ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 2, 1959 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. П. Мелконян

Об изгибе двухслойной толстой плиты

Рассматривается задача об изгибе толстой свободно опертой двухслойной плиты прямоугольного очертания. Материалы слоев обладают различными модулями упругости. В пределах каждого слоя модуль упругости считается постоянным. Предполагается, что различные материалы, составляющие слои, имеют один и тот же коэффициент Пуассона. В частности решена задача изгиба квадратной плиты для различных относительных размеров и отношений модулей упругости слоев. Результаты точного решения сопоставляются с результатами, получаемыми в теории изгиба тонких плит.

1. *Общее решение толстой двухслойной свободно опертой плиты прямоугольного очертания под нормальной нагрузкой.* Пусть толстая прямоугольная плита, со сторонами a и b, и с толщинами слоев δ_1 и δ_2, нагружена поперечной нагрузкой интенсивности $p(x, y)$, приложенной к верхней плоскости плиты. Каждый слой в отдельности также является толстым. Пусть верхний слой имеет модуль упругости E_1, нижний слой—E_2. Коэффициенты Пуассона для обоих слоев примем равными σ. Все величины, относящиеся к верхнему слою будем обозначать индексом 1, к нижнему слою—индексом 2. Координатную плоскость xoy расположим на границе контакта слоев с началом в одной из вершин плиты. Ось oz направим вертикально вниз. Обозначим через u, v, w перемещения частицы упругого тела, а через X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, X_z компоненты тензора напряжений.

Под свободным опиранием подразумеваем следующие условия в любой точке боковой поверхности плиты [1]:

1. Нормальная компонента напряжений равна нулю.
2. Касательные компоненты смещения равны нулю.

Предоложим, что на верхней и нижней граничных плоскостях плиты отсутствуют касательные напряжения. Граничные условия на этих плоскостях будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad z = -\delta_1 \quad Z_z^{(1)} = -p(x, y), \quad X_z^{(1)} = 0, \quad Y_z^{(1)} = 0, \\ &\text{при} \quad z = \delta_2 \quad Z_z^{(2)} = 0, \quad X_z^{(2)} = 0, \quad Y_z^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Необходимо также выполнение следующих условий на контакте:

при $$z=0 \quad Z_z^{(1)} = Z_z^{(2)}, \quad X_z^{(1)} = X_z^{(2)}, \quad Y_z^{(1)} = Y_z^{(2)},$$
$$v^{(1)} = v^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}. \tag{1.2}$$

На внешнюю поперечную нагрузку $p(x, y)$ накладываем ограничения, позволяющие представить ее в виде двойного ряда Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{1.3}$$

где $$\beta_{kn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dxdy. \tag{1.4}$$

Используем для каждого слоя решение Б. Г. Галеркина [1], где все компоненты напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию:

$$\varphi_j(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{kn}^{(j)} \operatorname{sh}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \operatorname{ch}\alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} z \operatorname{ch}\alpha_{kn} + D_{kn}^{(j)} z \operatorname{sh}\alpha_{kn} \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} \tag{1.5}$$

и имеют следующие выражения:

$$X_x^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{kn}^{(j)} \frac{k^2\pi^3}{a^2} \lambda_{kn} \operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \frac{k^2\pi^3}{a^2} \lambda_{kn} \operatorname{sh}\alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} \left[\frac{k^2\pi^2}{a^2} (\alpha_{kn} \operatorname{sh}\alpha_{kn} + \operatorname{ch}\alpha_{kn}) + 2\sigma\pi^2\lambda_{kn}^2 \operatorname{ch}\alpha_{kn} \right] + D_{kn}^{(j)} \left[\frac{k^2\pi^2}{a^2} (\alpha_{kn} \operatorname{ch}\alpha_{kn} + \operatorname{sh}\alpha_{kn}) + 2\sigma\pi^2\lambda_{kn}^2 \operatorname{sh}\alpha_{kn} \right] \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \tag{1.6}$$

