ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 2, 1959 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. Х. Арутюнян

Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Согласно упругой аналогии решение этой задачи тождественно решению плоской контактной задачи нелинейной теории упругости, при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, когда последние развиваются в определенном направлении.

Предварительно, в § 1, решается непосредственно в перемещениях, задача о пластическом равновесии полуплоскости со степенным упрочнением материала, находящейся под действием сосредоточенной силы, приложенной нормально к ее свободной поверхности.

Далее, пользуясь этим решением, в § 2 доказывается, что, решение плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2.17) с ядром $K(t, x) = |t-x|^{\mu-1}$ $(0<\mu<1)$.

Пользуясь методом, предложенным М. Г. Крейном [1] для решения интегральных уравнений первого и второго рода с ядром вида $K(t, x) = H(|t-x|)$, решение основного интегрального уравнения контактной задачи (2.17) для пластичности со степенным упрочнением можно представить в замкнутой форме как для случая симметричного, так и кососимметричного нагружения сжимаемых тел.

В качестве приложения рассматривается контактная задача о давлении жесткого штампа с плоским основанием на нелинейно-упругую полуплоскость под действием сосредоточенной силы P или момента M_0, приложенных к середине штампа.

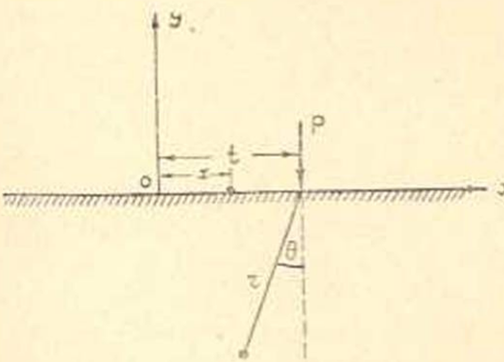
Отметим, что предложенный здесь метод решения контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением нетрудно распространить на весьма важную для практики задачу о контакте двух сжимаемых тел в условиях установившейся ползучести; при степенном законе связи между скоростями деформаций и напряжений ползучести.

§ 1. Равновесие полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной к ее свободной поверхности

Рассмотрим задачу о пластическом равновесии полуплоскости, нагруженной вертикальной сосредоточенной силой, приложенной к ее свободной поверхности, при наличии степенного упрочнения материала (фиг. 1). Эта задача в условиях плоской деформации, в напряжениях, была решена В. В. Соколовским [2], который нашел распределение напряжений и деформаций в полуплоскости при одновременном действии вертикальной и горизонтальной сил, приложенных к ее поверхности.

Однако задача определения перемещений в рассматриваемой полуплоскости по заданным компонентам деформаций, приведенная в работе [2], сводится к решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, которое в замкнутой форме не интегрируется. Поэтому в этом параграфе дается решение этой же задачи непосредственно в перемещениях, так как именно в такой форме оно нам понадобится в дальнейшем при исследовании плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Воспользуемся уравнениями теории упруго-пластических деформаций при плоском деформированном состоянии тела в форме



Фиг. 1.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_r - \sigma), \quad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_\theta - \sigma),$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{r\theta}, \qquad \varepsilon_z = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \tag{1.2}$$

написанной в предположении о несжимаемости материала

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0. \tag{1.3}$$

В зависимости (1.1) через σ_i обозначена интенсивность касательных напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{r\theta}^2}, \tag{1.4}$$

а через ε_i — интенсивность деформаций сдвига

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + 6\gamma_{r\theta}^2}. \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах (r, θ, z) применительно к этой задаче имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}[r\sigma_r] + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0. \tag{1.6}$$

Зависимости между компонентами деформаций и компонентами смещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r},$$
$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.7}$$

где u, v и w — компоненты перемещений вдоль направлений координат r, θ и z, дают дифференциальное уравнение совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r^2\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r\partial \theta} - 2\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0. \tag{1.8}$$

Граничными условиями задачи являются

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{1.9}$$

т. е. на свободной поверхности полуплоскости отсутствуют внешние условия.

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости между σ_i и ε_i:

$$\sigma_i = K\varepsilon_i^{\mu}, \tag{1.10}$$

где K и μ — физические константы, причем $0<\mu<1$, так как кривая деформаций (1.10) для реальных материалов в состоянии упрочнения обращена всегда вогнутостью вниз. При $K = \frac{2}{3}E$ и $\mu = 1$ имеем обычный закон Гука для идеально-упругого тела.

Будем искать точное решение поставленной задачи в перемещениях в следующей форме:

$$u = \varkappa[f_1(r)\chi'(\theta) + f'_1(\theta)],$$
$$v = \varkappa[f_2(r)\chi(\theta) - f_0(\theta)], \tag{1.11}$$
$$w = 0, \qquad \varkappa = \pm 1.$$

где $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\chi(\theta)$ и $f_0(\theta)$ — некоторые однозначные и непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $r > 0$.

Из первых двух соотношений (1.7) имеем

$$\varepsilon_r = \varkappa f'_1(r)\chi'(\theta),$$
$$\varepsilon_\theta = \varkappa\frac{1}{r}[f_2(r) + f_1(r)]\chi'(\theta). \tag{1.12}$$

Пользуясь соотношениями (1.12) и условием несжимаемости материала (1.3), находим

$$f_2(r) = -[f'_1(r)\cdot r + f_1(r)]. \tag{1.13}$$

Положим, что касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ во всей полуплоскости равно нулю. Тогда, в силу (1.1) и (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \tag{1.14}$$

Подставляя в (1.14) выражения для компонентов перемещений и их производных из (1.11) и пользуясь равенством (1.13), для определения функций $f_0(\theta)$, $\chi(\theta)$ и $f_1(r)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} f''_0(\theta) + f_0(\theta) = 0,\\ \chi''(\theta) + \lambda^2\chi(\theta) = 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

и

$$r^2 f''_1(r) + r f'_1(r) - f_1(r)\,[1-\lambda^2] = 0, \tag{1.16}$$

где λ — параметр, подлежащий определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (1.16) есть

$$\begin{gathered} f_1(r) = C_1 r^{\sqrt{1-\lambda^2}} + C_2 r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \text{при} \qquad -\infty < \lambda^2 < 1, \end{gathered} \tag{1.17}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Принимая очевидное условие, что при $r \to \infty$ перемещения u и v должны быть конечными, в силу соотношений (1.11), (1.13) и (1.17) получим, что $C_1 = 0$. Тогда выражение (1.17) для $f_1(r)$ примет вид

$$f_1(r) = r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad (-\infty < \lambda^2 < 1), \tag{1.18}$$

где для простоты дальнейших выкладок принято $C_2 = 1$.

Пользуясь выражениями (1.7), (1.12), (1.13), (1.14) и (1.18) находим

$$\begin{gathered} \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\varkappa\sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\chi'(\theta), \\ \gamma_{r\theta} = \varepsilon_z = 0, \end{gathered} \tag{1.19}$$

при этом функция $\chi(\theta)$ является решением уравнения (1.15).

