

Г. М. Гарибян и Г. А. Чаликян

Черенковское и переходное излучения частицы, пролетающей через пластинку*

В работе [1] было определено поле излучения, возникающего при движении заряженной частицы из одной полубесконечной среды ($z < 0$) в другую ($z > 0$), различающиеся между собой в отношении диэлектрических и магнитных свойств. В настоящей работе методом, использованным в [1] исследовано переходное и черенковское излучения, возникающие при движении заряженной частицы через пластину вещества.

Аналогичная задача была рассмотрена также Пафомовым [2], следуя работе [3]. Приведенную в [2] формулу для переходного излучения можно получить из результатов настоящей работы, если предположить что $R \gg a$, где R — расстояние от точки входа (или выхода) частицы в пластину до точки поля, а a — толщина пластины.

1. Пусть заряженная частица, обладающая скоростью v , движется вдоль положительного направления оси z и пересекает пластину вещества, ограниченную плоскостями $z = 0$ и $z = a$ и расположенную в вакууме (ε — диэлектрическая постоянная вещества).

Суммарное электромагнитное поле в каждой части пространства складывается из поля движущейся заряженной частицы и поля излучения. Очевидно, что в области $z < 0$ поле излучения будет состоять из отраженных волн, в области $z > a$ — из волн движущихся только в положительном направлении оси z , а в пластинке будут присутствовать оба типа волн. Ввиду этого в областях $z < 0$ и $z > a$ будем, соответственно, иметь

$$\begin{aligned} E_0^{\rightarrow}(r, t) &= \int E_0^{\rightarrow}(k) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \lambda_0 z - \omega t)} dk \\ E_1^{\rightarrow}(r, t) &= \int E_1^{\rightarrow}(k) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} + \lambda_0 z - \omega t)} dk, \end{aligned} \quad (1)$$

тогда как в пластине

$$E_2^{\rightarrow}(r, t) + E_2^{\leftarrow}(r, t) = \int [E_2^{\rightarrow}(k) e^{i\lambda_0 z} + E_2^{\leftarrow}(k) e^{-i\lambda_0 z}] e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \omega t)} dk. \quad (2)$$

* Краткая сводка результатов настоящей работы приведена в [4].

Здесь $\vec{\rho}$ и $\vec{z}$ — компоненты $\vec{r}$ и $\vec{k}$ в плоскости (x, y) , $\omega = k_z v$, $\lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - z^2$, $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - z^2$. Действительные и мнимые части λ_0 и λ положительны [1].

Далее надо написать условия непрерывности тангенциальных компонент полей и нормальных компонент их индукций на границах пластины. Так же как и в [1], можно убедиться, что из условий, налагаемых на магнитные поля следует только, что фурье-компоненты тангенциальных слагаемых электрических полей направлены по вектору $\vec{z}$. Принимая это во внимание, мы получим четыре уравнения для определения фурье-компонент тангенциальных слагаемых электрических полей.

Из них, для полей излучения возникших в вакууме, можно получить следующие выражения:

$$E_{0t}(\vec{k}) = \frac{e i \vec{z}}{2\pi^2 F} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha e^{-\lambda a} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \beta e^{\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \gamma e^{i k_z a} \right\}, \quad (3)$$

$$E_{1t}(\vec{k}) = -\frac{e i \vec{z}}{2\pi^2 F} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha e^{\lambda a} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \beta e^{-\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \delta e^{-i k_z a} \right\} e^{-i(\lambda_0 - k_z) a}, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения

$$F = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right)^2 e^{-\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^2 e^{\lambda a}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} &= \frac{\pm \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{\mp \frac{1}{\lambda} + \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon}, \\ \left. \begin{aligned} \gamma \\ \delta \end{aligned} \right\} &= \frac{\mp \frac{1}{\lambda_0} + \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{\pm \frac{1}{\lambda_0 \varepsilon} - \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

Нормальные компоненты электрических полей и магнитные поля получаются согласно формул:

$$\begin{aligned} E_{0n}(\vec{k}) &= \frac{z}{\lambda_0} E_{0t}(\vec{k}), & E_{1n}(\vec{k}) &= -\frac{z}{\lambda_0} E_{1t}(\vec{k}), \\ H_0(\vec{k}) &= \frac{c}{\omega} \left[\vec{z} - n \lambda_0, E_{0t}(\vec{k}) \right], & H_1(\vec{k}) &= \frac{c}{\omega} \left[\vec{z} + n \lambda_0, E_{1t}(\vec{k}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор оси z). Нетрудно убедиться, что при $a = 0$ поля (3) и (4) обращаются в нуль. При $a \rightarrow \infty$ формула (3) выражает фурье-компоненту соответствующего поля работы [1], что и следовало ожидать.