$$Y_y^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{kn}^{(j)} \frac{n^2\pi^3}{b^2} \lambda_{kn} \operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \frac{n^2\pi^3}{b^2} \lambda_{kn} \operatorname{sh}\alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} \left[\frac{n^2\pi^2}{b^2} (\alpha_{kn} \operatorname{sh}\alpha_{kn} + \operatorname{ch}\alpha_{kn}) + 2\sigma\pi^2\lambda_{kn}^2 \operatorname{ch}\alpha_{kn} \right] + D_{kn}^{(j)} \left[\frac{n^2\pi^2}{b^2} (\alpha_{kn} \operatorname{ch}\alpha_{kn} + \operatorname{sh}\alpha_{kn}) + 2\sigma\pi^2\lambda_{kn}^2 \operatorname{sh}\alpha_{kn} \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \tag{1.7}$$

$$Z_z^{(j)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{A_{kn}^{(j)}\pi^3\lambda_{kn}^3 \operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi^3\lambda^3 \operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}\pi^2\lambda_{kn}^2 [\alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} - (1-2\sigma)\operatorname{ch}\alpha_{kn}] + D_{kn}^{(j)}\pi^2\lambda_{kn}^2[\alpha_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} -$$

$$-(1-2\sigma)\operatorname{sh}\alpha_{kn}]\Big\}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{1.8}$$

$$Z_y^{(j)} = -\frac{\pi^2}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} n\,\{A_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}^2 \operatorname{sh}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}^2 \operatorname{ch}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}\lambda_{kn}(\alpha_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} + 2\sigma\operatorname{sh}\alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)}\lambda_{kn}(\alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$2\sigma\operatorname{ch}\alpha_{kn})\}\sin\frac{knx}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{1.9}$$

$$X_z^{(j)} = -\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} k\,\{A_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}^2 \operatorname{sh}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}^2\operatorname{ch}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}\lambda_{kn}(\alpha_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} + 2\sigma\operatorname{sh}\alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)}\lambda_{kn}(\alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ 2\sigma\operatorname{ch}\alpha_{kn})\}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{1.10}$$

$$Y_x^{(j)} = -\frac{\pi^2}{ab}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} kn\,\{A_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}(\operatorname{ch}\alpha_{kn} + \alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)}(\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ \alpha_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn})\}\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; \tag{1.11}$$

$$u^{(j)} = -\frac{1+\sigma}{E_j}\frac{\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} k\,[A_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}(\operatorname{ch}\alpha_{kn} + \alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)}(\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ \alpha_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn})]\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{1.12}$$

$$v^{(j)} = -\frac{1+\sigma}{E_j}\frac{\pi}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\,[A_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{ch}\alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+ C_{kn}^{(j)}(\operatorname{ch}\alpha_{kn} + \alpha_{kn}\operatorname{sh}\alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)}(\operatorname{sh}\alpha_{kn} +$$

$$+\alpha_{kn}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{kn})]\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; \tag{1.13}$$

$$w^{(j)}=-\frac{1+\sigma}{E_j}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^{(j)}\pi^2\lambda_{kn}^2\,\mathrm{sh}\,\alpha_{kn}+B_{kn}^{(j)}\pi^2\lambda_{kn}^2\,\mathrm{ch}\,\alpha_{kn}+$$

$$+C_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}[\alpha_{kn}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{kn}-2(1-2\sigma)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{kn}]+D_{kn}^{(j)}\pi\lambda_{kn}[\alpha_{kn}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{kn}-$$

$$-2(1-2\sigma)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{kn}]]\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{1.14}$$

где
$$\lambda_{kn}=\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}};\quad \alpha_{kn}=\pi\lambda_{kn}z.$$

($j=1,2$ — соответственно для верхнего и нижнего слоев).

Входящие в эти уравнения восемь коэффициентов $A_{kn}^{(j)}$, $B_{kn}^{(j)}$, $C_{kn}^{(j)}$ $D_{kn}^{(j)}$ определяются из условий на поверхности (1.1) и условий сопряжения на контактной плоскости (1.2).

