М. А. Алоян

О динамической устойчивости круговой арки переменного сечения

В технической литературе имеется ряд работ [1, 3, 5, 7, 8], посвященных решению задач о динамической устойчивости круговых арок и колец постоянного поперечного сечения. Насколько нам известно, те же задачи для арок и колец переменного поперечного сечения мало исследованы, и решений конкретных задач не имеется.

В данной статье рассматривается динамическая устойчивость двухшарнирных и защемленных в пятах арок, когда один из размеров прямоугольного поперечного сечения арки (высота или ширина) остается постоянным, а другой изменяется линейно от ключа к опорам. Решение дается применением приближенного метода Б. Г. Галеркина.

§ 1. Основное дифференциальное уравнение задачи и его решение

Дифференциальное уравнение плоских колебаний круговой арки непрерывно переменного сечения, нагруженной периодической равномерно распределенной нагрузкой $q(t)$, можно получить из динамических уравнений Кирхгоффа [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \theta} + (1 + R\delta_x) N_z + RT_x &= m(\theta) R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_z}{\partial \theta} - (1 + R\delta_x) N_x + RT_z &= m(\theta) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + RN_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

и из известных соотношений

$$\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), \quad u = \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (1.2)$$

$$M_y = B(\theta) \delta_x, \quad \delta_x = \frac{1}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}, \quad (1.3)$$

где M_y , N_x , N_z — соответственно изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, T_x — проекция внешней нагрузки на ось, нормальную к деформированной оси арки, T_z — на ось, касательную к деформированной оси арки, u и w — соответственно радиальное и касательное перемещения точек оси арки, β — угол поворота сечения вокруг его центральной оси инерции, направленной перпендикулярно к плоскости арки, R — радиус кривизны арки, δz — приращение радиуса кривизны, θ — центральный угол, отсчитываемый от ключевого сечения, $B(\theta)$ — переменная жесткость изгиба в плоскости арки, $m(\theta)$ — масса единицы длины, t — время.

Полагая, что $N_z = -q(t) \cdot R + N_z^*$, где N_z^* — весьма малая величина, и исключив из уравнений (1.1) M_y , N_x и N_z , при помощи соотношений (1.2), (1.3), пренебрегая малыми величинами высших порядков, получаем основное дифференциальное уравнение задачи в виде:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left[B(\theta) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + R^3 q(t) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + R^4 \left(T_z - \frac{\partial T_x}{\partial \theta} \right) + R^4 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(m(\theta) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} \right) - m(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.4)$$

Если считать, что внешняя нагрузка после деформирования оси арки остается нормальной к деформированной оси арки, то $T_z = 0$ и $T_x = -q(t)$, поэтому $T_z - \frac{\partial T_x}{\partial \theta} = 0$, и дифференциальное уравнение задачи примет вид:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left[B(\theta) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + R^3 q(t) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + R^4 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(m(\theta) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} \right) - m(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.5)$$

Легко показать, что в случае незамкнутой круговой арки постоянного сечения и, тем более, круговой арки переменного сечения, точное разделение переменных невозможно. Поэтому решение задачи приходится выполнять приближенными методами, среди которых наиболее удобным является метод Б. Г. Галеркина.

Пользуясь этим методом, решение уравнения (1.5) будем искать в виде

$$w(\theta, t) = W(\theta) \cdot T(t), \quad (1.6)$$

где $W(\theta)$ аппроксимирует функции задачи о собственных колебаниях, соответствующих нижшим частотам антисимметричных или симметричных колебаний круговой арки. Метод Б. Г. Галеркина позволяет разделять переменные приближенно и для функции $T(t)$ получить следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 \left(1 - \frac{q(t)}{q_{kp}}\right) T(t) = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{R^3} \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \{ [B(\theta)(W^{III} + W^I)]^{III} + [B(\theta)(W^{III} + W^I)]^I \} W d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \{ [m(\theta)W^I]^I - m(\theta)W \} W d\theta} \quad (1.8)$$

