

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Р. Фельдман

Об одном разностном способе исследования
устойчивости и колебаний пластин

В предыдущей работе [1] был предложен способ исследования устойчивости и колебаний стержней переменного сечения.

В частности было показано применение этого способа к исследованию устойчивости ступенчатых стержней, подверженных действию сил, скачкообразно меняющихся по длине стержня.

В настоящей статье этот способ распространен на задачи, связанные с исследованием прочности, устойчивости и колебаний пластин и оболочек.

Решение задач, связанных с исследованием устойчивости пластин разностным методом сопряжено с громоздкими вычислениями. Объясняется это тем, что в целях повышения точности приходится увеличивать число делений исследуемой области, а это, как известно, влечет за собой повышение порядка определителя системы. Последнее приводит лишь к принципиальному, а не к фактическому, решению задачи [2].

Применяемый в работе синтез методов конечных разностей и Бубнова-Галеркина позволяет во многих случаях, сравнительно просто и с достаточной для нужд практики степенью точности, независимо от плотности решетки, с помощью которой аппроксимируется заданная область, решать широкий класс задач, представляющих практический интерес [3—5].

§ 1. Метод решения

Пусть в результате решения проблемы, связанной с исследованием деформативности механической системы, установлена система разностных уравнений или система дифференциальных уравнений любого порядка.

Для определенности рассмотрим одно дифференциальное уравнение m -го порядка, хотя метод остается в силе и для системы линейных дифференциальных уравнений

$$K[w] = L[w] - \lambda N[w] - \phi = 0 \quad \text{в } H, \quad (1)$$

где H — заданная область n — мерного Эвклидова пространства $x_1, x_2, \dots, x_n$, $L[w]$, $N[w]$ — линейные однородные дифференциальные операторы порядка соответственно m и l с n независимыми переменными, главные части которых имеют вид

$$\sum_{\tau < m} C_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} \frac{\partial^\tau w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_n^{\tau_n}},$$

$$\sum_{\tau < l} M_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} \frac{\partial^\tau w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_n^{\tau_n}},$$

где $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ — порядок производных

$$\frac{\partial^{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \quad \text{и} \quad \tau_j \geq 0,$$

$C_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n}$, $M_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n}$ и ϕ заданные функции независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в некоторой конечной замкнутой области H , а $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неизвестная функция тех же переменных, причем $m > l$.

Условиями на границах области могут быть значения функции или значения производных в направлении нормали к контуру $\partial w / \partial x_\mu$, или линейные комбинации функции w и ее частных производных до $(m-1)$ -го порядка:

$$\sum_{\tau < m-1} E_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} \frac{\partial^\tau w}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_n^{\tau_n}} = 0,$$

где $E_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n}$ — известные функции.

Для нахождения неизвестной функции w по заданным условиям на контуре области (в задачах прочности), или нахождения собственных значений λ (в задачах устойчивости и колебаний), представим заданную область системой узлов:

$$Q_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

находящихся внутри области и образующих прямоугольные решетки с ребрами h_j и числом узлов N .

Стороны прямоугольных ячеек направлены параллельно осям координат.

Значения функции w в узлах решетки обозначим через w_{ij} . Первый индекс i определяет номер координатной оси, а второй индекс j положение узла на этой оси.

Как известно [6], каждому дифференциальному выражению отвечает разностное выражение, аппроксимирующее это дифференциальное выражение с любой степенью точности. Аппроксимируя в уравнении (1) производные соответствующими разностными отношениями, напомним для внутренних узлов решетки следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{z=-q}^q [S_{i,j+z}(x_{i,j}) w_{i,j+z}(x_{i,j}) - \lambda R_{i,j}(x_{i,j}) w_{i,j}(x_{i,j})] = \phi_{i,j}(x_{i,j}), \quad (2)$$

где $2q$ — порядок разностного уравнения,

$S(x_{i,j})$, $R(x_{i,j})$ и $\phi(x_{i,j})$ — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи, $(x_{i,j})$ — координаты узла.