Интенсивность деформаций сдвига ε_i в силу соотношений (1.5) и (1.19) будет

$$\varepsilon_i = |\varepsilon_r| = \sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\chi'(\theta), \tag{1.20}$$

а интенсивность касательных напряжений σ_i, равная согласно (1.4), (1.2) и (1.14) $\sigma_i = \frac{1}{2}|\sigma_r - \sigma_\theta|$, вследствие степенного условия пластичности с упрочнением (1.10) определится формулой

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\left|\sigma_r - \sigma_\theta\right| = K\left\{\sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\, \chi'(\theta)\right\}^{\mu}, \tag{1.21}$$

откуда

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \varkappa 2K\left\{\sqrt{1-\lambda^2}\, r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\, \chi'(\theta)\right\}^{\mu}. \tag{1.22}$$

Полученные выражения (1.19), (1.20), (1.21) и (1.22) для компонентов деформаций и напряжений, в силу равенств (1.10), (1.19) и (1.15), тождественно удовлетворят как уравнению пластичности (1.1), так и уравнению совместности деформаций (1.8).

Подставляя выражения для компонентов напряжения из (1.22) в уравнения равновесия (1.6) и учитывая, что $\tau_{r\theta} = 0$, находим, что эти уравнения будут удовлетворяться, если положить

$$\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{\mu} - 1, \qquad \sigma_\theta = \text{const}. \tag{1.23}$$

Но на свободной поверхности полуплоскости напряжения отсутствуют, т. е.

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Это условие будет совместимо с (1.23) только в том случае, если принять $\sigma_\theta = 0$ повсюду. Тогда (1.23) примет вид

$$\lambda^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad \sigma_\theta = 0. \tag{1.24}$$

Приравнивая компонент главного вектора усилия, действующего в любом сечении полуплоскости, ограниченной цилиндрической поверхностью $r = \text{const}$, заданной вертикальной силе P, получим равенство, которому должно удовлетворить напряжение σ_r

$$P = -\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cdot \cos\theta \cdot r d\theta. \tag{1.25}$$

Из соотношений (1.24) следует, что, при $0 < \mu < 1$, параметр λ^2 изменяется в пределах $-\infty < \lambda^2 \leqslant 1$, причем знак равенства $\mu = \lambda^2 = 1$ соответствует, согласно (1.10), случаю равновесия упругой полуплоскости.

Перейдем к определению смещений u и v в полуплоскости.

Решение первого дифференциального уравнения (1.15) есть

$$f_0(\theta) = C_5 \cos\theta + C_6 \sin\theta. \tag{1.26}$$

Решение второго дифференциального уравнения (1.15) будет иметь различный вид в зависимости от значения μ. Для $\mu = \frac{1}{2}$, $\chi(\theta)$ есть линейная функция

$$\chi(\theta) = C_3 + C_4\theta, \tag{1.27}$$

а при $\mu \neq \frac{1}{2}$, $\chi(\theta)$ выражается, через тригонометрические илиг иперболические функции, следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &= C_3 \cos\lambda\theta + C_4 \sin\lambda\theta \qquad \mu > \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_3 \operatorname{ch}\lambda\theta + C_4 \operatorname{sh}\lambda\theta \qquad \mu < \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где $\lambda^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}$, а C_3, C_4, C_5 и C_6 — постоянные интегрирования.

Положим, что рассматриваемая полуплоскость не смещается в горизонтальном направлении и не поворачивается, так что, при

$$\theta = 0, \quad v = 0. \tag{1.29}$$

Тогда согласно (1.11), (1.26), (1.27) и (1.28) будем иметь

$$C_3 = C_5 = 0, \tag{1.30}$$

и выражения (1.26), (1.27), (1.28) для функций $f_0(\theta)$ и $\chi(\theta)$ примут вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= C_6 \sin\theta, \\ \chi(\theta) &= C_4\theta \qquad \mu = \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_4 \sin l\theta \qquad \mu > \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_4 \operatorname{sh}\beta\theta \qquad \mu < \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

где l и β связаны с μ так:

$$l^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad \beta^2 = \frac{1 - 2\mu}{\mu^2}.$$

Теперь, пользуясь равенствами (1.22), (1.25) и (1.31), определим значения постоянной C_4. Будем иметь

$$C_4 = \frac{Pm}{K^m (m-1) J^m(\mu)}, \tag{1.32}$$

где положено

$$m = \frac{1}{\mu}, \qquad \varkappa = -1$$

$$J(\mu) = 4 \qquad\qquad \mu = \frac{1}{2},$$

$$J(\mu) = 4l^{\mu}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos l\theta)^{\mu}\cos\theta d\theta \qquad \mu > \frac{1}{2}, \tag{1.33}$$

$$J(\mu) = 4\beta^{\mu}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ch}\beta\theta)^{\mu}\cos\theta d\theta \qquad \mu < \frac{1}{2}.$$

K и μ — физические константы, которыми характеризуется, согласно (1.10), модуль пластичности материала.

Подставляя в соотношения (1.11) выражения функций $\chi(\theta)$, $f_0(\theta)$, $f_1(r)$ и $f_2(r)$ и их производных из (1.31), (1.18) и (1.13), после некоторых преобразований, получим, для определения перемещений, следующие формулы:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{P^m}{K^m(m-1)J^m(\mu)}r^{1-m}\eta'(\theta, \mu) - C_6\cos\theta, \\ v &= \frac{(2-m)P^m}{K^m(m-1)J^m(\mu)}r^{1-m}\eta(\theta, \mu) + C_6\sin\theta, \end{aligned} \tag{1.34}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\eta(\theta, \mu) = \theta && \mu = \frac{1}{2}, \\ &\eta(\theta, \mu) = \sin l\theta && \mu > \frac{1}{2}, \\ &\eta(\theta, \mu) = \operatorname{sh}\beta\theta && \mu < \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.35}$$

и использовано значение C_4 согласно формуле (1.32).

Перемещения точек границы полуплоскости, т. е. при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, будут

$$\begin{aligned} [u]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= [u]_{\theta=+\frac{\pi}{2}} = B\cdot P^m r^{1-m}, \\ [v]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= -[v]_{\theta=+\frac{\pi}{2}} = AP^m r^{1-m} + C, \end{aligned} \tag{1.36}$$

где положено

$$A = 0; \qquad B = -\frac{1}{16K^2} \qquad \mu = \frac{1}{2},$$

$$A = \frac{(m-2)\sin\frac{l\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)}; \qquad B = -\frac{l\cos\frac{l\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)} \qquad \mu > \frac{1}{2}, \tag{1.37}$$

$$A=\frac{(m-2)\operatorname{sh}\beta\frac{\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)};\qquad B=-\frac{\beta\operatorname{ch}\beta\frac{\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)}\qquad \mu<\frac{1}{2}.$$

Полученные выше формулы справедливы, когда материал находится в состоянии упрочнения, т. е. при $0<\mu<1$.

Отметим, что, как следует из формул (1.36) и (1.37), при квадратичном законе нелинейности, т. е. когда $\varepsilon_i=\left(\frac{\sigma_i}{K}\right)^2$ $\left(\mu=\frac{1}{2},\ m=2\right)$, все точки границы полуплоскости в вертикальном направлении имеют только жесткие смещения, равные $v\Big|_{\frac{\pi}{2}}=-v\Big|_{-\frac{\pi}{2}}=C$.

Пользуясь соотношениями (1.22), (1.24), (1.31) и (1.32), для напряжения σ_r получим следующую формулу

$$\sigma_r=-\frac{2P\,[\eta'(\theta,\mu)]^{\mu}}{rJ(\mu)},\tag{1.38}$$

которая совпадает с формулой, полученной В. В. Соколовским [2] другим путем.

В заключение рассмотрим случай, когда $K=\frac{2}{3}E$ (E — модуль упругости материала полуплоскости) и $\lambda^2=\mu=1$, что соответствует задаче и равновесии несжимаемой упругой полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой.