приближенное значение для квадрата частоты свободных плоских колебаний ненагруженной круговой арки переменного сечения, а

$$q_{kp} = \frac{1}{R^3} \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \{ [B(\theta)(W^{III} + W^I)]^{III} + [B(\theta)(W^{III} + W^I)]^I \} W d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} (W^{IV} + W^{II}) W d\theta} \quad (1.9)$$

приближенное значение равномерно распределенной критической нагрузки, 2α — центральный угол арки. В выражениях (1.8) и (1.9) штрихи обозначают производные по θ , в (1.7) точки — производные по t .

Если $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$, то уравнение (1.7) приводится к известному уравнению Матье

$$\ddot{T}(t) + \omega_q^2 (1 - \mu \cos pt) T(t) = 0,$$

где

$$\omega_q^2 = \omega^2 (1 - q_1/q_{kp}) \quad (1.10)$$

квадрат частоты плоских свободных колебаний круговой арки, нагруженной постоянной составляющей силы $q(t)$,

$$\mu = \frac{q_0}{q_{kp} - q_1} \quad (1.11)$$

коэффициент пульсации.

Будут ли колебания арки устойчивыми или нет, зависит от функции $T(t)$. Если $T(t)$ будет ограниченная периодическая функция, то перемещения точек оси арки согласно (1.6) тоже будут ограниченными, и начальная круговая форма арки динамически устойчива. Если же $T(t)$ будет неограниченно возрастать, тогда первоначальная круговая форма арки станет динамически неустойчивой.

Известно, что при определенных соотношениях между ω_q и μ , $T(t)$ неограниченно возрастает. Совокупность всех тех точек в плоскости параметров $(\mu, 2\omega_q/p)$, для которых $T(t)$ неограниченно возрастает, образует области динамической неустойчивости. Практически, наиболее опасным является первая область динамической неустойчивости, границы которой при действии нагрузки вида $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$ определяются так [2]

$$1 - \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 - \frac{55}{512}\mu^3 + \dots \leq \frac{4\omega_q^2}{p^2} < 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 + \frac{55}{512}\mu^3 + \dots$$

В общем случае изменения внешней нагрузки по закону $q(t) = q_1 + q_0(t)$, где $q_0(t) = q_0(t+l)$ — периодическая функция с периодом l , уравнение (1.7) приводится к уравнению Хилла

$$\ddot{T}(t) + \omega_q^2 [1 - \mu q_0(t)] T(t) = 0.$$

В этом случае уравнение можно решить методом разложения $T(t)$ по малому параметру μ . Условие отсутствия „вековых“ членов в решении $T(t)$, т. е. требование периодичности [решений, дает границы областей динамической неустойчивости.

Для определения областей динамической неустойчивости сначала необходимо в каждом случае определять ω_q^2 и μ из (1.8)–(1.11).

§ 2. Круговая двухшарнирная арка переменного сечения

Граничные условия двухшарнирной арки имеют вид:

$$u = w = M_y = 0 \quad \text{при } \theta = \pm \alpha. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание (1.6) и соотношения (1.2), (1.3), перепишем условия (2.1) в виде:

$$W = W' = W''' = 0 \quad \text{при } \theta = \pm \alpha. \quad (2.2)$$

Коэффициент ω^2 и $q_{кр}$ дифференциального уравнения (1.7) определяем из (1.8) и (1.9). Интегрируя и учитывая (2.2) приводим выражения (1.8) и (1.9) к виду:

$$\omega^2 = \frac{1}{R^4} \cdot \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} B(\theta) (W'''' + W')^2 d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} m(\theta) [(W')^2 + W^2] d\theta}, \quad (2.3)$$

$$q_{кр} = \frac{1}{R^3} \cdot \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} B(\theta) (W'''' + W')^2 d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} (W'''' + W') W d\theta}. \quad (2.4)$$

Пользуясь (2.3) и (2.4), можно определить приближенные значения ω^2 и $q_{кр}$.

