

А. А. Талалаян

Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера

Функции системы Шаудера определяются следующим образом. Пусть $a < b$ и $\{W_i\}$ $i \geq 2$ последовательности всех рациональных чисел интервала (a, b) . Рассмотрим последовательность

$$W_1 = a, \quad W_2 = b, \quad W_3, \dots, W_n, \dots$$

Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определяются следующим образом: $\varphi_1(W_1) = 1$, $\varphi_1(W_2) = 0$ и $\varphi_1(t)$ линейна на $[a, b]$, $\varphi_2(W_1) = 0$, $\varphi_2(W_2) = 1$ и $\varphi_2(t)$ линейна на $[a, b]$.

Для $n \geq 2$ отрезок $[a, b]$ точками $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$ разделен на $n-2$ частичных интервалов и пусть (W_i, W_k) есть тот интервал из них, который содержит W_n .

Функция $\varphi_n(t)$ определяется следующим образом: $\varphi_n(t) = 0$ вне интервала (W_i, W_k) (включая концы этого интервала), $\varphi_n(W_n) = 1$ и линейна в каждом из интервалов (W_i, W_n) , (W_n, W_k) .

Известно, что система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ является базисом в пространстве непрерывных функций, определенных на $[a, b]$. Причем, если $f(t)$ непрерывная функция, определенная на $[a, b]$, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \quad (1)$$

где

$$c_1 = f(W_1), \quad c_2 = f(W_2), \dots, \quad c_i = f(W_i) - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \varphi_k(W_i) \quad i \geq 2 \quad (2)$$

равномерно на $[a, b]$ сходится к $f(t)$.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Для произвольной измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]^*$, существует ряд

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры. В известной теореме Меньшова о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами [1] предполагается, что представляемая функция конечна почти всюду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Для доказательства теоремы нужна следующая лемма.

Лемма. Пусть $f(x)$ почти везде конечная измеримая функция, определенная почти всюду на $[a, b]$.

Для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить действительные числа $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ и множество $E \subset [a, b]$ такие, что выполняются следующие условия

$$1^\circ. |a_k| < \varepsilon \quad n \leq k \leq m$$

$$2^\circ. \text{mes } E > 1 - \varepsilon$$

$$3^\circ. \left| \sum_{k=n}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для любого } x \in E$$

$$4^\circ. \left| \sum_{k=n}^s a_k \varphi_k(x) \right| < |f(x)| + \varepsilon \quad \text{для любого } x \in E$$

и $s = n, n+1, \dots, m$.

Доказательство. В силу теоремы Лузина существуют непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x)$ и множество $F_0 \subset [a, b]$ такие, что

$$f(x) = g(x) \quad \text{при } x \in F_0 \quad (3)$$

$$\text{mes } F_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Из построения системы $\{\varphi_n(x)\}$ и из (1) и (2) легко видеть, что для каждого из интервалов (W_i, W_k) , полученных разделением отрезка $[a, b]$ конечным числом точек $W_1, W_2, \dots, W_n$, некоторая бесконечная подпоследовательность $\varphi_{ik1}(x), \varphi_{ik2}(x), \dots, \varphi_{ikj}(x), \dots$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ будет обладать следующими свойствами:

а) $\varphi_{ikj}(x) = 0$ при $x \in (W_i, W_k) \quad j = 1, 2, \dots$

б) для любой непрерывной функции $\tau(x)$, определенной на интервале (W_i, W_k) и такой, что $\tau(W_i) = \tau(W_k) = 0$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ikj} \varphi_{ikj}(x),$$

где

$$c_{ik1} = \tau(W_{ik1}), \dots, \quad c_{ikj} = \tau(W_{ikj}) - \sum_{s=1}^{j-1} c_{iks} \varphi_{iks}(W_{ikj}),$$

а через W_{ikj} , $j = 1, 2, \dots$, обозначается j -тая рациональная точка последовательности рациональных точек $W_2, W_3, \dots, W_n, \dots$ отрезка $[a, b]$, попадающая в интервал (W_i, W_k) , равномерно сходится к $\tau(x)$.