Каждой внутренней точке области будет соответствовать одно такое уравнение.

Аналогично, краевым условиям будут сопоставлены разностные краевые условия. Число алгебраических уравнений полученной системы соответствует числу неизвестных функций в узлах области.

В общем случае трудно что-либо сказать относительно разрешимости полученной системы уравнений.

Решение задачи, в соответствии с вышеизложенным, ищем в виде:

$$w(x_{i,j}) = \sum_{k,t,\dots,r} A_{k,t,\dots,r} \Psi_k(x_{1j}) \Psi_t(x_{2j}) \dots \Psi_r(x_{nj}), \quad (3)$$

где индексы суммирования $k, t, \dots, r$ — принимают указанные ниже последовательности значений

$$k = 1, 2, \dots, N_k$$

$$t = 1, 2, \dots, N_t$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$r = 1, 2, \dots, N_r.$$

Здесь $N_k, N_t, \dots, N_r$ — число членов ряда разложения в направлении соответствующих координатных осей, $A_{k,t,\dots,r}$ — неизвестные обобщенные координаты, $\Psi_v(x_{ij})$ ($v = k, t, \dots, r$) — координатные функции, удовлетворяющие всем без исключения контурным и начальным условиям исследуемой задачи. Выбранная последовательность координатных функций должна обладать полнотой, пренебрежение которой может привести к ошибкам [7–10].

Как известно, условие тождественного обращения в нуль уравнения (1) при заданных контурных условиях, можно заменить более слабым требованием, а именно, чтобы $K[w(x_{i,j})]$ было ортогонально ко всем выбранным функциям $\Psi_{i,v}(x_{i,j})$.

Выполняя действия в соответствии с указанным положением и произведя суммирование по всем направлениям в исследуемой области, получим в случае однородной задачи следующую систему уравнений:

$$\sum_{k,t,\dots,r} A_{k,t,\dots,r} \left\{ \sum_{z=-p}^p [G_{i,j+z}(x_{i,j}) \Psi_{i,j+z}(x_{i,j}) - \lambda \Psi_{i,j}(x_{i,j})] \Psi_{i,j}(x_{i,j}) \right\} = 0, \quad (4)$$

где $G(x_{i,j})$ — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи.



Чтобы полученная система уравнений (4) допускала нетривиальные решения, определитель системы должен быть равен нулю. Приравняв его нулю получим уравнение, наименьший вещественный корень которого приближенно определяет первое собственное значение исследуемой задачи. Здесь следует отметить, что порядок определителя не зависит от плотности решетки, с помощью которой представлена заданная область, а зависит от числа обобщенных координат, входящих в уравнение (3).

В отношении сходимости процесса отметим, что она будет обеспечена во всех тех случаях, когда сходится процесс Бубнова-Галлеркина [7].

Решение неоднородной задачи сводится к нахождению неизвестных параметров $A_k, t, \dots, r$ аналогичным путем.

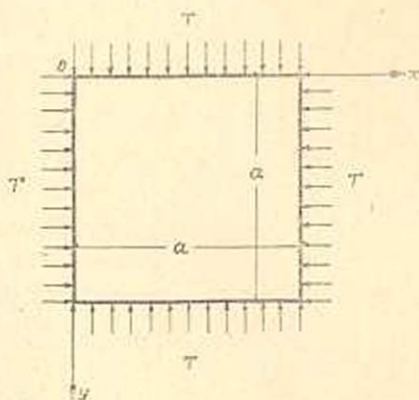
§ 2. Устойчивость и колебание квадратной пластины

Для иллюстрации метода и получения представления о достигаемой степени точности, рассмотрим задачу о колебании и устойчивости свободно опертой квадратной пластины (фиг. 1), подверженной действию равномерно распределенных сжимающих сил, лежащих в ее срединной плоскости и перпендикулярных к сторонам $x=0$;

$x=a$, $y=0$ и $y=a$. Интенсивность сжимающих сил на единицу длины контура обозначим через T .