Рассмотрим теперь два частных случая изменения поперечного сечения арки, которые с точки зрения их практического применения представляются наиболее важными.

а) *Первый случай.* Сечение арки прямоугольное, ширина возрастает от ключа к опорам (или наоборот) по линейному закону, а высота остается постоянной. Тогда для жесткости изгиба и массы арки в сечении θ имеем:

$$\left. \begin{aligned} B(\theta) &= B_{кз} \left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha} \theta \right) \\ m(\theta) &= m_{кз} \left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha} \theta \right) \end{aligned} \right\} \text{при } -\alpha \leq \theta \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} B(\theta) &= B_{кз} \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha} \theta \right) \\ m(\theta) &= m_{кз} \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha} \theta \right) \end{aligned} \right\} \text{при } 0 \leq \theta \leq \alpha$$
(2.5)

где $\beta_1 = (b_n - b_{кз}) : b_{кз}$, b_n — ширина сечения у опор, $b_{кз}$ — ширина ключевого сечения, $B_{кз} = E \frac{b_{кз} h^3}{12}$ — жесткость изгиба ключевого сечения, $m_{кз} = \frac{\gamma}{g} b_{кз} \cdot h$ — масса единицы длины в ключевом сечении, $h = \text{const}$ — высота сечения, γ — объемный вес, E — модуль упругости материала арки, g — ускорение силы тяжести.

б) *Второй случай.* Сечение арки прямоугольное, высота возрастает от ключа к опорам по линейному закону, а ширина остается постоянной. Тогда для жесткости изгиба и массы в сечении θ имеем:

$$\left. \begin{aligned} B(\theta) &= B_{кз} \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha} \theta \right)^3 \\ m(\theta) &= m_{кз} \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha} \theta \right) \end{aligned} \right\} \text{при } -\alpha \leq \theta \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} B(\theta) &= B_{кз} \left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha} \theta \right)^3 \\ m(\theta) &= m_{кз} \left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha} \theta \right) \end{aligned} \right\} \text{при } 0 \leq \theta \leq \alpha$$
(2.6)

где $\beta_2 = (h_n - h_{кз}) : h_{кз}$, h_n — высота сечения у опор, $h_{кз}$ — высота ключевого сечения, $B_{кз} = E \frac{b h_{кз}^3}{12}$, $m_{кз} = \frac{\gamma}{g} b h_{кз}$.

Займемся теперь определением ω^2 и $q_{кз}$ для упомянутых случаев изменения поперечных сечений. Рассмотрим антисимметричные (по двум полуволнам) и симметричные (по трем полуволнам) колебания круговой арки.

1°. *Антисимметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей (2.2), принимаем [9]

$$W(\theta) = a \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} \theta \right), \quad (2.7)$$

где a — неопределенный коэффициент.

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (2.7) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим:

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 (\chi^2 - 1)^2 (1 + \beta_1/2)}{(\chi^2 + 3)(1 + \beta_1/2) - 8\beta_1^2/\pi^2} \cdot \frac{B_{k2}}{m_{k2} R^4} \quad (2.8)$$

$$q_{kp} = (\chi^2 - 1) \left(1 + \frac{\beta_1}{2} \right) \cdot \frac{B_{k2}}{R^3}, \quad (2.9)$$

где $\chi = \frac{\pi}{\alpha}$.

Выражения (2.8) и (2.9) получены также в работе [10].

Критическую сжимающую силу $N_{kp} = q_{kp} \cdot R$ можно написать в виде

$$N_{kp} = K_1 \frac{B_n}{S^2},$$

где

$$K_1 = 4\alpha^2 (\chi^2 - 1) \left(1 + \frac{\beta_1}{2} \right) i \quad (2.10)$$

коэффициент устойчивости, S — длина дуги арки, B_n — жесткость изгиба сечения у опор, $i = B_{k2}/B_n$.

