

Р. С. Оганесян

О гравитационной неустойчивости слоя с внутренним магнитным полем, направленным вдоль слоя

В настоящей работе получены критерии неустойчивости плоского слоя проводящей несжимаемой жидкости под действием собственного гравитационного поля и внутреннего магнитного поля, параллельного граничным плоскостям.

1. В работе [1] был рассмотрен вопрос неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости под действием собственного поля гравитационных сил в присутствии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости.

Интересным является и тот случай, когда протянутое магнитное поле, параллельное граничным плоскостям слоя, сосредоточено только внутри его. При этом неустойчивость рассматривается по отношению к малым одномерным поперечным возмущениям, изменяющим форму свободной поверхности равновесного слоя.

Представим себе проводящий жидкий плоскопараллельный слой бесконечной длины, толщиной $2h$, внутри которого действует однородное протянутое магнитное поле напряженностью H_0 . Выберем систему прямоугольных координат так, чтобы горизонтальная ось x совпадала с невозмущенным верхним уровнем слоя, а ось y была направлена вертикально вверх.

Будем предполагать (как это делалось в работе [1]), что слой подвергается некоторому возмущению, симметрично по отношению к центральной плоскости $y = -h$. Исходя из этой симметрии можно ограничиться рассмотрением только верхнего полуслоя [2].

Напишем уравнение свободной поверхности слоя после возмущения в виде

$$y = f(x). \quad (1)$$

Задача решается в линейном приближении, предполагая, что $|f(x)| \ll h$.

Произвольное возмущение $f(x)$, по теореме Фурье, можно заменить суммой его слагающих типа $a \cos kx$ и, в силу линейности, рассматривать устойчивость слоя по отношению к каждой слагающей отдельно.

Здесь a — амплитуда, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Решение задачи устойчивости или неустойчивости слоя по отношению к возмущениям типа $y = a \cos kx$, при наличии внутреннего магнитного поля, сводится к подсчету изменения суммарной (потенциальной и магнитной) энергии.

Изменение потенциальной энергии гравитирующей массы, отнесенное к единице длины слоя, определяется по формуле [1]

$$\delta\Omega = \pi G \rho^2 h a^2 \left[1 - \frac{1}{z(1 + thz)} \right] \quad (2)$$

где ρ — макроскопическая плотность массы

G — гравитационная постоянная

$$z = kh = 2\pi h/\lambda. \quad (3)$$

В вопросах устойчивости тех или других геометрических форм гравитирующей материи определяющим является эффект дальности действия сил, связывающий свойства среды на макроскопических расстояниях [3]. Дальнодействующий характер гравитационных взаимодействий, при подсчете изменения энергии (2), был учтен путем комбинации законов гравитации с гипотезой сплошности материальной среды (именно, с помощью уравнения макроскопической гидродинамики) [4].

2. Изменение магнитной энергии единицы длины слоя будем подсчитывать по методу Чандрасекара и Ферми [5], используя теорему сохранения магнитного потока, в предположении бесконечной электропроводности гравитирующей среды. Условие неизменности магнитного потока через любое сечение, перпендикулярное к оси x , можно выразить следующим образом:

$$\int_{-h}^0 H_0 dy = \int_{-h}^{a \cosh x} (H + h_x) dy = \text{const}, \quad (4)$$

где H_0 — первоначальное поле, H — некоторое среднее поле по направлению оси x , h_x — компонента добавочного магнитного поля $\vec{h}$. В рассматриваемом случае $\vec{h}$ можно представить в виде:

$$\vec{h} = \text{grad } \Psi, \quad (5)$$

где $\Psi(x, y)$ является магнитоэстатическим потенциалом и удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \Psi = 0$.

Решение для функции $\Psi(x, y)$ представим в виде ряда по степеням амплитуды возмущения

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n B_n}{nk} \text{ch } kn(h+y) \sin knx \quad (6)$$

где $[B_n]$ $n = 1, 2, 3, \dots$ — неизвестные константы, подлежащие определению.