Начало координат совместим с одной из вершин пластины. Координатные оси ox , oy , расположенные в срединной плоскости пластины, направим вдоль опертых ее краев.

Задача об исследовании собственных колебаний пластины при действии продольных сил T , как известно, приводится к рассмотрению дифференциального уравнения равновесия



Фиг. 1.

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{T}{D} \nabla^2 w + \frac{\rho}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где $w(x, y, t)$ — упругая поверхность пластины,

D — цилиндрическая жесткость пластины,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

ρ — масса пластины на единицу срединной площади.

Граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = a$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = a.$$
(6)

Для отыскания собственных частот пластины p , функцию $w(x, y, t)$, описывающую гармонические колебания, представим в виде:

$$w(x, y, t) = u(x, y) \sin pt. \quad (7)$$

Подставив (7) в (5) получим

$$\nabla^2 \nabla^2 u + \frac{T}{D} \nabla^2 u - \frac{\rho}{D} p^2 u = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) подстановкой

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (9)$$

приводится к безразмерной форме

$$\nabla^2 \nabla^2 u + S \nabla^2 u - \gamma^4 u = 0, \quad (10)$$

где

$$S = \frac{T a^2}{D}; \quad \gamma^4 = \frac{\rho a^4 p^2}{D}.$$

В уравнении (10) $\nabla^2 \nabla^2 u$ и $\nabla^2 u$ берутся относительно переменных ξ и η .

Разобьем пластину квадратной сеткой со стороной $\frac{1}{C}$. Умножив (10) на $h^4 = 1/C^4$ и заменив $h^4 \nabla^2 \nabla^2 u$, $h^2 \nabla^2 u$ разностными операторами [11], получим следующее разностное уравнение

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \text{---} \text{⑤} \text{---} \text{②} \\ \text{①} \text{---} \text{⑧} \text{---} \text{20} \text{---} \text{⑧} \text{---} \text{①} \\ \text{②} \text{---} \text{⑤} \text{---} \text{②} \\ \text{①} \end{array} \right\} + K \left[\begin{array}{c} \text{①} \\ \text{①} \text{---} \text{⑤} \text{---} \text{①} \\ \text{①} \end{array} \right] + \lambda^4 \text{①} \Big\} u = 0, \quad (11)$$

где

$$K = \frac{T a^2}{D C^2}, \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{C}. \quad (13)$$

Для получения расчетной сетки пластины, проведены прямые параллельные осям координат. Расстояние между двумя смежными линиями сетки вдоль осей координат примем равными

$$h = \frac{1}{6} \quad (\text{фиг. 2}).$$

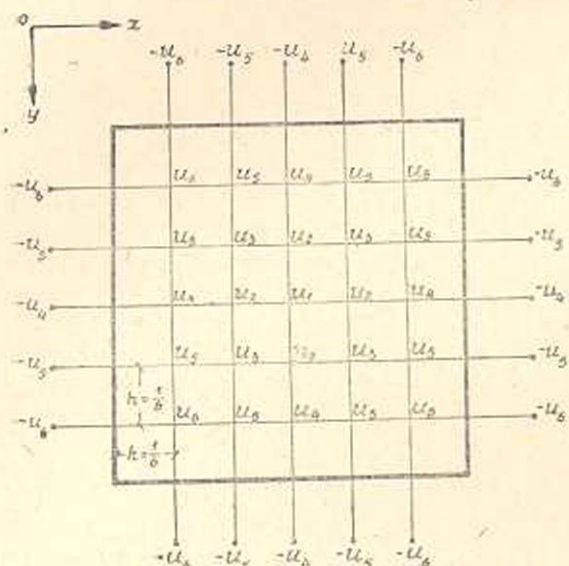
В силу симметрии расчетной сетки, только шесть внутренних узловых точек будут иметь различные ординаты. Чтобы уравнение (11) имело смысл для внутренних узловых точек, находящихся вблизи

контура, необходимо выразить значения функции u_i через фиктивные значения ее в узловых точках, лежащих вблизи контура вне пластины (на фиг. 2 указаны законтурные точки).