В этом случае общий интеграл уравнений (1.16) и (1.15) при выполнении условий (1.29) будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_1(r)&=C_1+C_2\ln r,\\ \chi(\theta)&=C_4\sin\theta,\\ f_0(\theta)&=C_6\sin\theta.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Подставляя эти значения $f_1(r)$, $\chi(\theta)$ и $f_0(\theta)$ в выражения (1.11) и (1.22) и пользуясь условием (1.25), получим известные [3] из теории упругости формулы для компонентов перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u&=-\frac{3P}{2\pi E}\ln r\cdot\cos\theta+C\cos\theta,\\ v&=\frac{3P}{2\pi E}\ln r\cdot\sin\theta+\frac{3P}{2\pi E}\cdot\sin\theta-C\sin\theta,\\ \sigma_r&=-\frac{2P\cos\theta}{\pi r},\end{aligned}\tag{1.40}$$

где C — некоторая новая постоянная, равная $C=-(C_1C_4+C_6)$.

§ 2. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала

1°. Постановка задачи и вывод основного уравнения. При решении задачи о пластическом равновесии полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой P, мы исходили из уравнения теории упруго-пластических деформаций, которое, как известно [4], с достатоно полнатой описывает пластические деформации при простом нагружении, что, в данном случае, имеет и место.

Термодинамический анализ показывает [5], что уравнения теории упруго-пластических деформаций с условиями текучести Мизеса, или условиями упрочнения материала, по своей структуре, являются уравнениями состояния нелинейно-упругого тела.

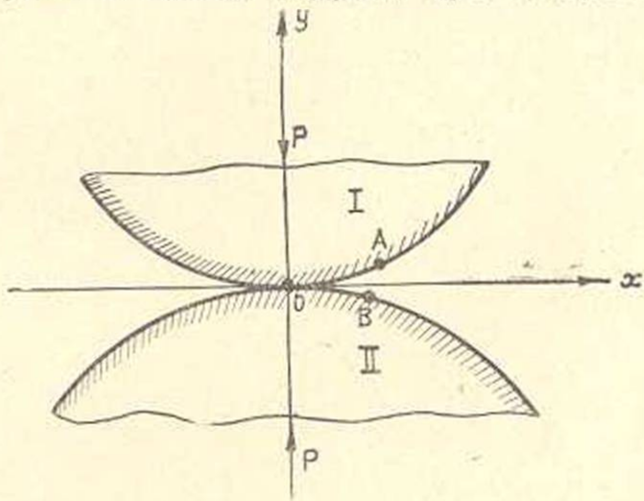
Поэтому решение нелинейно-упругой задачи для тела, подчиняющегося закону напряжений-деформаций, выраженному уравнением (1.10), тождественно решению задачи пластичности для этого же тела со степенным упрочнением материала, если деформации в нем развиваются в определенном направлении.

Принимая за основу нелинейно-упругую аналогию, ниже дается, в общем виде, решение задачи о контакте двух тел, ограниченных плавными поверхностями и подчиняющихся нелинейно упругому закону (1.10).

Пусть два соприкасающихся между собой в точке, или по линии, нелинейно-упругих тела прижимаются затем одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых P (фиг. 2) перпендикулярна к оси ox и проходит через начало координат O.

Установим соотношения, которым должны удовлетворять перемещения точек области контакта сжимаемых тел.

Положим, что уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела до деформаций, таковы



Фиг. 2.

$$y = f_1^*(x),$$
$$y = -f_2^*(x). \tag{2.1}$$

Поместим начало координат в точке первоначального касания тел, а оси ox и oy направим, как показано на фиг. 2. Под действием внешних сил первое тело получит перемещение δ_1, а второе тело—перемещение δ_2. Кроме того, точка A, расположенная на поверхности первого тела, и вступающая с ней в контакт точка B второго тела, в результате происшедшей деформации, получат, соответственно, перемещения v_1 и v_2 в направлении оси oy.

Но координаты точек A и B после вступления их в контакт становятся одинаковыми, что позволяет установить следующие соотношения, связывающие перемещения точек обоих тел

$$v_1 - \delta_1 + f_1^*(x - u_1) = -v_2 + \delta_2 - f_2^*(x + u_2). \tag{2.2}$$

Рассматривая лишь малые перемещения, можно в (2.2) положить

$$f_1^*(x - u_1) \approx f_1^*(x) \qquad \text{и} \qquad f_2^*(x + u_2) \approx f_2^*(x).$$

Тогда, для перемещений точек контакта этих тел, получим следующие условия

$$v_1 + v_2 = \delta - f_1^*(x) - f_2^*(x), \tag{2.3}$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$—сближение этих тел в направлении оси oy.

Будем полагать, далее, что трение между сжимаемыми телами отсутствует. Тогда на участке контакта каждое из этих тел будет испытывать лишь только нормальное давление, которое обозначим через $p(x)$. Но обычно область контакта бывает мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, поэтому можно считать, что перемещения на участке контакта этих тел будут такими же, как у граничных точек двух полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального давления $p(x)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела [6, 7].

Разобьем эпюру давления $p(x)$, действующего на участке контакта $S(a < x < b)$, на элементарные полоски шириной Δt_i и высотой $p(t_i)$ $(i = 1, 2, 3, \cdots n)$ и рассмотрим действие одной из этих полосок (например i-ой) на нижнюю полуплоскость.

Если в точке $x = t_i$ к границе полуплоскости приложена нормальная к ней сосредоточенная сила $P_i = p(t_i)\Delta t_i$, то граничная точка этой полуплоскости с координатой x получит перемещение в направлении оси oy v, определяемое согласно (1.36) формулой

$$v = A|t_i - x|^{1-m} P_i^m + C, \tag{2.4}$$

или, в другой форме,

$$v^* = h_i p(t_i)\Delta t_i, \tag{2.5}$$

где положено

$$\begin{gathered} h_i = A^\mu |t_i - x|^{\mu - 1}, \\ v^* = (v - C)^\mu, \\ m = \frac{1}{\mu}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

В дальнейшем $v^*(x)$ будем называть обобщенным перемещением точек границы полуплоскости.

При одновременном действии системы сил $P_i = p(t_i)\Delta t_i$ ($i = 1, 2, 3 \cdots n$) обобщенное перемещение $v^*(x)$ произвольной точки границы полуплоскости с абсциссой x ($a \leqslant x \leqslant b$) будет в общем случае некоторой функцией от этих сил $v^* = v^*(P_1, P_2, \cdots P_n)$, которую можно представить в виде ряда

$$v^* = \sum_{j=1}^{j=n} C_j p(t_j)\Delta t_j + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n} C_{jk} p(t_k) p(t_j)\Delta t_k \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n} C_{\nu kj} p(t_j) p(t_k) p(t_\nu)\Delta t_j \Delta t_k \Delta t_\nu + \cdots \tag{2.7}$$

где C_j, C_{jk} и $C_{\nu jk}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от x и t_i ($i = 1, 2, 3, \cdots$), а также физических констант K и μ.

