r, z)$ удовлетворяет условиям



Фиг. 2.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, 0) &= 0 \\ \Phi(0, z) &= 0 \\ G_1 \Phi(R, z) + \delta G_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R} &= - \frac{M}{2\pi} \\ \int_V r \tau_{z\varphi} |_{z=l} dF &= M \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решение ищем в виде

$$\Phi(r, z) = Cr^4 z + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^2 I_2(\lambda_k r) \sin \lambda_k z, \quad (7)$$

где

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

$I_i(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента [3].
Удовлетворив граничным условиям (6) получим

$$C = -\frac{M}{2\pi R^2 l (G_1 R + 4\delta G_2)} \quad (8)$$

$$A_k = -\frac{M}{\pi R^2 l \lambda_k [G_1 I_2(\lambda_k R) + \delta \lambda_k G_2 I_1(\lambda_k R)]}$$

Подставляя эти значения в (7) будем иметь

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^2}{\pi R^2 l} \left\{ \frac{r^2 z}{2R(G_1 R + 4\delta G_2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2(\lambda_k r) \cdot \sin \lambda_k z}{\lambda_k [G_1 I_2(\lambda_k R) + \delta \lambda_k G_2 I_1(\lambda_k R)]} \right\}$$

Подставляя сюда $\delta = 0$ для однородного вала получим функцию напряжений в виде

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^2 z}{2\pi R^2 l G_1} - \frac{Mr^2}{\pi R^2 l G_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k R)} \sin \lambda_k z. \quad (10)$$

Для бесконечно длинного вала положив $\lambda_k = \frac{k\pi}{l} = \lambda$, $\frac{\pi}{l} = d\lambda$,
переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ получим решение

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^2}{\pi^2 R^2 G_1} \int_0^{\infty} \frac{I_2(\lambda r)}{\lambda I_2(\lambda R)} \sin(\lambda z) d\lambda, \quad (11)$$

которое совпадает с известным решением А. Тимпе.

Пользуясь выражением (9), для напряжений получим следующие формулы

$$\tau_{r\varphi}'(r, z) = \frac{M}{\pi R^2 l} \left\{ \frac{r^2}{2R(R + 4\delta m_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k z}{I_2(\lambda_k R) + \delta m_0 \lambda_k I_1(\lambda_k R)} \right\}, \quad (12)$$

$$\tau_{z\varphi}'(r, z) = -\frac{M}{\pi R^2 l} \left\{ \frac{2rz}{R(R + 4\delta m_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z}{I_2(\lambda_k R) + \delta m_0 \lambda_k I_1(\lambda_k R)} \right\},$$

$$\tau_{r\varphi}'(R, z) = \tau_{r\varphi}'(R, z),$$

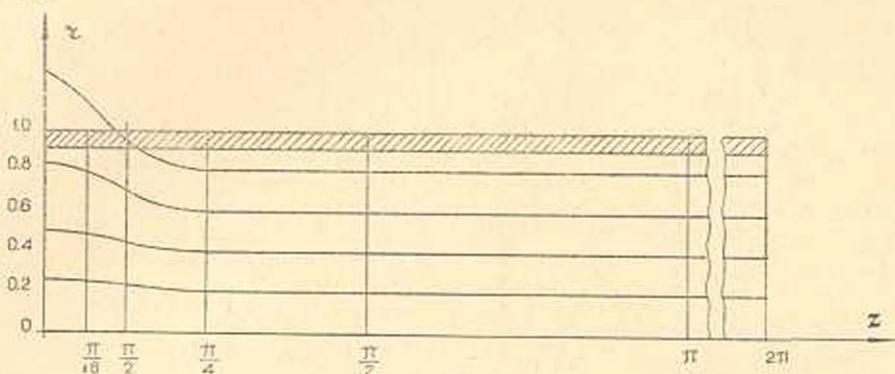
$$\tau_{z\varphi}'(R, z) = m_0 \tau_{z\varphi}'(R, z), \quad (13)$$