Необходимая зависимость устанавливается равенствами (6), а именно [12]:

$$u = 0; \quad u_{\lambda} = -u_{\mu} \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = 1 \quad (6')$$

$$u = 0; \quad u_{\nu} = -u_{\pi} \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \eta = 1.$$



Фиг. 2.

Написав уравнение (11) для указанных шести внутренних узловых точек с учетом (6'), получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых отклонений u_i :

для точки 1

$$20u_1 - 32u_2 + 8u_3 + 4u_4 = \lambda^2 u_1 - 4k(u_2 - u_1);$$

для точки 2

$$25u_2 - 16u_3 - 8u_4 - 8u_1 + 6u_5 = \lambda^2 u_2 - k(u_1 - 4u_2 + 2u_3 + u_4);$$

для точки 3

$$22u_3 - 16u_2 - 16u_5 + 4u_1 + 2u_6 + 2u_4 = \lambda^2 u_3 - 2k(u_2 - 2u_3 + u_5);$$

для точки 4

$$19u_4 - 16u_5 - 8u_2 + 4u_3 + 2u_6 + u_1 = \lambda^2 u_4 - k(u_2 - 4u_4 + 2u_5);$$

для точки 5

$$22u_5 - 8u_4 - 8u_6 - 8u_3 + 3u_2 = \lambda^2 u_5 - k(u_3 + u_4 - 4u_5 + u_6);$$

для точки 6

$$18u_6 - 16u_5 + 2u_3 + 2u_4 = \lambda^2 u_6 - 2k(u_5 - 2u_6).$$

Уравнение срединной упругой поверхности, удовлетворяющее условиям (6) на сторонах пластины, примем в виде:

$$u_i(\xi, \eta) = C \sin \pi \xi \sin \pi \eta \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (15)$$

Вычислим значения функции u_i в узловых точках и подставим их в систему уравнений (14), предварительно умножив каждое из уравнений соответственно на $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Просуммировав в заданной области полученную систему уравнений, получим однородное линейное уравнение относительно λ^4 и k . Зависимость между величиной частоты собственных колебаний пластины p и продольными сжимающими усилиями T , имеет вид:

$$p^2 = \frac{19}{\rho a^2} \left(\frac{19,69 D}{a^2} - T \right). \quad (16)$$

Если величина сжимающих сил T известна, то p определится из полученной зависимости (16).

Полагая в уравнении (16) $p = 0$, получим минимальное значение критической силы T_{kp}

$$T_{kp} = 19,69 \frac{D}{a^2}. \quad (17)$$

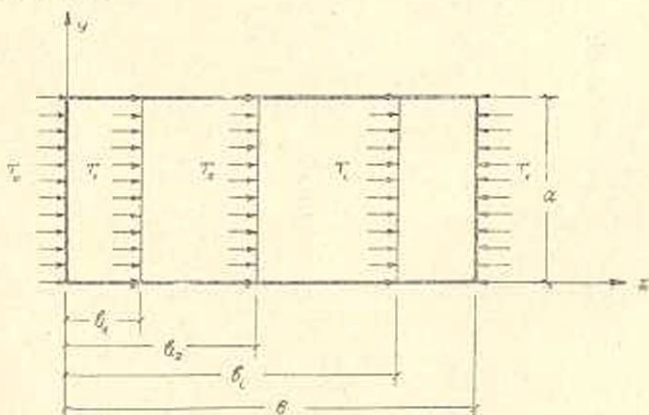
Принимая в уравнении (16) $T = 0$ получим основную собственную частоту колебаний

$$p = \frac{19,34}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}}. \quad (18)$$

Полученные результаты (17) и (18) отличаются от точных решений менее чем на 2%.₀

§ 3. Устойчивость пластины переменной толщины, сжатой ступенчатой нагрузкой

Рассмотрим устойчивость прямоугольной пластины со ступенчатым изменением толщины, опертой любым способом по краям (фиг. 3). На пластину действуют (в ее плоскости) по линиям $x = b_i$ равномерно распределенные сжимающие силы $T_0, T_1, \dots, T_v$. Силы, направленные в сторону оси ox , принимаем положительными, а в обратную сторону — отрицательными. Примем, что силы зависят от одного параметра T_0 :



Фиг. 3.

$$T_1 = \beta_1 T_0; T_2 = \beta_2 T_0, \dots, T_v = \beta_v T_0, \quad (19)$$

где β_i — известные числа,
 v — число участков пластины.