Но с другой стороны, при действии только одной силы, т. е. когда $P_j = 0$ при $j \neq i$ и $P_j = P_i$, при $j = i$ выражения (2.7) для v^* должны тождественно совпадать с точным решением этой задачи, определяемой формулой (2.5). В силу этого будем иметь

$$C_i = h_i, \quad C_{ii} = 0, \quad C_{iii} = 0 \tag{2.8}$$

и выражение (2.7) для обобщенного перемещения v^* примет вид

$$v^* = \sum_{j=1}^{j=n} h_j p(t_j)\Delta t_j + \sum_{j \neq k}^{n} C_{jk} p(t_j) p(t_k)\Delta t_j \Delta t_k + \cdots$$

$$(j, k = 1, 2, 3, \cdots n). \tag{2.9}$$

Вследствие малости участка контакта S ($a \leqslant x \leqslant b$), с той степенью точности, которая принята здесь при решении данной задачи, можно в выражении (2.9) для обобщенного перемещения v^* ограничиться главным членом разложения. Тогда из выражения (2.9), после перехода к пределу ($\Delta t_i \to 0$), получим

$$v^* = A^\mu \int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}, \tag{2.10}$$

где интегрирование производится по всему участку контакта S.

Пользуясь соотношениями (2.6) и (2.10), для определения перемещений v точек контакта, получим следующую формулу

$$v = A\left[\int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}\right]^m + C, \tag{2.11}$$

где $m = \dfrac{1}{\mu}$, а постоянная A определяется согласно (1.37).

Если это же нормальное давление $p(x)$ будет действовать на границе верхней полуплоскости, то граничная точка с абсциссой x получит в направлении оси oy перемещение v, равное

$$v = -A\left[\int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}\right]^m + C. \tag{2.12}$$

Таким образом, выражения для перемещений v_1 и v_2 согласно (2.11) и (2.12) будут

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1\left[\int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}\right]^m + C_1, \\ -v_2 &= -A_2\left[\int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}\right]^m + C_2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{(m-2)\sin\dfrac{l\pi}{2}}{K_1^m(m-1)J^m(\mu)} \\ A_2 &= \frac{(m-2)\sin\dfrac{l\pi}{2}}{K_2^m(m-1)J^m(\mu)} \end{aligned}\right\} \quad \mu > \frac{1}{2},$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{(m-2)\,\mathrm{sh}\,\beta\dfrac{\pi}{2}}{K_1^m(m-1)J^m(\mu)} \\ A_2 &= \frac{(m-2)\,\mathrm{sh}\,\beta\dfrac{\pi}{2}}{K_2^m(m-1)J^m(\mu)} \end{aligned}\right\} \quad \mu < \frac{1}{2}, \tag{2.14}$$

$$A_1 = A_2 = 0 \qquad \mu = \frac{1}{2},$$

а K_1 и K_2 — физические постоянные, которыми определяется модуль пластичности материалов первого и второго тела при одинаковом показателе μ.

Подставляя выражения для v_1 и v_2 из (2.13) в условия (2.3), для определения давления $p(x)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_S \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}} = F(x, \gamma), \tag{2.15}$$

где

$$
\begin{aligned}
F(x, \gamma) &= [\gamma - f_0(x)]^{\mu}, \\
f_0(x) &= \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

а γ — некоторая произвольная постоянная, подлежащая определению в дальнейшем.

Таким образом, сингулярное интегральное уравнение (2.15) является основным уравнением плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала или нелинейной теории упругости при степенном законе связи между деформациями и напряжениями (1.10).

2°. *Решение основного интегрального уравнения плоской контактной задачи для пластичности со степенным упрочнением.* Пусть первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xoy происходит в одной точке, которую примем за начало координат (фиг. 2). Положим, далее, что областью контакта S между этими телами после их сжатия является отрезок оси ox, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Тогда основное интегральное уравнение (2.15) плоской контактной задачи примет вид

$$
\int_{-a}^{+a} \frac{p(t)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}} = F(x, \gamma) \qquad (0 < \mu < 1), \tag{2.17}
$$

где

$$
F(x, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^{\mu}, \qquad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}. \tag{2.18}
$$

В интегральном уравнении (2.17) $-a < x,\ t < a$ и $0 < \mu < 1$, а $F(x, \gamma)$ — непрерывная функция; ограничения, налагаемые на нее, будут уточнены в дальнейшем.

Уравнение (2.17) впервые было изучено Карлеманом [8]. В недавно опубликованной работе Н. И. Ахиезера и В. А. Щербиной [9] дан другой способ решения этого уравнения с помощью формул обращения сингулярных интегралов.

В настоящей работе, для решения сингулярного интегрального уравнения (2.17), воспользуемся методом, предложенным М. Г. Крейном [1] для решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода с ядром вида

$$
k(t, x) = H(|t - x|). \tag{2.19}
$$

Этот метод позволяет получить решение таких уравнений в замкнутой форме в целом ряде новых случаев конкретных ядер вида (2.19). Более того, для известных случаев, применение этого метода дает решения, по своей аналитической форме отличающиеся тем, что в них отсутствуют сингулярные интегралы, берущиеся в смысле Коши.

Следует указать, что свободное от сингулярных интегралов решение уравнения контактной задачи линейной теории упругости впервые было получено Н. А. Ростовцевым [10].

Обозначим через $g(t, a)$ решение уравнения (2.17) при $F(x, \gamma)=1$. Тогда общее решение уравнение (2.17) согласно [1] выразится формулой

$$p(x)=\frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{+a} g(t, a) F(t, \gamma)\, dt\right]\cdot g(x, a)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x}^{a} g(x, u)\cdot\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\cdot\frac{d}{du}\int_{-u}^{+u} g(t, u) F(t, \gamma)\, dt\right] du-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{x}^{a}\frac{g(x, u)}{M'(u)}\left[\int_{-u}^{+u} g(t, u)\cdot F(t, \gamma)\, dt\right] du. \tag{2.20}$$

Здесь

$$M(u)=\int_{0}^{u} g(t, u)\, dt \qquad (0<u<a), \tag{2.21}$$

$2a$ — ширина контакта, а γ — некоторая постоянная, которая при заданной ширине контакта $2a$ определяется из уравнения равновесия

$$P=\int_{-a}^{+a} p(x)\, dx, \tag{2.22}$$

где P — равнодействующая внешних сил, действующих на сжимаемое тело, причем при выводе уравнения (2.15) предполагалось, что направление P перпендикулярно к оси ox и проходит через начало координат 0.

Допустим теперь, что связи, препятствующие поворотам сжимаемых тел отсутствуют. Составим основное уравнение контактной задачи при этих условиях.

Соотношение (2.3), связывающее перемещения граничных точек сжимаемых тел v_1 и v_2, было нами получено в предположении, что, при сжатии, эти тела совершают лишь только поступательные перемещения δ_1 и δ_2 в направлении оси oy и что между ними происходит при этом сближение равное $\delta=\delta_1+\delta_2$.

Пусть теперь при сжатии эти тела, кроме поступательных перемещений δ_1 и δ_2 вдоль оси oy, совершат еще поворот относительно начала координат 0 соответственно на углы α_1 и α_2 (положительными направлениями будем считать повороты против часовой стрелки).