Заметив, что система $\varphi_{ik1}(x), \varphi_{ik2}(x), \dots$ для отрезка $[W_i, W_k]$ строится точно так же, как система $\{\varphi_n(x)\}$ для $[a, b]$, легко видеть, что имеют место также следующие условия

$$c) \quad \left| \sum_{j=1}^n c_{ikj} \varphi_{ikj}(x) \right| \leq \max_{x \in (W_i, W_k)} |\tau(x)|,$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $n = 1, 2, \dots$,

$$d) \quad |c_{ikj}| \leq 2 \max_{x \in (W_i, W_k)} |\tau(x)| \quad j = 1, 2, \dots$$

Пусть $N > n$ настолько большое число, что в каждом из интервалов (W_i, W_k) , полученных разделением отрезка $[a, b]$ точками $W_1, W_2, \dots, W_N$, колебание функции $g(x)$ меньше чем ε .

Внутри каждого интервала (W_i, W_k) возьмем интервал (W'_i, W'_k) , $W_i < W'_i < W'_k < W_k$ так, чтобы

$$W'_k - W'_i > W_k - W_i - \frac{\varepsilon}{2N}. \quad (5)$$

Функцию $g'(x)$ на отрезке $[a, b]$ определим следующим образом: для каждого интервала (W_i, W_k) полагаем

$$g'(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in (W'_i, W'_k); \quad g'(W_i) = g'(W_k) = 0 \quad (6)$$

и линейна в промежутках (W_i, W'_i) и (W'_k, W_k) .

Очевидно, $g'(x)$ будет обладать следующими свойствами

$$\max_{x \in (W_i, W_k)} |g'(x)| \leq \max_{x \in (W_i, W_k)} |g(x)|; \quad (7)$$

$$\text{mes } E[g(x) \neq g'(x)] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

В силу условий b), c), d) для каждого интервала (W_i, W_k) можно определить действительные числа $a_{ik1}, a_{ik2}, \dots, a_{ikp}$ такие, что выполняются условия

$$\left| \sum_{j=1}^p a_{ikj} \varphi_{ikj}(x) - g'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x \in (W_i, W_k); \quad (9)$$

$$\left| \sum_{j=1}^s a_{ikj} \varphi_{ikj}(x) \right| \leq \max_{x \in (W_i, W_k)} |g'(x)| \quad (10)$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $1 \leq s \leq p$;

$$|a_{ikj}| \leq 2 \max_{x \in (W_i, W_k)} |g'(x)| \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (11)$$

Перенумеруем функции $\varphi_{ikj}(x)$ в порядке их следования в последовательности $\{\varphi_k(x)\}$. Пусть эти функции будут $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{v_s}(x)$.

Так как все эти функции получены после N -ого шага, где $N > n$, то $v_s > n$.

Полагая $a_{v_q} = a_{ikj}$, если $\varphi_{v_q}(x) = \varphi_{ikj}(x)$ ($q = 1, 2, \dots, s$) и $a_r = 0$ при $r \neq v_q$, $q = 1, 2, \dots, s$ и принимая во внимание условие а), мы видим, что числа $a_n, a_{n+1}, \dots, a_l$, где полагается $l = v_s$, в силу (9), (10) и (11) будут удовлетворять следующим условиям

$$\alpha) \quad \left| \sum_{k=n}^l a_k \varphi_k(x) - g'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для любого } x \in [a, b];$$

б) для каждого интервала (W_i, W_k) имеет место

$$\left| \sum_{k=n}^s a_k \varphi_k(x) \right| < \max_{x \in (W_i, W_k)} |g'(x)|$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $n < s < l$;

$$\gamma) \quad |a_k| < 2 \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| \quad \text{для любого } n < k < l.$$

Принимая во внимание (7) и (8) и учитывая, что колебание функции $g'(x)$ на каждом интервале (W_i, W_k) меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, из условий а),

б) и γ) мы видим, что нами доказано следующее.