где

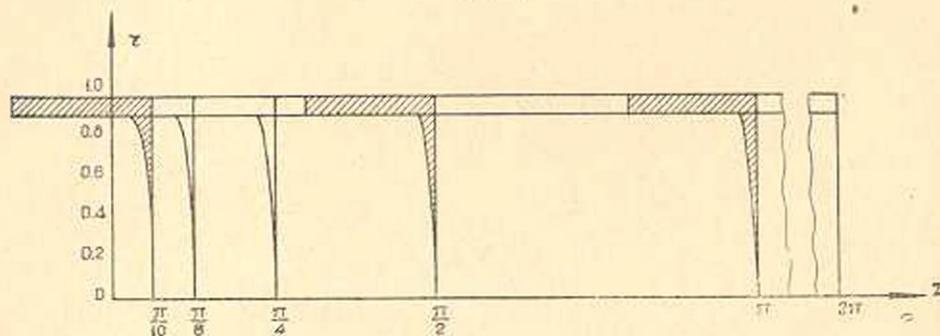
$$m_0 = \frac{G_2}{G_1}$$

Численные значения напряжений полученные при $m_0 = 10$, $l = 3\pi$, $R = 1$, и $\delta = 0,1$ приведены в таблицах 1 и 2.

Для наглядного представления закона распределения напряжений, на фигурах 3 и 4 приводятся эпюры распределения напряжений $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Из этих таблиц и эпюр видно, что, при наличии усиливающего слоя, напряжения в основном материале вала оказываются небольшими.

Таблица 1

		$\tau_{r\varphi}/M$					
$r \backslash z$	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,0024	0,0021	0,0015	0,0015	0	0	0
0,4	0,0102	0,0087	0,0058	0,0016	0,0001	0	0
0,6	0,0263	0,0210	0,0122	0,0028	0,0001	0	0
0,8	0,0628	0,0401	0,0181	0,0035	0,0001	0	0
1,0	∞	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

$r \backslash z$	$\tau_{z\theta}/M$						
	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	0,00903	0,01609	0,02307	0,02485	0,02547	0,02547
0,4	0	0,01985	0,03432	0,04705	0,05076	0,05093	0,05093
0,6	0	0,03587	0,05765	0,07267	0,07624	0,07640	0,07640
0,8	0	0,06720	0,09001	0,09997	0,10176	0,10186	0,10186
1-0	—	0,1347	0,1306	0,1279	0,1273	0,1273	0,1273
1	∞	1,3468	1,3056	1,2788	1,2733	1,2733	1,2733

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1959

Ս. Հ. Տարլուան

ԲԱՐԱԿ ԱՄՐԱՑՆՈՂ ՇԵՐՏՈՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱԾ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոփոխական կտրվածքով բարակ ամրացնող շերտով լիսեռի ոլորման խնդրի մոտավոր լուծման մեթոդը ստաջարկվել է Կ. Ս. Զորանյանի [1] կողմից:

Այս աշխատության մեջ դիտարկվում է ամրացնող շերտով լիսեռի ոլորման խնդիրը, երբ ոլորող բևեռը, կենտրոնացած մոմենտների ձևով, կիրառված է լիսեռի հիմքերի ու կողմնային մակերևույթի միջին մասի վրա:

Արտիսի խնդիր իզոարոպ անվերջ երկար լիսեռի համար դիտարկվել է Ս. Տխնյանի [2] կողմից:

Խնդրի լուծումը որոնվում է շարքերի տեսքով ըստ հոանկլունաչափական ֆունկցիաների: Կոնկրետ դեպքի համար բերված են լարումների թվային արժեքներ և էպլուրաներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Кручение составного вала переменного диаметра. ДАН АрмССР, том XXVII, № 3, 1958, стр. 139—144.
2. Timpe A. (A. Timpe) Die Torsion von Umdrehungskörpern Mathematische Annalen, Leipzig, Bd. 71, 1911, S. 480—509.
3. Грей Э., Матьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госинформиздат, М., 1949.