Из условий сопряжения (1.2) получаем следующую систему алгебраических уравнений:*

$$\begin{gathered}\pi\lambda A^{(1)}+(2\sigma-1)C^{(1)}=\pi\lambda_{kn}A^{(2)}+(2\sigma-1)C^{(2)};\\ E_2\pi\lambda A^{(1)}+E_2C^{(1)}=E_1\pi\lambda A^{(2)}+E_1C^{(2)};\\ \pi\lambda B^{(1)}+2\sigma D^{(1)}=\pi\lambda B^{(2)}+2\sigma D^{(2)};\\ E_2\pi\lambda B^{(1)}+2E_2(2\sigma-1)D^{(1)}=E_1\pi\lambda B^{(2)}+2E_1(2\sigma-1)D^{(2)}.\end{gathered} \tag{1.15}$$

Шесть условий (1.2) привелись к четырем уравнениям (1.15) в силу того, что условия $v^{(1)}=v^{(2)}$ и $u^{(1)}=u^{(2)}$ приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для условий $X_z^{(1)}=X_z^{(2)}$, $Y_z^{(1)}=Y_z^{(2)}$.

Решая эту систему относительно коэффициентов с индексом 1 получим:

$$A^{(1)}=A^{(2)}+\frac{1-2\sigma}{\pi\lambda}R(\pi\lambda A^{(2)}+C^{(2)}); \tag{1.16}$$

$$B^{(1)}=B^{(2)}+\frac{2\sigma}{\pi\lambda}R[\pi\lambda B^{(2)}-(2-4\sigma)D^{(2)}]; \tag{1.17}$$

$$C^{(1)}=C^{(2)}+R(\pi\lambda A^{(2)}+C^{(2)}); \tag{1.18}$$

$$D^{(1)}=D^{(2)}-R[\pi\lambda B^{(2)}-(2-4\sigma)D^{(2)}], \tag{1.19}$$

где
$$R=\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right).$$

Таким образом, на основе использования условия на контакте, первоначальные восемь неизвестных постоянных привелись к четырем $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$. Последние определяются из условий на поверхности (1.1).

---

* Для простоты записи индекс kn в дальнейшем изложении опускаем.

Подставляя значения напряжений в (1.1) и используя (1.16)—(1,19), для определения $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\pi^3\lambda^3\{\operatorname{ch}\psi + R\psi\operatorname{sh}\psi\}A^{(2)} - \pi^3\lambda^3\{\operatorname{sh}\psi - R(\psi\operatorname{ch}\psi - \\
- \operatorname{sh}\psi)\}B^{(2)} + \pi^2\lambda^2\{[\psi\operatorname{sh}\psi - (1-2\sigma)\operatorname{ch}\psi] + \\
+ R\psi\operatorname{sh}\psi\}C^{(2)} - \pi^2\lambda^2\{[\psi\operatorname{ch}\psi - (1-2\sigma)\operatorname{sh}\psi] - \\
- 2(2\sigma-1)R(\psi\operatorname{ch}\psi - \operatorname{sh}\psi)\}D^{(2)} = \beta; \\
-\pi\lambda^2\{\operatorname{sh}\psi + R(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi)\}A^{(2)} + \pi\lambda^2\{\operatorname{ch}\psi + \\
+ R\psi\operatorname{sh}\psi\}B^{(2)} - \lambda\{(\psi\operatorname{ch}\psi + 2\sigma\operatorname{sh}\psi) + \\
+ R(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi)\}C^{(2)} + \lambda\{(\psi\operatorname{sh}\psi + \\
+ 2\sigma\operatorname{ch}\psi - 2(2\sigma-1)R\psi\operatorname{sh}\psi\}D^{(2)} = 0; \\
\pi^3\lambda^3\operatorname{ch}\xi A^{(2)} + \pi^3\lambda^3\operatorname{sh}\xi B^{(2)} + \pi^2\lambda^2[\xi\operatorname{sh}\xi - \\
-(1-2\sigma)\operatorname{ch}\xi]C^{(2)} + \pi^2\lambda^2[\xi\operatorname{ch}\xi - (1-2\sigma)\operatorname{sh}\xi]D^{(2)} = 0, \\
\pi\lambda^2\operatorname{sh}\xi A^{(2)} + \pi\lambda^2\operatorname{ch}\xi B^{(2)} + \lambda(\xi\operatorname{ch}\xi + \\
+ 2\sigma\operatorname{sh}\xi)C^{(2)} + \lambda(\xi\operatorname{sh}\xi + 2\sigma\operatorname{ch}\xi)D^{(2)} = 0,
\end{gathered} \tag{1.20}$$