Для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить действительные числа $a_n, a_{n+1}, \dots, a_l$ и множество $E_0 \subset [a, b]$ такие, что выполняются следующие условия

$$\alpha') \quad |a_k| < 2 \max_{x \in [a, b]} |g(x)|, \quad n < k < l$$

$$\beta') \quad \text{mes } E_0 > 1 - \varepsilon$$

$$\gamma') \quad \left| \sum_{k=n}^l a_k \varphi_k(x) - g(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } x \in E_0$$

$$\delta') \quad \left| \sum_{k=n}^s a_k \varphi_k(x) \right| < |g(x)| + \varepsilon$$

для любого $x \in E_0$ и $n < s < l$.

Ясно, что если мы возьмем целое положительное число M настолько большое, что

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \frac{2g(x)}{M} \right| < \varepsilon,$$

и воспользуемся условиями $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$, $\delta')$ M раз, взяв в этих условиях $\frac{\varepsilon}{2M}$ вместо ε и каждый раз беря n больше чем номера всех функций, участвующих в предыдущих шагах, то мы определим действительные числа $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ и множество E_0 такие, что будут выполняться следующие условия:

$$1) |a_k| < \varepsilon \quad k = n, n+1, \dots, m$$

$$2) \text{mes } E_0' > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$3) \left| \sum_{k=n}^m a_k \varphi_k(x) - g(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in E_0'$$

$$4) \left| \sum_{k=n}^s a_k \varphi_k(x) \right| < |g(x)| + \varepsilon$$

для любого $x \in E_0'$ и $n \leq s \leq m$.

Обозначим $E = F_0 \cdot E_0'$. В силу условий (4) и (2) будет

$$\text{mes } E > b - a - \varepsilon,$$

а из условия (3), учитывая 1), 2), 3) и 4), мы видим, что выбранные нами числа $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ и множество E удовлетворяют условиям леммы.

Доказательство теоремы. Пусть $F(x)$ измеримая функция, определенная почти всюду на отрезке $[a, b]$. Обозначим через A_+ и A_- те множества, где функция соответственно равна $+\infty$ и $-\infty$, и через B — множество, где $f(x)$ принимает конечные значения.

Имеем:

$$\text{mes } A_+ + \text{mes } A_- + \text{mes } B = b - a. \quad (12)$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (13)$$

Функцию $f_1(x)$ определим следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in B \\ +1 & \text{при } x \in A_+ \\ -1 & \text{при } x \in A_- \end{cases} \quad (14)$$

Применяя лемму для $f_1(x)$, $\varepsilon > 0$, $n = 1$, определим действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и множество E_1 , такие, что выполняются условия

$$1^\circ. |a_k| < \varepsilon_1, \quad k = 1, 2, \dots, n_1$$

$$2^\circ. \text{mes } E_1 > b - a - \varepsilon_1$$

$$3^\circ. \left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k \varphi_k(x) - f_1(x) \right| < \varepsilon_1 \quad \text{для любого } x \in E_1$$

$$4^\circ. \left| \sum_{k=1}^s a_k \varphi_k(x) \right| < |f_1(x)| + \varepsilon_1 \quad \text{для любого } x \in E_1$$

и $s = 1, 2, \dots, n_1$.

Предположим теперь, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{n_i}, \dots, a_{n_i}$ и множества $E_1, E_2, \dots, E_i$ определены.

Положим

$$f_{i+1}(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) & \text{при } x \in B \\ +1 & \text{при } x \in A_+ \\ -1 & \text{при } x \in A_- \end{cases} \quad (15)$$

Применяя лемму, для $f_{i+1}(x)$, ε_{i+1} и $n_i + 1$, определяем действительные числа $a_{n_i+1}, a_{n_i+2}, \dots, a_{n_{i+1}}$ и множество E_{i+1} такие, что выполняются условия:

$$A) |a_k| < \varepsilon_{i+1}, \quad n_i + 1 \leq k \leq n_{i+1}$$

$$B) \text{mes } E_{i+1} > b - a - \varepsilon_{i+1}$$

$$C) \left| \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) - f_{i+1}(x) \right| < \varepsilon_{i+1} \quad \text{для любого } x \in E_{i+1}$$

$$D) \left| \sum_{k=n_i+1}^s a_k \varphi_k(x) \right| < |f_{i+1}(x)| + \varepsilon_{i+1}$$

для любого $x \in E_{i+1}$, $n_i + 1 \leq s \leq n_{i+1}$.