2. Произведем теперь в формулах (1) интегрирование по $dk_x dk_y = \kappa d\kappa d\Phi$, где Φ — угол между $\vec{\kappa}$ и $\vec{\rho}$. Интегралы по Φ легко выражаются через функции Бесселя $I_0(\kappa\rho)$ и $I_1(\kappa\rho)$.

Рассмотрим сначала излучение в области $z < 0$. Введем величины R и θ посредством соотношений: $\rho = R \sin \theta$, $z = -R \cos \theta$. Для больших R и не очень малых значений угла θ воспользуемся асимптотическим разложением функций Бесселя. Тогда получим:

$$E_{0z}^*(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{2\pi}{R \sin \theta}} \int E_{0z}^*(\mathbf{k}) \left(e^{i f(\mathbf{z}) R - \frac{3\pi i}{4}} + e^{i f(\mathbf{z}) R + \frac{3\pi i}{4}} \right) e^{-i \omega t} \sqrt{\kappa} d\kappa dz, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad f(\mathbf{z}) = i z \sin \theta + i \lambda_0 \cos \theta, \quad \varphi(\mathbf{z}) = -i z \sin \theta + i \lambda_0 \cos \theta.$$

Интегрирование по z произведем методом перевала, аналогично тому, как это сделано [1]. Для применимости метода перевала должно быть $R \gg \lambda / \sin^2 \theta$. При этом R может быть как порядка и больше (если $a \gg \lambda / \sin^2 \theta$), так и много больше толщины пластины a .

В первом случае на положение точки перевала могут оказать влияние экспоненты $\exp(i\lambda a)$, имеющиеся в выражении для E_{0z}^* . Влияние их проще всего учесть разложив $1/F$ в ряд по малой величине $\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 / \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2$. Возникающие при этом в знаменателях формул нули связаны с неприменимостью обычного метода перевала и устраняются способом, указанным в [1].

Во втором случае, когда

$$a \ll R, \quad (9)$$

для точки перевала будем иметь прежнее значение $\frac{\omega}{c} \sin \theta$. Действуя далее обычным образом, нетрудно получить формулу для переходного излучения, совпадающую с приведенной в [2]. Рассмотрим подробнее крайне-релятивистский случай. Имеем:

$$E_{0z}^*(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\pi v R} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)} + 1} \times \\ \times \frac{-2i \sin\left(\frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon(\omega)}\right) \cdot e^{i \frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon(\omega)}}}{\left[1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)} + 1}\right)^2 e^{2i \frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon(\omega)}}\right]} \cdot e^{i \frac{\omega}{c} (R - ct)} d\omega. \quad (10)$$

Выражение в квадратных скобках, стоящее в знаменателе последней формулы, может быть разложено в ряд по малой величине $(V\varepsilon - 1)/(V\varepsilon + 1)^2$. Это разложение соответствует полям, приходящим в данную точку в результате многократного отражения от стенок пластинки. Ограничиваясь первым членом этого ряда и крайне релятивистским случаем, когда $\theta \sim \mu/E$, и принимая также во внимание, что согласно (7) $E_{0n}^* \simeq \frac{1}{E} E_{0p}^*$ и $H_{0p}^* = E_{0p}^*$, получим для потока вектора Пойтинга в течение всего времени пролета частицы в телесном угле $d\Omega$:

$$\frac{dW_{\text{пер.}}^*}{d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{4 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \int_0^\infty \left(\frac{V\varepsilon(\omega) - 1}{V\varepsilon(\omega) + 1} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{c}{a} V\varepsilon(\omega) \right) d\omega. \quad (11)$$

При этом для простоты положено, что ε — действительно*. Нетрудно видеть, что при $aV\varepsilon \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения деленная на 2π , переходного излучения не образуется.