Задача заключается в нахождении такого критического значения T_0 , при котором плоская форма пластины перестает быть устойчивой формой равновесия.

В случае равномерного сжатия пластины вдоль оси ox , отклонения пластины u_i в точке (ξ_i, η_i) на каждом участке пластины удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Сетка узлов с номерами:} \\ \begin{array}{ccccccc} & & (1) & & & & \\ & (2) & (-3) & (2) & & & \\ (1) & (-5) & (-20) & (-8) & (1) & & \\ & (2) & (-8) & (2) & & & \\ & & (1) & & & & \end{array} \end{array} \right\} + \lambda \frac{P_i}{R_i} \left\{ \begin{array}{c} \text{Горизонтальная цепочка узлов:} \\ (1) \quad (-2) \quad (1) \end{array} \right\} u_i = 0, \quad (20)$$

где

$$P_i = \frac{T_0 + T_1 + \dots + T_i}{T_0}; \quad \lambda = \frac{a^2 T_0}{c^2 D_0}; \quad R_i = \frac{D_i}{D_0};$$

D_0 — цилиндрическая жесткость первого участка ($\xi = 0$).
Критическую нагрузку представим в следующей форме:

$$T_{kp} = V \frac{D_i}{a_{np}^2}, \quad (21)$$

где V — константа, характеризующая T_{kp} для пластины постоянной толщины сжатой по контуру, $a_{np} = \alpha a$ — приведенная сторона пластины; α — коэффициент, зависящий от способа нагружения и контурных условий пластины. Таким образом в силу формулы (21), задача сводится к нахождению значений α для различных отношений P и R .

Принимая

$$\lambda \frac{P_i}{R_i} = \frac{V}{\alpha_i^2}, \quad (22)$$

имеем

$$(T_0 + T_1 + \dots + T_i)_{kp} = V \frac{D_i}{a_{np}^2}. \quad (23)$$

Задаваясь различными отношениями P_i , R_i и $\frac{b_i}{a}$ получим значения α для любого фиксированного случая загрузки пластины.

Из равенства (22) следует

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{V R_i}{\lambda P_i}}. \quad (24)$$

Значения λ , входящие в равенство (24), нетрудно найти следуя § 1.

Рекомендуемый способ устраняет необходимость удовлетворять условиям сопряжения на границах участков пластины, в силу того, что упругая поверхность пластины аппроксимируется непрерывной функцией (3).

§ 4. Пример

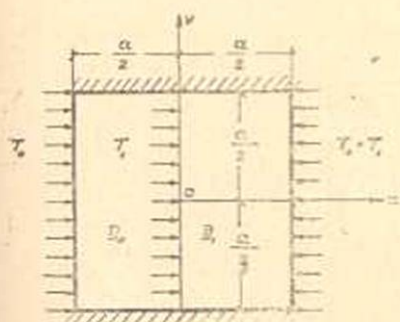
Рассмотрим квадратную пластину, равномерно сжатую параллельно оси ox (фиг. 4) по прямым $x=0$, $x=\frac{a}{2}$ и $x=-\frac{a}{2}$. Стороны параллельные оси ox жестко заделаны, а другие две стороны свободно оперты.

Отношения жесткостей участков R_i и отношения величины сжимающих сил P_i , приложенных к этим участкам полагаем заданными.