где
$$\psi = \pi\lambda\delta_1; \quad \xi = \pi\lambda\delta_2.$$

Шесть условий (1.1) привелись к четырем уравнениям (1.20) т. к. $X_z^{(1)} = Y_z^{(1)} = 0$ при $z = -\delta_1$, приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для $X_z^{(2)} = Y_z^{(2)} = 0$ при $z = \delta_2$.

Решая систему (1,20) находим:

$$A^{(2)} = \frac{\Delta_{A^{(2)}}}{\Delta}; \quad B^{(2)} = \frac{\Delta_{B^{(2)}}}{\Delta}; \quad C^{(2)} = \frac{\Delta_{C^{(2)}}}{\Delta}; \quad D^{(2)} = \frac{\Delta_{D^{(2)}}}{\Delta} \tag{1.21}$$

где:

$$\begin{gathered}
\Delta = \pi^6\lambda^8\{[\operatorname{sh}^2(\psi+\xi) - (\psi+\xi)^2] + \\
+ 4(1-\sigma)R[\operatorname{sh}\psi\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}(\psi+\xi) - (\psi+\xi)\psi + \\
+ \frac{1}{2(1-\sigma)}(\xi^2\operatorname{sh}^2\psi - \psi^2\operatorname{sh}^2\xi)] + R^2[(1-2\sigma)^2 + \xi^2 + \\
+ (3-4\sigma)\operatorname{ch}^2\xi](\operatorname{sh}^2\psi - \psi^2)\};
\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}
\Delta_{A^{(2)}} = \pi^3\lambda^5\beta\{[(\psi\operatorname{ch}\xi + 2\sigma\operatorname{sh}\xi)\operatorname{sh}(\psi+\xi) - \\
-(\xi\operatorname{ch}\psi + 2\sigma\operatorname{sh}\psi)(\psi+\xi)] + \\
+ R\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2\xi - 2\xi)(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi) + \right.
\end{gathered}$$

$$+\left[(4\sigma^2-2\sigma)+\xi^2+(2-4\sigma)\operatorname{ch}^2\xi\right]\psi\operatorname{sh}\psi\Big]\Big\}; \tag{1.23}$$

$$\Delta_{B^{(2)}}=-\pi^3\lambda^5\beta\{[(2\sigma\operatorname{ch}\xi+\psi\operatorname{sh}\xi)\operatorname{sh}(\psi+\xi)+$$
$$+(2\sigma\operatorname{ch}\psi+\xi\operatorname{sh}\psi)(\psi+\xi)]+$$
$$+R[[-(1-2\sigma)^2+\xi^2+\operatorname{ch}^2\xi](\operatorname{sh}\psi+\psi\operatorname{ch}\psi)+$$
$$+(1-2\sigma)(\operatorname{sh}2\xi+2\xi)\psi\operatorname{sh}\psi]]; \tag{1.24}$$

$$\Delta_{C^{(2)}}=-\pi^4\lambda^6\beta\{[\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}(\psi+\xi)-(\psi+\xi)\operatorname{sh}\psi]+$$
$$+R\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2\xi-2\xi)(\operatorname{sh}\psi+\psi\operatorname{ch}\psi)-\right.$$
$$\left.-(1-2\sigma+\operatorname{ch}^2\xi)\psi\operatorname{sh}\psi\right]\Big\}; \tag{1.25}$$

$$\Delta_{D^{(2)}}=\pi^4\lambda^6\beta\Big\{\Big[\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}(\psi+\xi)+(\psi+\xi)\operatorname{ch}\psi\Big]+$$
$$+R[(1-2\sigma+\operatorname{ch}^2\xi)(\operatorname{sh}\psi+\psi\operatorname{ch}\psi)-$$
$$-\frac{1}{2}\psi\operatorname{sh}\psi(2\xi+\operatorname{sh}2\xi)]\Big]\Big\}. \tag{1.26}$$

Определив таким образом, коэффициенты $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ из (1.16)—(1.19) находим $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, $D^{(1)}$. Далее могут быть найдены компоненты тензора напряжений и перемещения в любой точке плиты. В частном случае при $E_1=E_2$, $\delta_1=\delta_2$ получается решение Б. Г. Галеркина для изотропной толстой плиты.