В предельном случае, когда $\alpha = 0$, имеем прямолинейный стержень, сжатый продольной силой N . В этом случае

$$K_1 = 4\pi^2 (1 + \beta_1/2) i.$$

Значения коэффициента устойчивости K_1 в зависимости от 2α и i приведены в таблице 1 и сопоставлены с результатами А. Н. Динника [6].

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (2.7) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 (\chi^2 - 1)^2 C_0}{(\chi^2 + 3) (1 + \beta_2/2) - 8\beta_2^2/\pi^2} \cdot \frac{B_{k2}}{m_{k2} R^4}$$

$$q_{kp} = (\chi^2 - 1) C_0 \cdot \frac{B_{k2}}{R^3}.$$

Критическую сжимающую силу $N_{kp} = q_{kp} \cdot R$ можно представить в виде

$$N_{kp} = K_2 \frac{B_n}{S^2},$$

где

$$K_2 = 4\alpha^2 (\chi^2 - 1) C_0 i,$$

Таблица 1

2α	0°		60°		120°		180°		
	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2	
0,1	18,68	13,12	18,16	12,74	16,64	11,70	14,13	9,94	1
	21,70	16,3	21,11	15,73	19,3	14,39	16,28	12,14	2
	16,0	24,4	16,0	25,0	16,2	23,0	15,5	22,1	3
0,2	21,64	18,08	21,04	17,57	19,27	16,10	16,32	13,65	1
	23,68	20,10	23,02	19,61	21,05	17,93	17,76	15,13	2
	9,6	11,05	9,6	11,6	9,1	11,36	9,0	11,25	3
0,4	26,72	25,03	25,93	24,46	23,77	22,36	20,08	18,42	1
	27,6	26,06	26,87	25,36	24,56	23,19	20,73	19,56	2
	3,4	4,25	3,9	3,51	3,2	3,52	3,1	6,18	3
0,6	31,21	30,64	30,31	29,82	27,76	27,23	23,45	22,99	1
	31,6	31,00	30,70	30,14	28,07	27,56	23,69	23,25	2
	1,3	1,31	1,3	1,14	0,97	1,32	1,2	1,08	3
0,8	35,42	35,32	34,47	34,35	31,52	31,42	26,62	26,5	1
	35,45	35,4	34,54	34,42	31,58	31,46	26,64	26,55	2
	0,14	0,28	0,11	0,20	0,25	0,13	0,15	0,18	3
1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	38,38	38,38	35,09	35,09	29,61	29,61	1
	$4\pi^2$	$4\pi^2$	38,38	38,38	35,09	35,09	29,61	29,61	2
	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3

Примечание: В таблицах 1 и 2 в строке 1 приведены значения коэффициентов устойчивости по А. Н. Динику, в строке 2 приведены значения коэффициентов устойчивости, полученные в настоящей работе, в строке 3 разность в процентах.

$$C_0 = 1 + \frac{3}{2} \beta_2 + \frac{2\pi^2 - 3}{2\pi^2} \beta_2^2 + \frac{\pi^2 - 3}{4\pi^2} \beta_2^3$$

В предельном случае $\alpha = 0$ коэффициент устойчивости

$$K_2 = 4\pi^2 C_0 i.$$

Некоторые значения коэффициента устойчивости K_2 приведены в таблице 1.