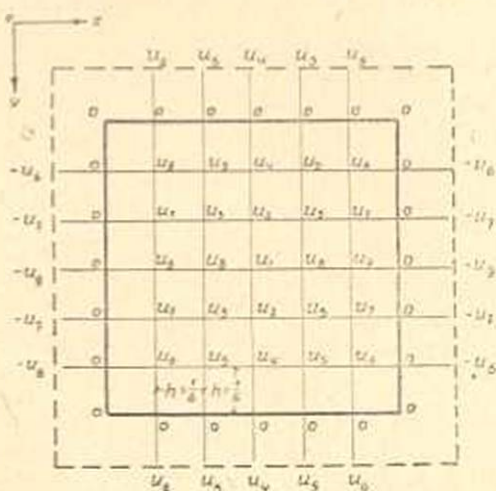
Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u &= 0; \quad u_z = -u_3 \quad \text{при } \xi = \pm 1/2 \quad (\text{опертые края}), \\ u &= 0; \quad u_y = u_6 \quad \text{при } \eta = \pm 1/2 \quad (\text{зжатые края}). \end{aligned} \quad (25)$$

Разобьем пластину на квадратные ячейки со стороной $1/6$. В силу одноосной симметрии загрузения пластины ступенчатой нагрузкой составим уравнения (20) для девяти внутренних узловых точек (фиг. 5):



Фиг. 4.



Фиг. 5.

для точки 1

$$20u_1 - 16u_5 - 16u_2 + 8u_3 + 2u_6 + 2u_4 = -\lambda(u_5 - u_1)U;$$

для точки 2

$$21u_2 - 16u_3 - 8u_4 - 8u_1 + 4u_5 + 4u_8 + 2u_7 = -\lambda(u_3 - u_2)U;$$

для точки 3

$$\begin{aligned} 22u_3 - 8u_2 - 8u_5 - 8u_7 - 8u_8 + 2u_4 + 2u_6 + 2u_9 + 2u_1 = \\ = -\lambda(u_2 - 2u_3 + u_7)U; \end{aligned}$$

для точки 4

$$21u_4 - 16u_5 - 8u_2 + 4u_3 - 2u_6 + u_1 = -\lambda(u_5 - u_4)U;$$

для точки 5

$$22u_5 - 8u_4 - 8u_6 - 8u_3 + 2u_7 + 2u_2 + u_9 = -\lambda(u_4 - 2u_5 + u_6)U;$$

для точки 6

$$20u_6 - 8u_5 - 8u_7 + 2u_3 + u_4 + u_9 = -\lambda(u_5 - 2u_6)U; \quad (26)$$

для точки 7

$$20u_7 - 8u_3 - 8u_6 - 8u_9 + 2u_8 + 2u_5 + u_2 = -\lambda(u_3 - 2u_7)U;$$

для точки 8

$$21u_8 - 8u_1 - 8u_9 - 16u_3 + 4u_2 + 4u_7 + 2u_5 = -\lambda(u_1 - 2u_8 + u_9)U;$$

для точки 9

$$19u_9 - 8u_5 - 16u_7 + 4u_3 + u_1 + 2u_6 = -\lambda(u_5 - 2u_9)U,$$

где

$$U = 1 + \frac{P}{R}.$$

Уравнение упругой поверхности пластины, удовлетворяющее граничным условиям (25), примем в виде