Из (4), (5) и (6) можно написать

$$N = \int_{-h}^{a \cos kx} [H + aB_1 \operatorname{ch} k(h+y) \cos kx + a^2 B_2 \operatorname{ch} 2k(h+y) \cos 2kx + \dots] dy.$$

С точностью до второго порядка относительно a , найдем

$$N = H(a \cos kx + h) + \frac{aB_1}{k} \operatorname{sh} kh \cos kx + \\ + a^2 B_1 \operatorname{ch} kh \cos^2 kx + \frac{a^2 B_2}{2k} \operatorname{sh} 2kh \cos 2kx. \quad (7)$$

С другой стороны $N = H_0 h$. Тождественное равенство последних двух выражений приводит к следующей системе уравнений:

$$H_0 h = Hh + \frac{1}{2} a^2 B_1 \operatorname{ch} kh; \\ Ha + \frac{aB_1}{k} \operatorname{sh} kh = 0; \\ a^2 B_1 \operatorname{ch} kh + \frac{a^2 B_2}{k} \operatorname{sh} 2kh = 0.$$

Решая эту систему, найдем:

$$B_1 = -\frac{Hz}{h \operatorname{sh} z}; \\ B_2 = -\frac{Hz^2}{h^2 \operatorname{sh}^2 z}; \\ H_0 = H \left(1 - \frac{a^2}{2h} \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \right), \quad (9)$$

где $z = kh$.

В рассматриваемом приближении, из последнего соотношения (9) получим:

$$H = H_0 \left(1 + \frac{a^2}{2h} \cdot \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \right). \quad (10)$$

Следовательно, возмущение приводит к увеличению среднего значения магнитного поля внутри слоя. Важно отметить, что это значение зависит от волнового числа и в рассматриваемом приближении — порядка a^2 . Изменение магнитной энергии, отнесенное к единице длины, можно подсчитать по формуле:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi\lambda} \left\{ \int_0^\lambda dx \left[\int_{-h}^{a \cos kx} (H^2 + 2(\vec{H} \vec{h}) + h_x^2 + h_y^2) dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy \right] \right\} \quad (11)$$

Имея в виду (5), (6), из (11) получим:

$$\begin{aligned} \delta M = \frac{1}{8\pi\lambda} \left\{ \int_0^\lambda dx \left[\int_{-h}^{a \cos kx} H^2 dy + 2HaB_1 \cos kx \int_{-h}^{a \cos kx} \operatorname{ch} k(h+y) dy + \right. \right. \\ \left. + 2Ha^2B_2 \cos 2kx \int_{-h}^{a \cos kx} \operatorname{ch} 2k(h+y) dy + a^2B_1^2 \int_{-h}^{a \cos kx} [\operatorname{ch}^2 k(h+y) \cos^2 kx + \right. \\ \left. \left. + \operatorname{sh}^2 k(h+y) \operatorname{sh}^2 kx] dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy \right] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$\delta M = \frac{a^2 H_0^2}{16\pi h} \cdot \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (13)$$

Изменение суммарной энергии будет (см. (2) и (13))

$$\delta \Omega + \delta M = \pi G \rho^2 h a^2 F_s(z) \quad (14)$$

где

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1+thz)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \quad (15)$$

и

$$H_s = 4\pi \rho h \sqrt{G} \quad (16)$$

(знак ноль у H опущен).

Асимптотические значения функции $F_s(z)$ таковы:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F_s(z) = -\infty; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F_s(z) \rightarrow +\infty, \quad (17)$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \delta \Omega + \delta M > 0 & \quad \text{при всех} \quad z > z_s \\ \delta \Omega + \delta M < 0 & \quad \text{при всех} \quad z < z_s, \end{aligned}$$

где z_s является корнем уравнения

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1+thz)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, все гармоники возмущения, для которых $z > z_s$, являются устойчивыми, а в противном случае $z < z_s$ — неустойчивыми. Неустойчивость наступает при сравнительно больших длинах волн. Критическое значение длины волны, начиная с которой возникает неустойчивость ($\lambda_s = 2\pi h/z_s$) сильно зависит от напряженности магнитного поля.