2°. *Симметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функций, удовлетворяющей (2.2), принимаем [4]

$$W(\theta) = a \left(\sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \sin \frac{3\pi}{2\alpha} \theta \right). \quad (2.11)$$

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (2.11) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим:

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 [(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + C_1\beta_1]}{16 \left\{ (5\chi^2 + 4) + \left[\frac{1}{2}(5\chi^2 + 4) - \frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2 + 4) \right] \beta_1 \right\}} \cdot \frac{B_{\kappa\lambda}}{m_{\kappa\lambda} R^4} \quad (2.12)$$

$$q_{\kappa\sigma} = \frac{(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + C_1\beta_1}{4(41\chi^2 - 20)} \cdot \frac{B_{\kappa\lambda}}{R^2}, \quad (2.13)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2}(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{1}{\pi^2}(135\chi^4 - 320\chi^2 + 128).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (2.11) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 [(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + 3C_1\beta_2 + C_2\beta_2^2 + C_3\beta_2^3]}{16 \left\{ (5\chi^2 + 4) + \left[\frac{1}{2}(5\chi^2 + 4) - \frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2 + 4) \right] \beta_2 \right\}} \cdot \frac{B_{\kappa\lambda}}{m_{\kappa\lambda} R^4},$$

$$q_{\kappa\rho} = \frac{(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + 3C_1\beta_2 + C_2\beta_2^2 + C_3\beta_2^3}{4(41\chi^2 - 20)} \cdot \frac{B_{\kappa\lambda}}{R^2}$$

где

$$C_2 = (365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{3}{\pi^2}(122,5\chi^4 - 260\chi^2 + 104)$$

$$C_3 = \frac{1}{4}(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{3}{2\pi^2}(122,5\chi^4 - 260\chi^2 + 104) + \\ + \frac{16}{3\pi^4}(72\chi^4 - 288\chi^2 + 128),$$

а C_1 имеет то же значение, что и в выражениях (2.12) и (2.13).

§ 3. Круговая бесшарнирная арка переменного сечения

Граничные условия бесшарнирной арки имеют вид:

$$u = w = \beta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \alpha. \quad (3.1)$$

Принимая во внимание (1.6) и (1.2), перепишем (3.1) в виде:

$$W = W' = W'' = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \alpha. \quad (3.2)$$

Коэффициенты ω^2 и $q_{\kappa\sigma}$ дифференциального уравнения (1.7) определяем из (1.8) и (1.9), которые интегрируя и учитывая (3.2), приводятся опять к (2.3) и (2.4).

Рассмотрим опять вышеупомянутые два случая изменения поперечных сечений арки.

1°. *Антисимметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей условиям (3.2), принимаем [9]

$$W(\theta) = a \left(3 \cos \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \cos \frac{3\pi}{2\alpha} \theta \right). \quad (3.3)$$

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (3.3) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{9\chi^2 [(41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) + C_4\beta_1]}{16 \left\{ (9\chi^2 + 20) + \left[\frac{1}{2} (9\chi^2 + 20) - \frac{8}{9\pi^2} (9\chi^2 + 68) \right] \beta_1 \right\}} \cdot \frac{B_{ka}}{m_{ka} R^4} \quad (3.4)$$

$$q_{kp} = K_3 \frac{B_n}{R^3},$$

где

$$K_3 = \frac{(41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) + C_4\beta_1}{4(5\chi^2 - 4)}$$

$$C_4 = \frac{1}{2} (41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) - \frac{1}{9\pi^2} (72\chi^4 - 576\chi^2 + 128).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (3.3) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{9\chi^2 [(41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) + 3C_4\beta_2 + C_5\beta_2^2 + C_6\beta_2^3]}{16 \left\{ (9\chi^2 + 20) + \left[\frac{1}{2} (9\chi^2 + 20) - \frac{8}{9\pi^2} (9\chi^2 + 68) \right] \beta_2 \right\}} \cdot \frac{B_{ka}}{m_{ka} R^4}$$

$$q_{kp} = K_4 \frac{B_n}{R^3},$$

где

$$K_4 = \frac{(41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) + 3C_4\beta_2 + C_5\beta_2^2 + C_6\beta_2^3}{4(5\chi^2 - 4)}$$

$$C_5 = (41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) - \frac{1}{6\pi^2} (225\chi^4 - 1512\chi^2 + 400),$$

$$C_6 = \frac{1}{4} (41\chi^4 - 40\chi^2 + 16) - \frac{1}{12\pi^2} (225\chi^4 - 1512\chi^2 + 400) + \\ + \frac{32}{27\pi^4} (81\chi^4 - 360\chi^2 + 80),$$

а C_4 имеет то же значение, что и в (3.4).