2. *Свободно опертая двухслойная квадратная плита под нагрузкой, распределенной по закону синуса.* Рассмотрим квадратную двухслойную плиту с равными толщинами слоев. Положим, что нагрузка распределена по поверхности плиты согласно закону: $P(x, y)=$ $=P_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$, где P_0 — интенсивность нагрузки в центре плиты.

Для данной задачи в полученных выше результатах надо положить:

$$n=k=1,\quad a=b,\quad \delta_1=\delta_2=\frac{h}{2},\quad \sigma=0{,}25.$$

Выражения напряжений X_x, Z_z, X_z и перемещений u, w примут вид:

$$X_x^{(j)}=\Big\{A^{(j)}\frac{\pi^3}{a^2}\lambda\operatorname{ch}\alpha+B^{(j)}\frac{\pi^3}{a^2}\lambda\operatorname{sh}\alpha+C^{(j)}\Big[\frac{\pi^2}{a^2}(\alpha\operatorname{sh}\alpha+$$
$$+\operatorname{ch}\alpha)+2\sigma\pi^2\lambda^2\operatorname{ch}\alpha\Big]+D^{(j)}\Big[\frac{\pi^2}{a^2}(\alpha\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha)+$$

$$+ 2\sigma\pi^2\lambda^2 \operatorname{sh}\alpha \Big]\Big\} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{2.1}$$

$$Z_z^{(j)} = -\{A^{(j)}\pi^3\lambda^3 \operatorname{ch}\alpha + B^{(j)}\pi^3\lambda^3 \operatorname{sh}\alpha + C^{(j)}\pi^2\lambda^2[\alpha \operatorname{sh}\alpha -$$

$$-(1-2\sigma)\operatorname{ch}\alpha] + D^{(j)}\pi^2\lambda^2[\alpha\operatorname{ch}\alpha -$$

$$-(1-2\sigma)\operatorname{sh}\alpha]\}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{2.2}$$

$$X_z^{(j)} = -\frac{\pi^2}{a^2}\{A^{(j)}\pi\lambda^2\operatorname{sh}\alpha + B^{(j)}\pi\lambda^2\operatorname{ch}\alpha + C^{(j)}\lambda(\alpha\operatorname{ch}\alpha + 2\sigma\operatorname{sh}\alpha) +$$

$$+ D^{(j)}\lambda(\alpha\operatorname{sh}\alpha + 2\sigma\operatorname{ch}\alpha)\}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{2.3}$$

$$u^{(j)} = -\frac{1+\sigma}{E_j}\cdot\frac{\pi}{a}\{A^{(j)}\pi\lambda\operatorname{ch}\alpha + B^{(j)}\pi\lambda\operatorname{sh}\alpha + C^{(j)}(\operatorname{ch}\alpha +$$

$$+\alpha\operatorname{sh}\alpha) + D^{(j)}(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha)\}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{2.4}$$

$$w^{(j)} = -\frac{1+\sigma}{E_j}\{A^{(j)}\pi^2\lambda^2\operatorname{ch}\alpha + B^{(j)}\pi^2\lambda^2\operatorname{ch}\alpha + C^{(j)}\pi\lambda[\alpha\operatorname{ch}\alpha -$$

$$-2(1-2\sigma)\operatorname{sh}\alpha] + D^{(j)}\pi\lambda[\alpha\operatorname{sh}\alpha -$$

$$-2(1-2\sigma)\operatorname{ch}\alpha]\}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}. \tag{2.5}$$