С увеличением напряженности магнитного поля сдвигается предельная длина волны неустойчивости в направлении сокращения области неустойчивых гармоник.

Уравнение (18) таким образом выражает критерий неустойчивости слоя при наличии внутреннего магнитного поля, направленного вдоль слоя.

Для нахождения критического значения z_s (следовательно и λ_s) можно решить уравнение (18) графическим путем. Однако, имея в виду, что при $H = H_s$; $z_s = 0,368$ и при увеличении H , z_s уменьшается, можно ограничиться решением следующего уравнения:

$$z^2 + z + c = 0; \text{ где } c = - \left[1 + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right],$$

которое получается путем замены гиперболических функций их главными значениями при $z \rightarrow 0$ (берется положительный корень, так как $0 \leq z \leq \infty$).

3. Найдем, среди неустойчивых, грамонику обладающую максимальной неустойчивостью. Предполагая зависимость амплитуды от времени, выведем уравнение движения в форме Лагранжа.

Кинетическая энергия жидких частиц, приходящая на единицу длины, была рассчитана нами в работе [1], она выражается формулой,

$$\delta T = \frac{h\rho \operatorname{ch} z}{4z \operatorname{sh} z} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \quad (19)$$

Для функции Лангража найдем (см. (14) и (19))

$$L = \frac{h\rho \operatorname{ch} z}{4z \operatorname{sh} z} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \pi G\rho^2 h a^2 F_s(z).$$

Уравнение движения будет иметь вид:

$$\ddot{a} + 4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z) a = 0,$$

решение которого суть:

$$a = \operatorname{const} \exp \{ \pm P_s t \},$$

где

$$P_s^2 = -4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z),$$

или

$$P_s^2 = -4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \left\{ 1 - \frac{1}{z(1+thz)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \right\}.$$

Исследование поведения функции $P_s^2(z)$ в интервале $0 \leq z \leq \infty$ приводит к выводу, что для всех устойчивых гармоник ($z > z_s$) изменение амплитуды во времени, как и следовало ожидать, совершается периодически. Для неустойчивых гармоник амплитуда неограниченно возрастает со временем и следовательно слой должен распасться.

Максимально неустойчивую грамонику, при которой амплитуда нарастает наиболее быстро, можно найти из условия:

$$\frac{d}{dz} (P_s^2(z)) = 0.$$

При $H = H_s$ корень этого уравнения есть $z_m = 0,175$, следовательно при $H = H_s$ мы можем заменить гиперболические функции своими аргументами и приблизительно ограничиться членами, содержащим z не выше второй степени, что даст:

$$Az^2 + Bz - 1 = 0,$$

где

$$A = 2 \left[1 + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad B = 3 + 2 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2.$$

В рассматриваемом приближении максимальное значение P_s при котором наступает максимальная неустойчивость, будет:

$$P_{sm} = (4\pi G\rho)^{1/2} \left\{ \frac{z_m}{1+z_m} - z_m^2 + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 z_m \right\}^{1/2}.$$

Обычно, длина волны максимально неустойчивой гармоники $\lambda_m = 2\pi h/z_m$ рассматривается как линейный размер сечения тех образований, на которые распадается слой, а P_{sm}^{-1} — как время релаксации, т. е. время, необходимое для перехода одной конфигурации в другую.

В качестве конкретного примера рассмотрим галактический слой, предполагая, что протяженное магнитное поле сосредоточено только внутри слоя параллельно граничным плоскостям.