Тогда между граничными точками сжимаемых тел, имеющими абсциссу x, произойдет дополнительное сближение, равное $\alpha_0 x$, где $\alpha_0=\alpha_1+\alpha_2$. Чтобы получить для этого случая условия, которым должны удовлетворять перемещения точек контакта сжимаемых тел v_1 и v_2, надо в соотношении (2.3) постоянное сближение δ заменить переменным сближением $\delta+\alpha_0 x$. Поэтому будем иметь

$$v_1+v_2=\delta+\alpha_0 x-f_1^*(x)-f_1^*(x). \tag{2.23}$$

Подставляя в (2.23) выражения для v_1 и v_2 из (2.13), придем к такому же интегральному уравнению (2.17) лишь с той разницей, что в правой части его вместо функции $F(x,\gamma)$, определяемой соотношениями (2.18), будет

$$F(x,\gamma,\alpha)=[\gamma+\alpha x-f_0(x)]^{\mu}, \tag{2.24}$$

где

$$\alpha=\frac{\alpha_0}{A_1+A_2}, \qquad f_0(x)=\frac{f_1^*(x)+f_2^*(x)}{A_1+A_2}. \tag{2.25}$$

При этом значения постоянных γ и α определяются при заданной ширине контакта $2a$ из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} P&=\int_{-a}^{+a}p(x)\,dx,\\ M_0&=\int_{-a}^{+a}p(x)\,x\,dx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где P — сумма проекций на ось oy всех внешних сил, действующих на сжимаемое тело, а M_0 — момент этих же сил относительно начала координат 0.

Таким образом, и в этом случае общее решение уравнения (2.17) может быть получено по формуле (2.20), если только в ней $F(x,\gamma)$ заменить функцией $F(x,\gamma,\alpha)$, определяемой соотношениями (2.24).

Отметим, что, как следует из работы [1], формула (2.20) доставляет единственное интегрируемое решение уравнения (2.17), если $M'(a)\neq 0$ $(0<a<b)$, где b — некоторая конечная постоянная, а функция $F(x,\gamma,\alpha)$ дифференцируема и такая, что, после подстановки ее в формулу (2.20), интегралы, содержащие эту функцию, имели бы смысл.

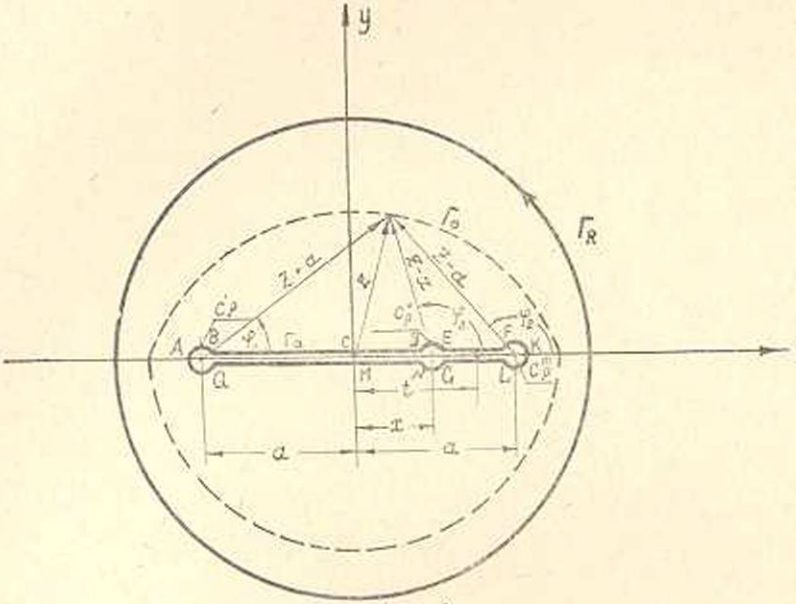
Перейдем к определению функции $g(t,a)$, т. е. к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{+a}\frac{g(t,a)\,dt}{|t-x|^{1-\mu}}=1 \qquad (0<\mu<1). \tag{2.27}$$

Для этого, следуя идее М. Г. Крейна [11], рассмотрим интеграл

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^2-a^2)^{\frac{\mu}{2}}(z-x)^{1-\mu}}, \tag{2.28}$$

взятый по контуру, составленному из наружной окружности Γ_R радиуса R и внутреннего контура $ABCDEFKLGMNQA$, который обозначим через Γ_a (фиг. 3).



Фиг. 3.

Прежде всего нетрудно убедиться, что подинтегральная функция

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{f(z)} = (z^2 - a^2)^{\frac{\mu}{2}} (z - x)^{1-\mu} \qquad (0 < \mu < 1),$$

во внешнем отрезке $(-a, a)$, распадается на три одинаковые ветви. В самом деле, положим $\varphi_1 = \arg(z + a)$, $\varphi_2 = \arg(z - a)$ и $\varphi_3 = \arg(z - x)$. При обходе против часовой стрелки произвольного замкнутого контура Γ_a, изображенного пунктиром на фиг. 3, φ_1, φ_2 и φ_3 получают приращения 2π, следовательно $\arg f(z) = \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\mu + \varphi_3(1 - \mu)$ получает приращение 2π, и $f(z)$ возвращается к исходному значению. Будем рассматривать ту ветвь функции $f(z)$, которая на верхнем берегу отрезка $(-a, a)$ принимает положительное значение, т. е. $(z - x)^{1-\mu} > 0$ $(z^2 - a^2)^{\frac{\mu}{2}} > 0$ при $z > 0$.

Тогда, согласно теореме Коши для многосвязных областей, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a} f(z)\, dz = 0, \tag{2.29}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^{\frac{\mu}{2}} (z + a)^{\frac{\mu}{2}} (z - x)^{1-\mu}}. \tag{2.30}$$

Но интегралы по малым окружностям C'_ρ, C''_ρ и C'''_ρ стремятся, очевидно, к нулю при $\rho \to 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{+a}^{-a} f(t+i0)\,dt + \int_{-a}^{+a} f(t-i0)\,dt\right]. \qquad (2.31)$$

Здесь $f(t+i0)$ и $f(t-i0)$ значения функций $f(z)$ на верхнем и нижнем берегу отрезка $(-a,\ a)$.

Но замечая, что $f(t-i0)=\overline{f(t+i0)}$ (где черточкой обозначается сопряженная функция) и меняя во втором интеграле соотношения (2.31) направление интегрирования, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(t+i0)\,dt. \qquad (2.32)$$

Вычислим контурный интеграл

$$I_1 = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz, \qquad (2.33)$$

где $f(z)$ выражается формулой (2.30). Для этого воспользуемся разложением нашей ветви $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Согласно (2.30) имеем

$$f(z) = \frac{1}{ze^{\pi i}}\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\mu-1}, \qquad (2.34)$$

где $\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}$ и $\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\mu-1}$ означают те ветви этих функций, которые положительны на отрезке $(a,\ \infty)$ оси ox. Разлагая последние по формуле бинома, найдем вычет выбранной ветви $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. Он будет равен $-e^{-\pi i}\left(\text{коэффициенту при } \frac{1}{z} \text{ с обратным знаком}\right)$. Тогда, на основании теоремы о вычетах, получим

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i e^{-i\pi} = 2\pi i. \qquad (2.35)$$

Подставляя значения этого интеграла в соотношения (2.32), находим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(t+i0)\,dt = -1. \qquad (2.36)$$

Далее, согласно (2.30) и (фиг. 3), имеем

$$f(t+i0)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{(t-x)^{1-\mu}} & \text{при}\quad x<t+i0<a,\\[2ex] \dfrac{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{e^{\pi i(1-\mu)}(x-t)^{1-\mu}} & \text{при}\quad -a<t+i0<x.\end{cases}\tag{2.37}$$

Подставляя выражения для $f(t+i0)$ из (2.37) в (2.36), после преобразований, окончательно, получим

$$\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\sin\dfrac{\pi\mu}{2}(a^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{\pi|t-x|^{1-\mu}}dt=1,\tag{2.38}$$

откуда непосредственно следует, что

$$g(t,a)=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\mu}{2}\cdot(a^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\pi\mu}{2}}{\pi\sqrt{(a^2-t^2)^{\mu}}}\tag{2.39}$$

и является решением интегрального уравнения (2.27).