Коэффициенты определяем из (1.21) где:

$$\Delta = \pi^6\lambda^8\{[\operatorname{sh}^2 2\psi - (2\psi)^2] + 2(1-\sigma)R[\operatorname{sh}^2 2\psi - (2\psi)^2] +$$

$$+ R^2[(1-2\sigma)^2 + \psi^2 + (3-4\sigma)\operatorname{ch}^2\psi](\operatorname{sh}^2\psi - \psi^2)\}, \tag{2.6}$$

$$\Delta_{A^{(2)}} = P_0\pi^3\lambda^5\Big\{(\psi\operatorname{ch}\psi + 2\sigma\operatorname{sh}\psi)(\operatorname{sh}2\psi - 2\psi) +$$

$$+ R\Big[\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2\psi - 2\psi)(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi) + ((4\sigma^2 - 2\sigma) +$$

$$+ \psi^2 + (2-4\sigma)\operatorname{ch}^2\psi)\,\psi\operatorname{sh}\psi\Big]\Big\}, \tag{2.7}$$

$$\Delta_{B^{(2)}} = -P_0\pi^3\lambda^5\{(\psi\operatorname{sh}\psi + 2\sigma\operatorname{ch}\psi)(\operatorname{sh}2\psi + 2\psi) +$$

$$+ R[(-(1-2\sigma)^2 + \psi^2 + \operatorname{ch}^2\psi)(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi) +$$

$$+ (1-2\sigma)(\operatorname{sh}2\psi + 2\psi)\psi\operatorname{sh}\psi]\}, \tag{2.8}$$

$$\Delta_{C^{(2)}} = -P_0\pi^4\lambda^6\Big\{(\operatorname{sh}2\psi - 2\psi)\operatorname{sh}\psi + R\Big[(\operatorname{sh}\psi + \psi\operatorname{ch}\psi)(\operatorname{sh}2\psi -$$

$$-2\psi)\frac{1}{2} - (1-2\sigma+\operatorname{ch}^2\psi)\,\psi\operatorname{sh}\psi\Big]\Big\}, \tag{2.9}$$

$$\Delta_{D^{(2)}} = P_0\pi^4\lambda^6 \Big\{ (\mathrm{sh}2\psi + 2\psi)\mathrm{ch}\psi + R\Big[(1-2\sigma+\mathrm{ch}^2\psi)(\mathrm{sh}\psi +$$

$$+\psi\mathrm{ch}\psi) - \frac{1}{2}(\mathrm{sh}2\psi+2\psi)\psi\mathrm{sh}\psi\Big]\Big\}. \tag{2.10}$$

Результаты произведенных расчетов приведены в таблицах. В таблицах помещены значения величин $\dfrac{X_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} z\right)}{P_0}$, $\dfrac{Z_z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0}$, $\dfrac{X_z\left(O, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0}$, вычисленных по формулам (2.1)—(2.3) и $\dfrac{E_1 w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0 h}$ по формуле (2.5), при различных относительных размерах $\dfrac{h}{a}$ и отношениях модулей упругости слоев $\dfrac{E_1}{E_2}$. Для сравнения напряжений X_x и прогиба w, в таблицах помещены значения соответствующих величин, полученных при наличии гипотезы Кирхгофа по формулам [2]:

$$\frac{X_x^{0(j)}}{P_0} = \frac{E_j}{E_1}\cdot\frac{24(1+\sigma)\left(\frac{E_2}{E_1}+1\right)}{\pi^2\left[\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 + 14\frac{E_2}{E_1}+1\right]}\times$$