Если в области частот $(\omega_1, \omega_2) \varepsilon$ постоянно, то для энергии переходного излучения, испущенного в этом интервале частот, получим следующее выражение

$$\frac{dW_{\text{пер.}}^*}{d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left(\frac{V\varepsilon - 1}{V\varepsilon + 1} \right)^2 (\omega_2 - \omega_1), \quad (12)$$

при этом дополнительно предположено $|V\varepsilon| \gg \frac{c}{\omega a}$ т. е. $aV\varepsilon \gg \lambda$

Интегрируя по углам получим

$$W_{\text{пер.}}^* = 2 \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{V\varepsilon - 1}{V\varepsilon + 1} \right)^2 \left(\ln \frac{2}{1 - \beta} - 1 \right) (\omega_2 - \omega_1). \quad (13)$$

Принимая во внимание также (9) получаем, что формулы (12) и (13) имеют место при выполнении условия:

$$\lambda/V\varepsilon \ll a \ll R. \quad (14)$$

Для излучения в области $z > a$ будем иметь при тех же допущениях:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\text{пер.}}^*}{d\Omega} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{4 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \int_0^\infty \sin^2 \left(\frac{\omega}{2c} a(V\varepsilon - 1) \right) d\omega = \\ &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} (\omega_2 - \omega_1) \end{aligned} \quad (15)$$

* Когда ε комплексно в подобного рода формулах надо брать абсолютные значения подынтегральных выражений.

$$W_{\text{пер.}} = 2 \frac{e^2}{\pi c} \left(\ln \frac{2}{1-\beta} - 1 \right) (\omega_2 - \omega_1), \quad (16)$$

при этом дополнительно предположено, что $|\sqrt{\varepsilon} - 1| \gg \frac{c}{\omega a}$. Принимая также во внимание (9) получаем, что формулы (15) и (16) имеют место при выполнении условия:

$$\lambda/|\sqrt{\varepsilon} - 1| \ll a \ll R. \quad (17)$$

Из сравнения формул (13) и (16) видно, что переходное излучение вперед больше на фактор $(\sqrt{\varepsilon} + 1)^2/(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2$.

3. Отметим, что при деформировании контура интегрирования в линию кратчайшего спуска, необходимо также брать вычеты под-интегрального выражения в нулях функции $x^2 - \frac{\omega^2}{v^2}(\beta^2\varepsilon - 1)$, содержащейся в знаменателях β , γ и δ (см. фиг. 4 статьи [1]). Они соответствуют черенковскому излучению.

Из формул (3) и (4) видно, что черенковского излучения не будет, если $a \ll \lambda$.

Если же $\lambda < a \lesssim R$, то при нахождении линии перевала необходимо также учитывать экспоненты, имеющиеся в выражении для E_{0r} . Разлагая E_{0r} в этом случае в ряд по малой величине, так как это было указано в предыдущем пункте, мы будем иметь:

$$E_{0r}^*(\text{чер.}) = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-e}{2\pi^2 v} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega x \frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \beta e^{i\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \gamma e^{ik_2 a} \right]}{\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right)^2} \times \\ \times e^{-i\omega t - \frac{3\pi i}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}} \right)^{2n} e^{K(f(x) + i \frac{a}{R} \lambda (2n+1))} \quad (18)$$

где Res означает вычет в полюсе $x = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}$, если он окажется левее соответствующей линии кратчайшего спуска. Легко видеть, что члены в квадратных скобках имеют разные линии перевала. В том случае, если полюс оказывается левее линий перевала соответствующих обоим членам в квадратных скобках, мы берем вычеты от обоих членов и они, как легко показать, взаимно уничтожаются. Поэтому только для тех частот, при которых полюс $x = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}$ оказывается левее линии перевала соответствующей члену с γ и правее линии перевала члена с β (для каждого из членов ряда (18)), вы-

четы взаимно не уничтожаются, так как вычета от члена с β брать не надо.