Пользуясь формулами (2.39) и (2.21), для $M(t)$ получим

$$M(t)=\frac{2\sqrt{\pi}\,t^{1-\mu}}{(1-\mu)\,\Gamma\left(\dfrac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2}\right)},\tag{2.40}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Ниже, при исследовании напряженного состояния в сжимаемых нелинейно-упругих телах, будем отдельно рассматривать случаи симметричного и кососимметричного нагружения этих тел. Это, во-первых, сделает более обозримым полученные формулы и, во-вторых, каждое из этих нагружений представляет самостоятельное значение, так как соответствует определенной характерной деформации этих тел. Следует отметить, что случай произвольного нагружения сжимаемых тел не может быть получен, как это следует из (2.20) и (2.24), путем наложения вышеуказанных двух случаев, и должен быть решен отдельно как задача самостоятельная, при помощи общих формул (2.20), (2.24) и (2.26).

3°. *Симметричная задача о контакте двух нелинейно-упругих тел.*

Пусть как поверхности, ограничивающие сжимаемые тела, так и внешние силы, действующие на них, симметричны относительно оси oy. Тогда уравнения этих поверхностей $y=f_1^*(x)$ и $y=-f_2^*(x)$ будут четными функциями x, в силу чего правая часть основного интегрального уравнения (2.17) будет также четной функцией. Тогда в силу очевидной четности функции $g(t, a)$, последний член в правой части формулы (2.20) пропадает и она принимает вид

$$p(x)=\frac{1}{M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_0^a g(s, a)F(s, \gamma)\,ds\right]g(x, a)-$$

$$-\int_x^a g(x, u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\cdot\frac{d}{du}\int_0^u g(s, u)F(s, \gamma)\,ds\right]du, \tag{2.41}$$

где

$$M(a)=\int_0^a g(s, a)\,ds.$$

Заметим, что при вычислениях второй интеграл в (2.41) удобно иногда представить в преобразованном виде на основании формулы [1]

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{M'(s)}\cdot\frac{dI}{ds}\right]=\frac{1}{M(s)}\cdot\frac{d}{ds}\left[\frac{M^2(s)}{M'(s)}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{I}{M(s)}\right)\right]. \tag{2.42}$$

Подставляя выражения для $g(t, a)$ и $M(t)$ из (2.39) и (2.40) в (2.41) и, пользуясь равенством (2.42), после некоторых преобразований, получим

$$p(x)=K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}\,\frac{d}{da}\int_0^a\frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}}-\right.$$

$$\left.-\int_x^a\frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\,\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\frac{d}{du}\int_0^u\frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right]\right\} \tag{2.43}$$

$$(-a\leqslant x\leqslant a),$$

где

$$K(\mu)=\frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin^2\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\,\pi^2\sqrt{\pi}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin^2\frac{\pi\mu}{2}}{2\sqrt{\pi}\,\pi^2}. \tag{2.43'}$$

Введем обозначения

$$\Phi_1(u, \gamma)=\int_0^u\frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}},$$

$$\Phi_1'(u, \gamma)=\frac{d}{du}\int_0^u\frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{2.44}$$

Тогда формулу (2.43) можно записать в форме

$$p(x)=K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}-\int_x^a\frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\cdot\frac{d}{du}[u^{\mu}\Phi_1'(u,\gamma)]\right\} \tag{2.45}$$

$$(-a\leqslant x\leqslant a).$$

Путем замены переменной интегрирования $s=u\sin\varphi$ выражение для $\Phi_1(u,\gamma)$ из (2.44) можно представить в виде следующего интеграла с постоянными пределами:

$$\Phi_1(u,\gamma)=u^{1-\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(u\sin\varphi,\gamma)\cos^{1-\mu}\varphi d\varphi. \tag{2.46}$$

Предполагая существование непрерывной и ограниченной производной $F(s,\gamma)$ при $s>0$, после дифференцирования под знаком интеграла (2.46), получим следующее соотношение, связывающее $\Phi_1'(u,\gamma)$ с $\Phi_1(u,\gamma)$:

$$u\Phi_1'(u,\gamma)=(1-\mu)\Phi_1(u,\gamma)+\int_0^u\frac{F'(s,\gamma)\,sds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{2.47}$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и замечая, что $F'(0,\gamma)=0$, соотношение (2.47) представим в виде

$$u\Phi_1'(u,\gamma)=(1-\mu)\Phi_1(u,\gamma)+$$

$$+\frac{1}{2-\mu}\int_0^u(u^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}F''(s,\gamma)\,ds. \tag{2.48}$$

Далее, пользуясь (2.47), нетрудно непосредственным дифференцированием убедиться, что

$$\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\Phi_1'(u,\gamma)\right]=u^{\mu-1}\frac{d}{du}\int_0^u\frac{F'(s,\gamma)\,sds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{2.49}$$

Произведя интегрирование по частям в правой части равенства (2.49) и дифференцируя затем полученное выражение по u, в силу четности функции $F(x,\gamma)$, находим

$$\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\Phi_1'(u,\gamma)\right]=u^{\mu}\int_0^u\frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}. \tag{2.50}$$

Подставляя это выражение в (2.45), для $p(x)$ получим окончательно следующую формулу

$$p(x)=K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}-\int_x^a\frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u\frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\}. \tag{2.51}$$

В формуле (2.51) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a$; при этом постоянная γ определяется из уравнения равновесия

$$P = 2\int_0^a p(x)\,dx. \tag{2.52}$$

Второй же член этой формулы представляет непрерывную часть этого решения.

Подставляя выражение для $p(x)$ из (2.51) в уравнение равновесия (2.52), получим

$$P = 2K(\mu)\left\{a\Phi_1'(a, \gamma)\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} - \right.$$

$$\left. - \int_0^a dx \int_x^a \frac{u^\mu du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} \int_0^u \frac{F''(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}\right\}. \tag{2.53}$$

Здесь использовано значение интеграла:

$$I_2(u) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} =$$

$$= \frac{M(u)\pi}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}\,u^{1-\mu}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}. \tag{2.54}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом выражения (2.53) и пользуясь равенствами (2.54) и (2.43), имеем

$$P = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a, \gamma) - \int_0^a u\,du \int_0^u \frac{F''(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}\right\}, \tag{2.55}$$

или, еще раз меняя порядок интегрирования и замечая, что

$$\int_s^a \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} = \frac{(a^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{(2-\mu)}, \tag{2.56}$$

получим

$$P = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a, \gamma) - \frac{1}{2-\mu}\int_0^a (a^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}} F''(s, \gamma)\,ds\right\}. \tag{2.57}$$

Пользуясь, далее, соотношением (2.48), уравнению (2.57) можно окончательно придать следующий вид:

$$\Phi_1(a, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}, \tag{2.58}$$

где

$$\Phi_1(a, \gamma) = \int_0^a \frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}},$$

$$F(s, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^\mu, \qquad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}, \tag{2.59}$$

а A_1 и A_2 определяются по формулам (2.14).

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ задана, то постоянная γ, входящая в формулу (2.51), определяется из уравнения (2.58). Когда же ширина контакта $2a$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, тогда значение постоянной γ определяется из требования, чтобы в формуле (2.51) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_1'(a, \gamma) = \frac{d}{da}\int_0^a \frac{F(s, \gamma)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}} = 0, \tag{2.60}$$

где $F(s, \gamma)$ определяется формулой (2.59).