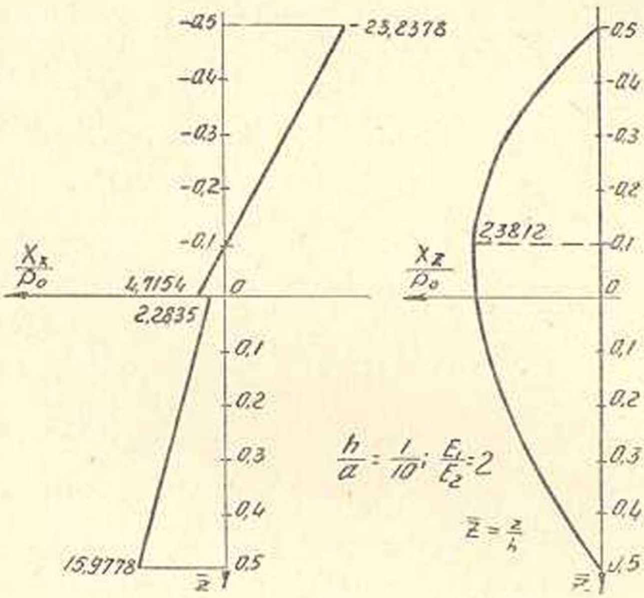
$$\times\frac{a^2}{h^2}\left[\frac{z}{h} - 0,5 + \frac{\frac{E_2}{E_1}+3}{4\left(\frac{E_2}{E_1}+1\right)}\right]\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{2.11}$$

$$\frac{w^0 E_1}{P_0 h} = \frac{24(1-\sigma^2)}{\pi^4}\cdot\frac{a^4}{h^4}\times$$

$$\times\frac{\frac{E_2}{E_1}+1}{\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 + 14\frac{E_2}{E_1}+1}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}. \tag{2.12}$$

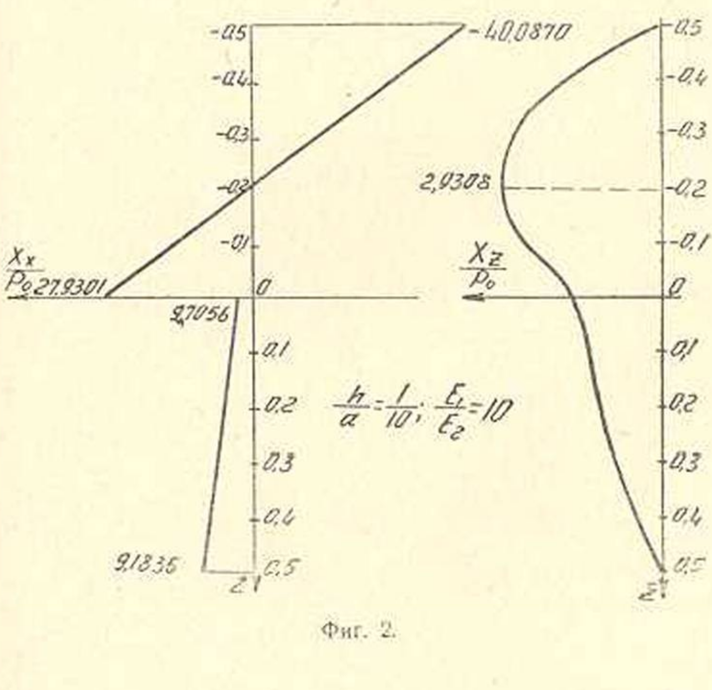
Те же величины представлены графически на фиг. 1—6, где пунктирными линиями показаны решения при наличии гипотезы Кирхгофа (2.11), (2.12).

В таблице 4 приводятся значения $\dfrac{\partial w}{\partial x}\left(0, \dfrac{a}{2}, z\right)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(0, \dfrac{a}{2}, z\right)$, позволяющие установить ошибку допущения $e_{xz} = e_{yz} = 0$, принимаемого в теории тонких плит.



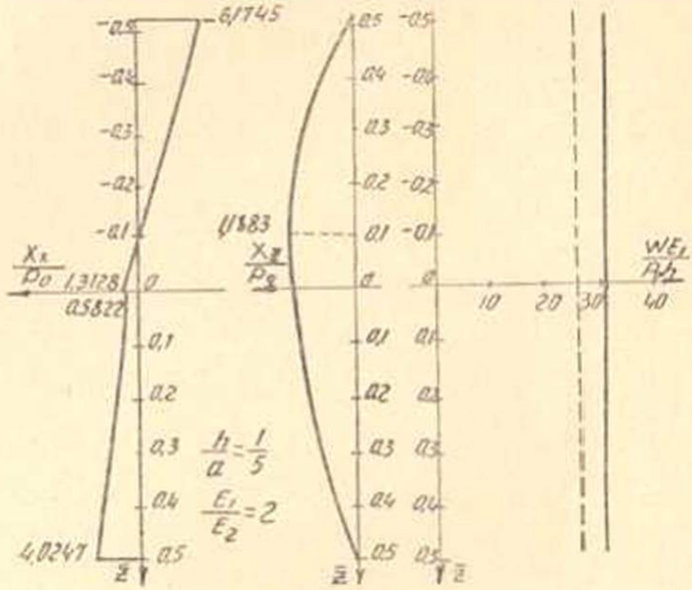
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
-23,2378
$\frac{X_x}{p_0}$
4,7154
2,2835
15,9778
$\bar{z}$
$\frac{X_z}{p_0}$
2,3812
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10};\ \frac{E_1}{E_2}=2$
$\bar{z}=\frac{z}{h}$