$$u_i(\xi, \eta) = C(1 - 4\eta_i^2)^2 \cos \pi \xi_i. \quad (27)$$

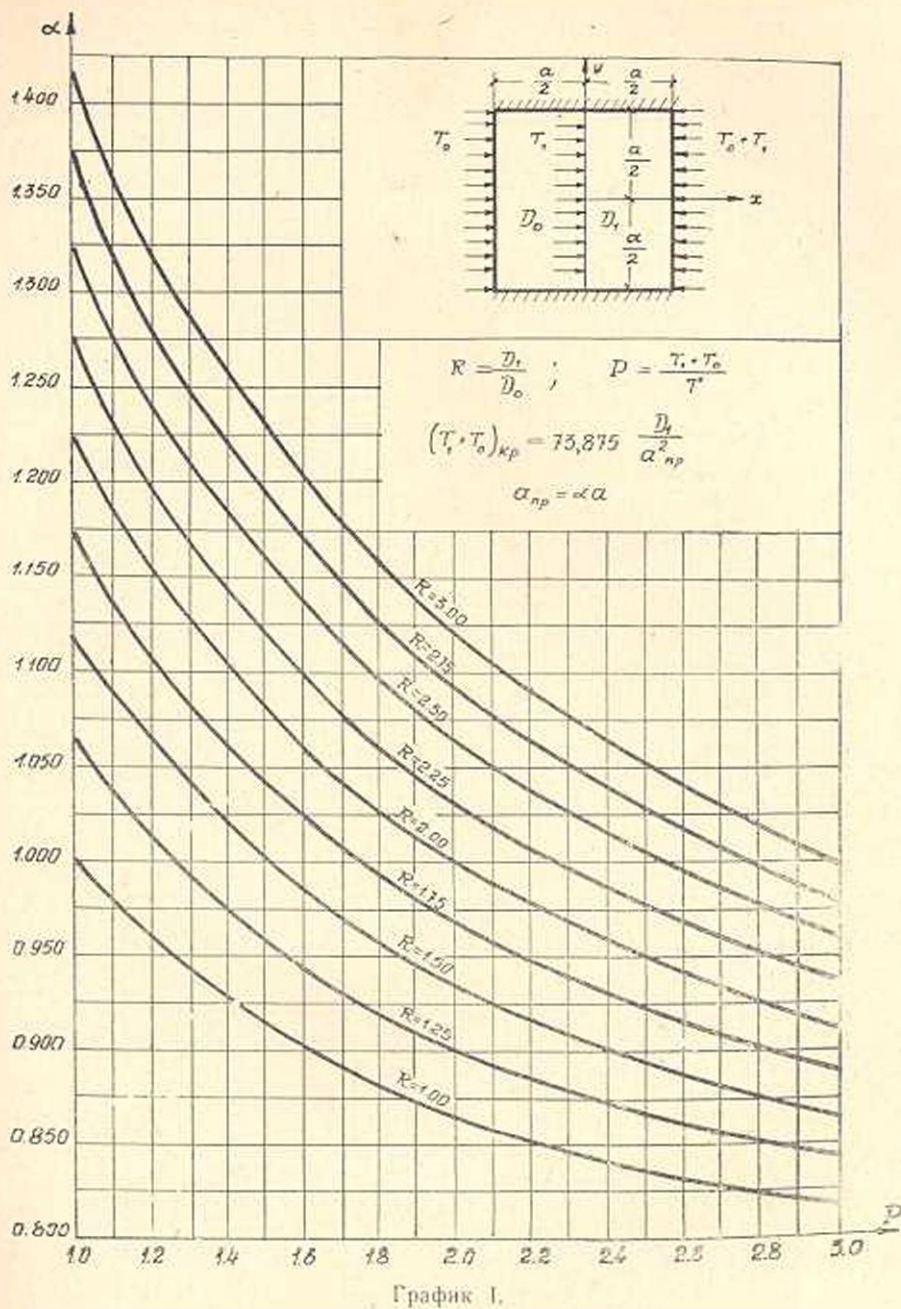
Вычислим значения функции u_i во всех узлах сетки и подставим в систему уравнений (26).

Умножим результат подстановки последовательно на все u_i просуммируем в заданной области и результат приравняем нулю. Тогда получим линейное уравнение относительно λ . По найденному значению λ пользуясь формулой (23) находим значение критической нагрузки.

Значения коэффициентов длины $\alpha = a_{кр} : a$ для случая $b_1 : a = 0,5$ при различных отношениях P и R приведены в таблице 1 и на графике 1.