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ не задана, то значение постоянной γ определяется из уравнения (2.60).

После того, как из уравнения (2.60) определим значение γ, ширину контакта $2a$ находим при помощи уравнения равновесия (2.52). Подставляя выражение для $p(x)$ из (2.51) в (2.52) и учитывая равенство (2.60), после применения формулы Дирихле, получим:

$$\Phi_1(a, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}. \tag{2.61}$$

Следовательно, уравнение (2.61) для определения ширины контакта, тождественно совпадает с уравнением (2.58) для определения постоянной γ, когда ширина контакта $2a$ задана.

В качестве приложения, рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием шириной $2a$ на нелинейно-упругую полуплоскость. В этом случае имеем:

$$\begin{gathered} f_0(x) = 0, \qquad F(x, \gamma) = \gamma^\mu, \\ F'(x, \gamma) = F''(x, \gamma) = 0. \end{gathered} \tag{2.62}$$

Тогда, пользуясь уравнением (2.58) и равенством (2.54), для γ получим следующее выражение:

$$\gamma^{\mu}=\frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}. \tag{2.63}$$

Подставляя это значение γ^{μ} в формулу (2.51) и замечая, что, согласно (2.44), (2.54), (2.62) и (2.43'),

$$\Phi_1'(a,\ \gamma)=\frac{\gamma^{\mu}\sin\frac{\pi\mu}{2}a^{-\mu}}{2K(\mu)\pi}, \tag{2.64}$$

для определения давления $p(x)$ на площадку контакта под штампом получим, окончательно, следующую формулу:

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}. \tag{2.65}$$

При $\mu=1$, т. е. когда имеет место закон Гука, формула (2.65) принимает вид:

$$p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)}}, \tag{2.66}$$

что совпадает с известным решением [6] контактной задачи линейной теории упругости для плоского штампа. Этот результат можно было получить и раньше, так как при $\mu\to 1$ основное интегральное уравнение (2.17) переходит в известное интегральное уравнение контактной задачи линейной теории упругости, решением которой и является (2.66). Заметим, что при $\mu\to 0$ уравнение (2.17) теряет смысл.

4°. *Кососимметричная задача о сжатии двух нелинейно-упругих тел.* При кососимметричной нагрузке функция $F(x,\ \alpha)$ будет нечетной в области контакта сжимаемых тел $-a\leqslant x\leqslant a$ (в этом случае постоянная γ равна нулю) и тогда в правой части формулы (2.20) первые два члена пропадут и она примет вид:

$$p(x)=-\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{g(x,\ u)\,du}{M'(u)}\int_0^u g(s,\ u)\,F'(s,\ \alpha)\,ds. \tag{2.67}$$

Подставляя выражение для $g(t,\ a)$ и $M(t)$ из (2.39) и (2.40) в (2.67), получим:

$$p(x)=-K(\mu)\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u\frac{F'(s,\ \gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}, \tag{2.68}$$

где $K(\mu)$ определяется равенством (2.43'), а

$$F(x,\ \alpha)=[\alpha x-f_0(x)]^{\mu}. \tag{2.69}$$

При этом полагаем, что $\mu = \frac{1}{2k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots n)$ и $f_0(x) = = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}$ есть нечетная функция.

Из соотношений (2.68) и (2.69) следует, что $p(x)$ является нечетной функцией, поэтому достаточно ее определить в интервале $0 < x < a$, так как $p(-x) = -p(x)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_2(u, \alpha) &= \int_0^u \frac{F'(s, \alpha)\, ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}, \\ \Phi_2'(u, \alpha) &= \frac{d}{du} \int_0^u \frac{F'(s, \alpha)\, ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Тогда соотношение (2.68) можно представить в форме

$$p(x) = -\frac{K(\mu)}{2-\mu} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{d}{du} \left[(u^2 - x^2)^{1 - \frac{\mu}{2}} \right] u^{\mu - 1} \Phi_2(u, \alpha)\, du. \tag{2.71}$$

Интегрируя правую часть равенства (2.71) по частям и дифференцируя полученное выражение по x, получим

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^{\mu-1} x \Phi_2(a, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} + x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} [(1-\mu)\Phi_2(u, \alpha) - u\Phi_2'(u, \alpha)]}{\sqrt{(u^2 - x^2)^{\mu}}} \right\}. \tag{2.72}$$

Но, аналогично (2.47), в этом случае имеем:

$$u\Phi_2'(u, \alpha) = (1-\mu)\Phi_2(u, \alpha) + \int_0^u \frac{F''(s, \alpha)\, s ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}. \tag{2.73}$$

Подставив это выражение в (2.72), для $p(x)$ окончательно получим следующую формулу:

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^{\mu-1} x \Phi_2(a, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} - x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^{\mu}}} \int_0^u \frac{F''(s, \alpha)\, s ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}} \right\}. \tag{2.74}$$

В формуле (2.74) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта, при этом значение постоянной α определяется из уравнения равновесия:

$$M_0 = 2 \int_0^a p(x)\, x dx. \tag{2.75}$$

Второй же член этой формулы является непрерывной частью этого решения.

Подставляя выражение (2.72) для $p(x)$ в уравнение равновесия (2.75), получим:

$$M_0 = 2K(\mu)\left\{\frac{a^2\Phi_2(a,\alpha)\,B\left(1-\frac{\mu}{2},\ \frac{3}{2}\right)}{2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^a x^2dx\int\limits_x^a\frac{u^{\mu-2}\left[(1-\mu)\,\Phi_2(u,\alpha)-u\Phi_2'(u,\alpha)\right]du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\}. \qquad (2.76)$$

Здесь использовано значение интеграла

$$I_3(u)=\int\limits_0^u\frac{s^2ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}=\frac{1}{2}B\left(1-\frac{\mu}{2},\ \frac{3}{2}\right)u^{3-\mu}, \qquad (2.77)$$

где $B(p,\ q)$ — бетта-функция, равная $\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом соотношения (2.76) и пользуясь равенством (2.77), находим:

$$M_0=K(\mu)\,B\left(1-\frac{\mu}{2},\ \frac{3}{2}\right)\left\{a^2\Phi_2(a,\ \alpha)+\right.$$

$$\left.+(1-\mu)\int\limits_0^a u\Phi_2(u,\ \alpha)\,du-\int\limits_0^a u^2\Phi_2'(u,\ \alpha)\,du\right\}. \qquad (2.78)$$

Интегрируя последнее слагаемое в правой части (2.78) по частям, затем меняя порядок интегрирования и пользуясь равенствами (2.56) и (2.43'), окончательно получим следующее уравнение, связывающее величину постоянной α с моментом внешних сил M_0

$$M_0=\frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{\pi(1-\mu)(2-\mu)}\int\limits_0^a(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}F'(s,\ \alpha)\,ds. \qquad (2.79)$$

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ задана, то значение постоянной α, входящей в формулу (2.74), определяется из уравнения (2.79).

Если ширина контакта $2a$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, то значение постоянной α определяется из требования, чтобы в формуле (2.74) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_2(a, \alpha) = \int_0^a \frac{F'(s, \alpha)\, ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} = 0, \tag{2.80}$$

где $F(s, \alpha)$ определяется формулой (2.69).

Следовательно, когда ширина контакта $2a$ не задана, то значение постоянной α определяется из уравнения (2.80), а ширина контакта $2a$ при помощи уравнения (2.79).

В качестве приложения рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с плоским основанием шириной $2a$ на нелинейно-упругую полуплоскость, когда к середине штампа приложен момент, равный M_0.