Некоторые значения коэффициентов устойчивости K_3 и K_4 приведены в таблице 2.

2°. *Симметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей условиям (3.2), принимаем [4]

$$W(\theta) = a \left(\sin \frac{\pi}{\alpha} \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\alpha} \theta \right). \quad (3.5)$$

Таблица 2

i	2α	60°		120°		180°		
		K_3	K_4	K_3	K_4	K_3	K_4	
0,1		33,2	24,1	8,25	6,05	3,70	2,73	1
		39,35	31,32	9,93	7,99	4,56	3,73	2
		18,5	29,95	20,00	32,1	23,2	36,6	3
0,2		39,1	33,6	9,76	8,39	4,36	3,66	1
		43,14	37,90	10,85	9,57	4,94	4,40	2
		10,33	12,80	11,16	14,1	13,3	20,22	3
0,4		49,1	46,7	12,2	11,7	5,45	5,19	1
		50,72	48,4	12,67	12,11	5,71	5,47	2
		3,3	3,64	3,85	3,5	4,77	5,4	3
0,6		57,8	56,5	14,4	14,1	6,39	6,27	1
		58,3	57,43	14,5	14,29	6,47	6,38	2
		0,86	1,65	0,69	1,34	1,25	1,75	3
0,8		65,8	65,8	16,3	16,3	7,21	7,21	1
		65,88	65,68	16,33	16,28	7,23	7,22	2
		0,13	-0,18	0,18	-0,12	0,28	0,14	3
1,0		73,3	73,3	18,1	18,1	8,00	8,00	1
		73,45	73,45	18,15	18,15	8,00	8,00	2
		0,2	0,2	0,28	0,28	0,00	0,00	3

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (3.5) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{4\chi^2 [(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + C_7\beta_1]}{\left\{ (8\chi^2 + 5) + \left[\frac{1}{2} (8\chi^2 + 5) - \frac{32}{9\pi^2} (5\chi^2 + 2) \right] \beta_1 \right\}} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda} R^4} \quad (3.6)$$

$$q_{kp} = \frac{(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + C_7\beta_1}{5\chi^2 - 2} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{R^3}$$

где

$$C_7 = \frac{1}{2} (17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{40}{9\pi^2} (4\chi^4 - 5\chi^2 + 1).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (3.5) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{4\chi^2 [(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + 3C_7\beta_2 + C_8\beta_2^2 + C_9\beta_2^3]}{\left\{ (8\chi^2 + 5) + \left[\frac{1}{2} (8\chi^2 + 5) - \frac{32}{9\pi^2} (5\chi^2 + 2) \right] \beta_2 \right\}} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda} R^4}$$

$$q_{kp} = \frac{(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + 3C_7\beta_2 + C_8\beta_2^2 + C_9\beta_2^3}{5\chi^2 - 2} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{R^3}$$

где

$$C_8 = (17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{1}{24\pi^2} (1100\chi^4 - 1456\chi^2 + 275),$$

$$C_9 = \frac{1}{4} (17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{1}{48\pi^2} (1100\chi^4 - 1456\chi^2 + 275) +$$

$$+ \frac{656}{27\pi^4} (4\chi^4 - 5\chi^2 + 1),$$

а C_7 имеет то же значение, что и в выражении (3.6).