		Значения α					Таблица 1
$R \backslash P$	P	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00		1,000	0,949	0,913	0,887	0,866	0,817
1,25		1,061	1,000	0,958	0,926	0,901	0,842
1,50		1,112	1,051	1,000	0,964	0,936	0,866
1,75		1,172	1,097	1,041	1,000	0,969	0,890
2,00		1,222	1,141	1,081	1,033	1,000	0,913
2,25		1,273	1,186	1,119	1,069	1,032	0,936
2,50		1,321	1,227	1,163	1,102	1,062	0,958
2,75		1,370	1,267	1,191	1,133	1,091	0,980
3,00		1,412	1,307	1,227	1,167	1,119	1,000

Вычислим значение $T_{кр}$ для случая $P = 2,5$ и $R = 2$. Пользуясь графиком 1 находим значение $\alpha = 0,950$. Тогда, в соответствии с формулой (23), для $T_{кр}$ получим следующее численное значение



$$(T_0 + T_1)_{кр} = 81,856 \frac{D_1}{a^2}$$

Для других значений отношения b/a определение величины $T_{кр}$ выполняется аналогично.

Մ. Ռ. Ֆելդման

ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՒ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՇԵՏՍՁՈՏՈՒԹՅԱՆ
ՄԻ ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ կատարված է փոփոխական հատվածքի [1] ձողերի կայունության ու տատանումների հետազոտության եղանակի տարածումը ալյումինյան ձողերի վրա, որոնք կապված են թիթեղների ու թաղանթների ամրության, կայունության և տատանումների հետազոտության հետ:

Մնդրի լուծումը որոշվում է կոնտուրային ու սկզբնական պայմաններին բավարարող [3] կոորդինատային ֆունկցիաները որոշող հաջորդականության տեսքով:

[3] ֆունկցիաները տեղադրելով [2] տարրերակային համասարտմանի սխեմի մեջ և գործողությունները կատարելով Բուրնով-Պալլերկինի մեթոդին համապատասխանորեն, ստանում ենք [4] համասարտմանի սխեմի:

Ոչ արվիկալ լուծում ստանալու համար անհրաժեշտ է, որ սխեմի որոշիչը համասար լինի զրոյի:

Որոշիչի ամենափոքր իրական արժանություն է հետազոտվող խնդրի առաջին սեփական արժեքը:

Նկատենք, որ որոշիչի կարգը կախված է ոչ թե տիրույթում վերցված հանգույցների թվից, այլ [4] համասարման մեջ մտնող ընդհանրացված կոորդինատների թվից:

Անհամասն խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ պարամետրերը [4]-ում համանմանման ճանապարհով գտնելուն:

Որպես կիրառություններ դիտարկվում են ազատ հենված քառակուսի թիթեղի տատանումների ու կայունության խնդիրները, երբ սալը իրեն հարթության մեջ բեռնավորված է համասարաչափ բաշխված բեռով, ինչպես նաև աստիճանափոփոխական հաստությամբ ալյումին քառակուսի թիթեղի կայունության խնդիրը, որը սեղմված է աստիճանական բեռով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдман М. Р. Устойчивость стержней переменного сечения. Известия АН Армянской ССР (серия физ.-мат. наук), том X, № 4, 1957.
2. Абрамов Г. Д. Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых изборов и оболочек разностными уравнениями. Судпромгиз, 1951.
3. Фельдман М. Р. О применении метода Галеркина к конечноразностным уравнениям. Инженерный сборник. Институт механики Академии наук СССР, том II, вып. 1, 1943.
4. Фельдман М. Р. Приближенный метод исследования статической и динамической устойчивости стержней. Материалы XV научно-технической конференции ДИСИ, 1955.
5. Фельдман М. Р. Определение критических угловых скоростей вала переменного сечения. Вопросы горной механики, том XXVII, Углетехиздат, 1957.
6. Кодлатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы, 1953.

7. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике, 1951.
8. Лурье А. И. Устойчивость пластинки, сжатой сосредоточенными силами. Труды ЛИИ, № 3, 1939 (раздел физ. мат. наук, в. 1).
9. Филоненко-Бородич М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. Прикладная математика и механика, № 1, 1946.
10. Броуде Б. М. Предельные состояния стальных балок. 1953.
11. Сальвадори М. Д. Численные методы в технике. Издательство иностранной литературы, 1955.
12. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Издательство АН УССР, ч. I, 1948; ч. II, 1952.