Таким образом мы определяем последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и последовательность множеств $E_1, E_2, \dots$, которые удовлетворяют условиям A), B), C) и D), а $f_{i+1}(x)$ определяется условием (15) для любого $i = 1, 2, \dots$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (16)$$

удовлетворяет условиям теоремы.

Из условия A) вытекает:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Положим

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E_k. \quad (17)$$

В силу (13) будем иметь

$$\text{mes } E = b - a. \quad (18)$$

Покажем, что на множестве E ряд (16) сходится к $f(x)$.

Пусть $x \in EA_+$.

Начиная с некоторого номера n_x будем иметь

$$x \in E_n A_+ \text{ для любого } n > n_x. \quad (19)$$

Пусть n_{i_0} — наименьшее число из чисел n_i , фигурирующих в условиях A), B), C) и D), для которых $i > n_x$, и пусть $n > n_{i_0}$. Ясно, что для некоторого i , $i \geq i_0$ будем иметь

$$n_i < n < n_{i+1}. \quad (20)$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n_{i_0}} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_{i_0}+1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (21)$$

$$\sum_{k=n_{i_0}+1}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{s=i_0}^i \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} a_k \varphi_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x). \quad (22)$$

В силу (19) и (15) $f_s(x) = 1$ для всех s , поэтому из условий C) и D) получаем:

$$\sum_{s=i_0}^i \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} a_k \varphi_k(x) > \sum_{s=i_0}^i (1 - \varepsilon_s), \quad (23)$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) \right| < 2(1 + \varepsilon_{i+1}). \quad (24)$$

Следовательно

$$\sum_{k=n_{i_0}+1}^n a_k \varphi_k(x) > \sum_{s=i_0}^i (1 - \varepsilon_s) - 2(1 + \varepsilon_{i+1}). \quad (25)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $i \rightarrow \infty$ и в силу (13), (21) и (25) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = +\infty \quad \text{для любого } x \in EA_+. \quad (26)$$

Точно так же можно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = -\infty \quad \text{для любого } x \in EA_-. \quad (27)$$

Пусть теперь $x \in E \cdot B$. Для некоторого целого n_x будем иметь

$$x \in B \cdot E_n \quad \text{при } n > n_x. \quad (28)$$

Возьмем i_0 настолько большое, что $i_0 - 1 > n_x$ и пусть $n > n_{i_0}$. Предположим, что n удовлетворяет неравенству

$$n_i < n \leq n_{i+1}. \quad (29)$$

В силу (15) и условия C), где вместо i подставлено $i - 1$, будем иметь

$$\left| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon_i, \quad (30)$$

а из (15) и (30) следует

$$|f_{i+1}(x)| < \varepsilon_i. \quad (31)$$

Из (29), (31) и условия D) следует

$$\left| \sum_{n_i+1}^n a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}. \quad (32)$$

В силу (30) и (32) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| < 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}. \quad (33)$$

Очевидно $i \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$, и из (33) и (13) вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = f(x),$$

где x произвольная точка из множества $E \cdot B$.

Теорема 1 доказана. Возникает вопрос, существуют ли ортонормальные системы, обладающие указанным в теореме 1 свойством системы Шаудера?

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Какова бы ни была полная ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[a, b]$, можно опреде-

лать ортонормированную систему $\{\Phi_n(x)\}$, обладающую следующими свойствами:

а) каждая функция $\Phi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) есть конечная линейная комбинация функций системы $\{\varphi_n(x)\}$.

б) для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]^*$, существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в работе [2] (см. также [3], стр. 381; следствие леммы 3).

Лемма. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система на $[a, b]$ и $f(x) \in L_2[a, b]$.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n > 1$ можно определить действительные числа $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_m$ и множество $E \subset [a, b]$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $\left| f(x) - \sum_{k=n+1}^m c_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon$ при $x \in E$
- 2) $\text{mes } E > b - a - \varepsilon$
- 3) $|a_k| \leq \varepsilon$ ($k = n+1, n+2, \dots, m$).