В этом случае, согласно (2.69), будем иметь:

$$\begin{aligned} &f_0(x) = 0, && F(x, \alpha) = \alpha^\mu x^\mu, \\ &F'(x, \alpha) = \mu \alpha^\mu x^{\mu-1}, && F''(x, \alpha) = \mu(\mu-1)\alpha^\mu x^{\mu-2}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Подставляя значения $F'(s, \alpha)$ и $F''(s, \alpha)$ из (2.81) в (2.74) и замечая, что

$$\int_0^u \frac{s^{\mu-1}\, ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}}, \tag{2.82}$$

приведем формулу (2.74) для $p(x)$ к виду

$$p(x) = \frac{\mu\alpha^\mu \pi K(\mu)}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}} \left\{ \frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} + \right.$$

$$\left. + (1-\mu)\, x \int_x^a \frac{u^{\mu-2}\, du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} \right\}, \tag{2.83}$$

где $K(\mu)$ определяется соотношением (2.43′), а α^μ — из уравнения (2.79).

Обозначим второй член в формуле (2.83) через $(1-\mu) I_4(x)$. Заметим, что $I_4(x)$, будучи нечетной функцией, непрерывна во всем интервале $-a \leqslant x \leqslant a$, за исключением $x = 0$, где $I_4(x)$ терпит разрыв, при этом имеем:

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \lim_{x \to 0} x \int_x^a \frac{u^{\mu-2}\, du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}}, \tag{2.84}$$

и

$$I_4(\pm a) = 0.$$

Интеграл $I_4(x)$ равномерно сходится относительно x в промежутке $0 < x \leqslant a$. В самом деле, интегрируя $I_4(x)$ по частям, получим

$$I_4(x) = \frac{a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} + \frac{3-\mu}{2-\mu}x\int_0^a \frac{(u^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{u^{4-\mu}}\,du, \qquad (2.85)$$

откуда сходимость интеграла $I_4(x)$ очевидна для всех значений $0 < x \leqslant a$. При $x \to +0$ из соотношения (2.85), после замены переменной интегрирования $u = \frac{x}{t}$, и условия что $\mu \leqslant 1$ непосредственно следует

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \int_0^1 (1-t^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{(1-\mu)\sin\frac{\pi\mu}{2}\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}. \qquad (2.86)$$

В дальнейшем условимся считать в точке $x=0$

$$I_4(0) = \frac{I_4(+0)+I_4(-0)}{2} = 0. \qquad (2.87)$$

Тогда формула (2.83) для $p(x)$ примет вид

$$p(x) = \frac{\mu\cdot a^{\mu}\pi K(\mu)}{2\cdot\sin\frac{\pi\mu}{2}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + (1-\mu)\,I_4(x)\right\} \qquad (2.88)$$

$$(0 < |x| \leqslant a)$$

при этом $p(0)=0$.

Подставляя выражение для $I_4(x)$ из (2.85) в (2.88) и разлагая числитель подинтегральной функции $(u^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}$ по формуле бинома, после интегрирования получим

$$p(x) = \frac{\mu a^{\mu}\pi K(\mu)}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + \right.$$

$$+ \frac{(1-\mu)\,a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} +$$

$$\left. + \frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\,\Gamma(k)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\}, \qquad (2.89)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Пользуясь уравнениями (2.79) и (2.81), для α^{μ} получим следующее выражение

$$\alpha^{\mu} = \frac{4M_0(1-\mu)}{\mu a^2}. \tag{2.90}$$

Подставляя это значение α^{μ} в (2.89) и учитывая (2.43′), для определения давления $p(x)$ на площадку контакта под штампом, получим окончательно следующую формулу

$$p(x) = \frac{2M_0\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^2\pi\sqrt{\pi}}\cdot\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}+\right.$$

$$+\frac{(1-\mu)a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu}+\frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu}\times$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\} \tag{2.91}$$

$$(0 < x < a).$$

При этом $p(0) = 0$ и $p(-x) = -p(x)$.

При $\mu = 1$, т. е. когда имеет место закон Гука, формула (2.91) переходит в

$$p(x) = \frac{2M_0}{\pi a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

что совпадает с известным решением [7] контактной задачи линейной теории упругости для плоского штампа шириной $2a$, когда к середине его приложен момент M_0.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3 IV 1959

Ն. Խ. Հարությունյան

ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՆՅՈՒԹԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՄԲ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ բերվում է պլաստիկության տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ։

Առաձգական անալոգիայի համաձայն այս խնդրի լուծումը համընկնում է առաձգականության ոչ-գծային տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծման հետ, երբ դեֆորմացիայի և լարվածության միջև գոյություն ունեցող կապն արտահայտվում է աստիճանային օրենքով։

Նախապես, առաջին պարագրաֆում, տեղափոխումներով լուծվում է կիսահարթության պլաստիկության խնդիրը նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ, ընդունելով, որ կիսահարթության վրա ազդում է կենտրոնացված ուժ, ուղղված նրա ազատ մակերևույթի նորմալով:

Ապա, երկրորդ պարագրաֆում, օգտվելով այս խնդրի լուծումից, ապացուցվում է որ, եթե ընդհանրացված տեղափոխման վեկտորի վերլուծության արտահայտության մեջ բավարարվել միայն գլխավոր անդամով, երբ կիսահարթության մակերևույթին կիրառված է բաշխված բեռ, ապա պլաստիկության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ, բերվում է $K(t, x)=|t-x|^{\mu-1}$ $(0<\mu<1)$, *կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման (2. 17) լուծմանը:*

Օգտվելով $K(t, x)=H(|t-x|)$ *տեսքի կորիզ ունեցող առաջին և երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծման Մ. Գ. Կրեյնի [1] առաջարկած մեթոդից, աստիճանային ամրապնդմամբ պլաստիկության կոնտակտային խնդրի հիմնական ինտեգրալ հավասարման (2. 17) լուծումը կարելի է ներկայացնել փակ ձևով, սեղմվող մարմինների ինչպես սիմետրիկ, նույնպես և ոչ սիմետրիկ բեռնավորման դեպքում:*

Որպես կիրառություն քննարկված է հարթ հիմք ունեցող կարծր շտամպի ճնշումը ոչ-գծային առաձգական կիսահարթության վրա, կենտրոնացված P *ուժի կամ* M_0 *մոմենտի ազդեցության տակ, երբ կիրառված է շտամպի մեջտեղում:*

Նշենք, որ այստեղ առաջարկվող աստիճանային ամրապնդումով պլաստիկության տեսության կոնտակտային խնդրի լուծման մեթոդը դժվար չէ տարածել պրակտիկայի համար շատ կարևոր երկու սեղմվող մարմինների կոնտակտի խնդրի վրա հաստատված սողքի պայմաններում, երբ սողքի դեֆորմացիայի արագությունների և լարվածությունների միջև կապն արտահայտվում է աստիճանային օրենքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, т. 100, № 3, 1955.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
3. *Кац А. М.* Теория упругости. Гостехиздат, 1956.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
6. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
8. *Carleman T.* Über die Abelche Intergralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeitschrift, 15 (1922).
9. *Ахиезер Н. И.* и *Щербина В. А.* Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки математического отделения физико-математического факультета и Харьковского математического общества, том XXV, серия 4.
10. *Ростовцев Н. А.* К решению плоской контактной задачи. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
11. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. ДАН СССР, т. 94, № 6, 1954.