Таким образом, мы будем иметь следующие полосы черенковских частот $\Delta\omega_n^*$ определяемые из соотношений:

$$\beta \sin \theta \left(1 - \frac{a}{R} \frac{\cos^2 \theta \cdot s}{V \varepsilon(\omega) - \sin^2 \theta} \right) \leqslant \\ \leqslant V \sqrt{\beta^2 \varepsilon(\omega) - 1} \leqslant \beta \sin \theta \left(1 - \frac{a}{R} \frac{\cos^2 \theta \cdot t}{V \varepsilon(\omega) - \sin^2 \theta} \right), \quad (19)$$

где $s = 2n + 2$, $t = 2n + 1$ (ε — действительно). Принимая во внимание, что черенковское и переходное излучения между собой не интерферируют*, получим для потока черенковского излучения через круговую площадку ρ , $\rho + d\rho$ за все время пролета частицы выражение:

$$\frac{dW_{\text{чер.}}}{d\rho} = \frac{4e^2}{v^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta\omega_n} \frac{[1 - \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2(1 - \varepsilon)}]^{4n+2}}{[1 + \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2(1 - \varepsilon)}]^{4n+4}} \times \\ \times V \sqrt{(\beta^2 \varepsilon - 1)[1 + \beta^2(1 - \varepsilon)]} \omega d\omega. \quad (20)$$

Так же как в [1] можно убедиться, что черенковское поле частоты ω распространяется под углом $\theta(\omega)$, определяемом равенством $\sin \theta(\omega) = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 \varepsilon(\omega) - 1}$.

Производя аналогичные выкладки для излучения в области $z > a$ получим:

$$\frac{dW'_{\text{чер.}}}{d\rho} = \frac{4e^2}{v^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta\omega_n} \frac{[1 - \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2(1 - \varepsilon)}]^{4n}}{[1 + \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2(1 - \varepsilon)}]^{4n+2}} V \sqrt{(\beta^2 \varepsilon - 1)(1 + \beta^2(1 - \varepsilon))} \omega d\omega, \quad (21)$$

где полосы черенковских частот определяются из (19) с $s = 2n + 1$, $t = 2n$. Очевидно, что разложение в ряд в формулах (20), (21) соответствует черенковскому излучению, пришедшему в данную точку поля в результате многократного отражения от стенок пластинки.

Полагая теперь $a \ll R$ из (19) получаем, что в данной точке поля под углом θ будет двигаться пакет волн с узким частотным спектром $\Delta\omega \sim \frac{a}{R} \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)^{-1}$ с основной частотой, определяемой из соотношения $\sin \theta = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 \varepsilon(\omega) - 1}$. Таким образом, интенсивность че-

* Это связано с тем, что на больших расстояниях черенковское и переходное поля будут иметь разные экспоненты (см. также формулу (27) работы [1]). Ввиду этого при вычислении энергии интерференционные члены обратятся в нуль при усреднении по небольшому интервалу углов, так как они будут содержать экспоненты, зависящие от R и θ .

ренковского излучения через круговую площадку $\rho, \rho + d\rho$ при $R \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Если же мы хотим вычислить все испущенное черенковское излучение, то надо вычислить поток электромагнитной энергии, прошедший через определенный телесный угол. Не трудно убедиться, что этот поток не будет зависеть от R . Действительно, для вычисления $\frac{dW}{d\Omega}$ мы должны поток вектора Пойнтинга умножить на R^2 , что дает лишнее R по сравнению с (20) и (21), которое сократится с R , имеющимся в $\Delta\omega_n$ и $\Delta\omega_n'$.

Авторы благодарны А. Ц. Амагуни и И. И. Гольдману за интересные дискуссии и Б. М. Болотовскому и В. Е. Пафому за полезное обсуждение результатов работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1958

Գ. Մ. Ղարիբյան եւ Գ. Ա. Չալիբյան

ԹԻԹԵՂԻԿՈՎ ԱՆՑՆՈՂ ՄԱՍՆԻԿԻ ԶԵՐԵՆԿՈՎՅԱՆ ԵՎ ԱՆՑՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրված է մասնիկի էլեկտրամագնիսական դաշտի խնդիրը, երբ նա անցնում է թիթեղիով:

Ղախուժում ստացված են Պոլտինգի վեկտորների բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарибян Г. М. ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
2. Пафомов В. Е. ЖЭТФ, 33, 1074, 1957.
3. Гинзбург В. Л., Франк И. М. ЖЭТФ, 16, 15, 1946.
4. Гарибян Г. М., Чадикян Г. А. ЖЭТФ, 35, № 11, 1958