Пусть $\{P_n(x)\}$ все полиномы с рациональными коэффициентами и $\{\varepsilon_n\}$ последовательность положительных чисел таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (34)$$

Применяя лемму, мы можем определить последовательность функций

$$\Phi_n^*(x) = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} c_i \varphi_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (35)$$

и последовательность множеств $\{E_n\}$ такие, что

$$|\Phi_n^*(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n \quad \text{при } x \in E_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

$$\text{mes } E_n > b - a - \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (37)$$

При этом можно предполагать, что $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$.

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{\Phi_n^*(x)}{\|\Phi_n^*(x)\|} = \frac{\Phi_n^*(x)}{\left(\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} c_i^2 \right)^{1/2}}. \quad (38)$$

Очевидно $\{\Phi_n(x)\}$ есть ортонормированная система.

* Функция $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Из (36) и (37) вытекает, что последовательность обладает следующим свойством.

Для произвольной, почти везде конечной измеримой функции $g(x)$, определенной на $[a, b]$, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и натуральное число N , существует функция $\Phi_n^*(x)$, где $n > N$, такая, что

$$mE(|\Phi_n^*(x) - g(x)| > \varepsilon) < \varepsilon. \quad (39)$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, и $\{\eta_k\}$ — последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \quad (40)$$

Возьмем последовательность $\{g_k(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x) \quad (41)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Легко видеть, что, применяя свойство (39), из последовательности $\{\Phi_n^*(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\Phi_{n_i}^*(x)\}$, обладающую следующим свойством

$$\text{mes } E\left(\left|\sum_{i=1}^k \Phi_{n_i}^*(x) - g_k(x)\right| > \eta_k\right) < \eta_k. \quad (42)$$

Последовательность действительных чисел $\{a_s\}$ определим следующим образом

$$a_s = \begin{cases} \|\Phi_{n_i}^{(*)}(x)\| & \text{при } s = n_i \quad (i = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } s \neq n_i \quad (i = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (43)$$

Ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(x)$$

будет сходиться к $f(x)$ почти всюду.

В самом деле, из (38) и (43) следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{n_i}^*(x). \quad (44)$$

С другой стороны, из условий (40) и (42) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=1}^k \Phi_{n_l}^*(x) - g_k(x) \right] = 0 \quad (45)$$

почти всюду на $[a, b]$ (см. например [3], стр. 372, лемма 1).

Из (41) и (45) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k \Phi_{n_l}^*(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Отсюда, в силу (44), ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(x)$$

будет сходиться к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Теорема 2 доказана.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский гос. университет

Поступила 4 VII 1958

Ս. Ս. Թադևոսյան

ՑԱՆԿԱՑԱԾ ԶԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ԸՍՏ ՇԱՌԴԴԵՐԻ ՄԻՍՏԵՄԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ապացուցվում է, որ հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. Ներառյալ $\{\varphi_n(x)\}$ -ը Շառլերի սխեման է՝ որոշված $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

շարք, որը զուգամիասին է $f(x)$ ֆունկցիային համարյա մեծությունը $[a, b]$ հատվածում, քնդ որում

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Թեորեմ 2. Ցանկացած $\{\varphi_n(x)\}$ սխեմայի համար, որը օրթոնորմալ է և լրիվ $[a, b]$ հատվածում, կարելի է որոշել $[a, b]$ -ում օրթոնորմալ $\{\Phi_n(x)\}$ սխեմա, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

ա) Յուրաքանչյուր $\Phi_n(x)$, ($n = 1, 2, \dots$) ֆունկցիա հանդիսանում է $\{\varphi_n(x)\}$ սխեմայի ֆունկցիաների վերջավոր զծային կոմբինացիա.

բ) $[a, b]$ հատվածում որոշված ցանկացած չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

շարք, որը զուգամիտում է $f(x)$ -ին համարյա ամենուրեք:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Меньшов Д. Е. Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. Талалян А. А. Известия АН АрмССР (серия физико-математических наук), т. X, № 3, 1957.
3. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., 1958.