* * *

Таким образом, для рассмотренных случаев изменения поперечных сечений двухшарнирной и бесшарнирной арок переменного сечения получены приближенные выражения для частот собственных колебаний и критической статической нагрузки. Известно, что точность этих приближенных выражений в большой степени зависит от удачного выбора аппроксимирующих функций. В настоящей работе в качестве аппроксимирующих функций приняты функции, предложенные А. И. Оселько [9] и Е. Б. Васерманом [4]. Вычисления показывают, что, при постоянной жесткости арки, расхождения точных и приближенных значений ω и $q_{кр}$ не только не велики, но и одного и того же порядка. Это обстоятельство говорит о том, что принятые функции хорошо аппроксимируют тангенциальные перемещения точек оси арки постоянного сечения.

При переменной жесткости, когда $I_{кз}/I_n \geq 0,4$, расхождение значений $q_{кр}$ от точных, как это видно из таблиц 1 и 2, в большинстве случаев составляет до 5%.

Имея в виду, что эти функции более „родственны“ собственным функциям свободных колебаний, чем формам потери статической устойчивости, можно заключить, что точность приближенных выражений частот свободных колебаний во всяком случае не ниже точности критической нагрузки.

При $I_{кз}/I_n = 0,2$ расхождение составляет от 9% до 15%. Но имея в виду, что в практике очень часто встречаются случаи, когда отношение $I_{кз}/I_n$ колеблется в пределах 1,0–0,2, можно сказать, что приближенные выражения для $q_{кр}$ и ω^2 , полученные в настоящей работе, дают удовлетворительные для практических целей результаты.

При $I_{кз}/I_n < 0,2$ расхождение больше 15%. Объясняется это тем, что при этом принятые функции недостаточно хорошо аппроксимируют тангенциальные перемещения точек оси арки при ее свободных колебаниях и формах потерь статической устойчивости.

Մ. Հ. Պ. լույսն

ՓՈՓՈՒԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԿԱՍԱՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում *տասնամատրիցում է փոփոխական կտրվածք ունեցող շրջանաչափ կամարների զինամիկ կալուսության խնդիրը: Բ. Գ. Գալլուրկինի մոտավոր եզանակով, խնդրի լուծումը բերվում է (1.7) զիֆերենցիալ հավասարմանը, իսկ վերջինս, կախված ազդող արտաքին, ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող բևեռից, բերվում է Մատյևի կամ Նիլլի զիֆերենցիալ հավասարումներին:*

Երկնոգակապալին և ամբակցված ծայրերով կամարների, նրանց կտրվածքի փոփոխման կրկու հիմնական զեպքերի համար սրռզված են՝ կրիտիկական սառաթիկական բևեռ մեծությունը, սեփական տատանումների հաճախականությունը, իսկ ահտհետև՝ Մատյևի զիֆերենցիալ հավասարման գործակիցները և արված է զինամիկ անկալուսության նիրույթը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бейлин Е. А. О динамической устойчивости стержней с упруго закрепленными концами. Научные труды Ленинградского инж.-строительного института, вып. 13, 1952.
2. Боднер Б. А. Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. ПММ, т. II, вып. 1, 1938.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
4. Васерман Е. Б. Свободные колебания нагруженных упругих круговых арок и колец. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к. т. н. Ригз, 1956.
5. Джанелидзе Г. Ю. и Радциг М. А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил. ПММ, т. IV, вып. 5—6, 1940.
6. Динник А. И. Устойчивость упругих систем. ОНТИ, М.—Л., 1935.
7. Макушин В. М. Динамическая устойчивость деформированного состояния упругих стержней. Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Баумана, раздел III. Колебания, устойчивость и равновесие упругих стержней, 1947.
8. Малкина Р. Л. Устойчивость круговых арок под действием продольных сил. Институт механики АН СССР. Инженерный сборник, т. XIV, М., 1953.
9. Оселедько А. И. Влияние упругости закрепления концов круговой арки на частоту ее собственных колебаний. Статья в сборнике «Исследования по теории сооружений». Сборник статей под редакцией А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича, М. М. Филоненко-Бородича, Стройиздат, 1949.
10. Пратуевич Я. А. О колебаниях круговых арок. Труды МИИТ-а им. Сталина, вып. 76, 1952.