Положим

$$h = 100 \text{ пс}, \quad \rho = 2 \cdot 10^{-23} \text{ г/см}^3.$$

При этом найдем $H_s = 2 \cdot 10^{-5} \text{ гаусс}$. Задавая ряд конкретных значений отношению H/H_s с помощью полученных формул можно вычислить z_s ; z_m ; $P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$ (табл. 1) и соответственно с этими λ_s ; λ_m ; P_{sm}^{-1} (табл. 2).

Таблица 1

Зависимость z_s ; z_m ; $P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$ от отношения H/H_s

H/H_s	z_s	z_m	$P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$
0	0,64	0,3	0,371
1	0,366	0,175	0,296
1,2	0,312	0,151	0,268
1,5	0,247	0,120	0,242
1,75	0,204	0,100	0,223
2	0,168	0,084	0,200
3	0,086	0,045	0,148
5	0,036	0,018	0,095
7	0,020	0,009	0,70
10	0,009	0,005	0,005

Таблица 2

Зависимость λ_s ; λ_m ; P_{sm}^{-1} от напряженности магнитного поля

H 10 ⁻⁵ гаусс	λ_s парсек	λ_m парсек	P_{sm}^{-1} годы
0	0,980 · 10 ³	2,100 · 10 ³	2,086 · 10 ⁷
2	1,716 · 10 ³	3,584 · 10 ³	2,614 · 10 ⁷
2,4	2,013 · 10 ³	4,161 · 10 ³	2,888 · 10 ⁷
3	2,544 · 10 ³	5,235 · 10 ³	3,144 · 10 ⁷
3,50	3,080 · 10 ³	6,283 · 10 ³	3,475 · 10 ⁷
4	3,740 · 10 ³	7,480 · 10 ³	3,870 · 10 ⁷
6	7,308 · 10 ³	1,396 · 10 ⁴	5,230 · 10 ⁷
10	2,023 · 10 ⁴	3,490 · 10 ⁴	8,190 · 10 ⁷
14	3,141 · 10 ⁴	6,980 · 10 ⁴	1,105 · 10 ⁸
20	6,980 · 10 ⁴	1,256 · 10 ⁵	1,548 · 10 ⁸

Анализ полученных результатов, а также численных данных приводимых в таблицах 1 и 2, показывает, что неустойчивость слоя при излучении внутреннего магнитного поля, направленного вдоль слоя, возможна при любом конечном значении H . Однако, с ростом H/H_s возрастают длины волн неустойчивых и максимально неустойчивых гармоник, а также время релаксации.

Совершенно иной картина гравитационной неустойчивости слоя при наличии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости, рассмотренная в работе [1]. Там, при значении $H = H_s$, совершенно исключалась возможность появления неустойчивых гармоник при любой длине волн.

Следовательно, при одинаковых значениях напряженности магнитных полей, картина гравитационной неустойчивости может резко меняться в зависимости от направления этих полей.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора А. А. Власова за ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22 IX 1958

Ռ. Ս. Հովհաննիսյան

ՇԵՐՏԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՆՐԱ ԵՐԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՈՒՂՂՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգովածում քննարկված է հեղուկ հաղորդիչ շերտի զրավիտացիոն անկայանություն հարցը լայնական տատանումների նկատմամբ իր սեփական զրավիտացիոն դաշտի և շերտի երկարությունը ուղղված ներքին մագնիսական դաշտի ներկայությունը:

Ստացված է շերտի անկայունության չափանիշը՝ կախված մագնիսական դաշտի լարվածությունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Оганесян Р. С. О гравитационной неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, XI, № 4, 1958.
2. Власов А. А. О переносе массы и заряда поверхностными волнами. ЖЭТФ, т. 27, вып. 2 (8), 1954.
3. Власов А. А. Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.
4. Оганесян Р. С. О гравитационной устойчивости цилиндрической конфигурации. Астр. журн. т. 33, вып. 6.
5. Чандрасекар С. и Ферми Э. Проблемы современной физики (магнитная гидродинамика), 2, 108, 1954.