Фиг. 1.



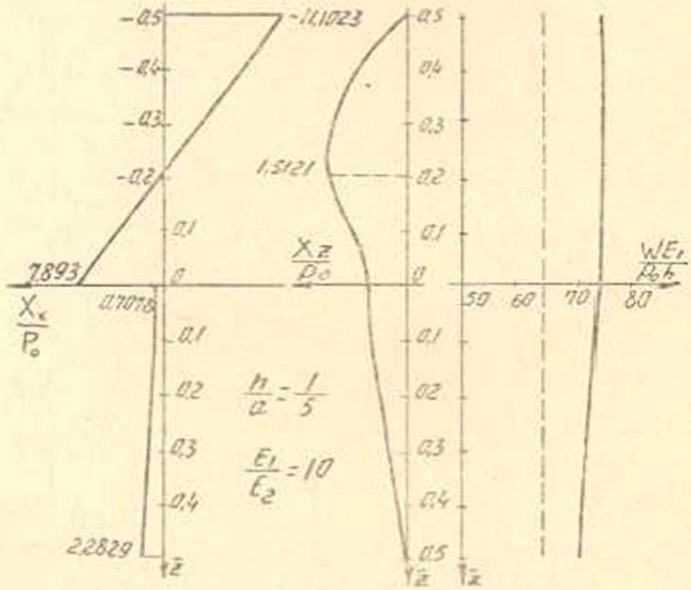
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
-40,0870
$\frac{X_x}{p_0}$
27,9301
9,7056
9,1835
$\bar{z}$
$\frac{X_z}{p_0}$
2,9308
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10};\ \frac{E_1}{E_2}=10$

Фиг. 2.



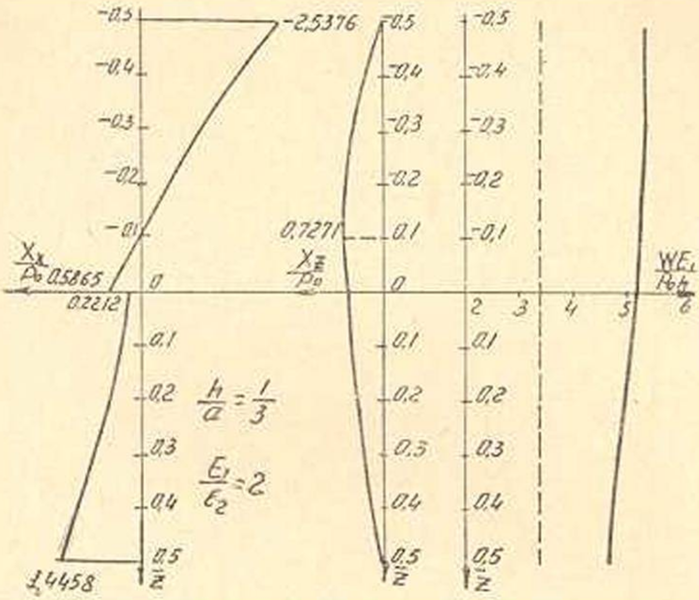
-6,1745
1,1883
$\frac{X_x}{P_0}$
1,3128
0,5822
$\frac{X_z}{P_0}$
$\frac{WE_1}{P_0 h}$
10
20
30
40
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$
$\frac{E_1}{E_2}=2$
4,0247

Фиг. 3.

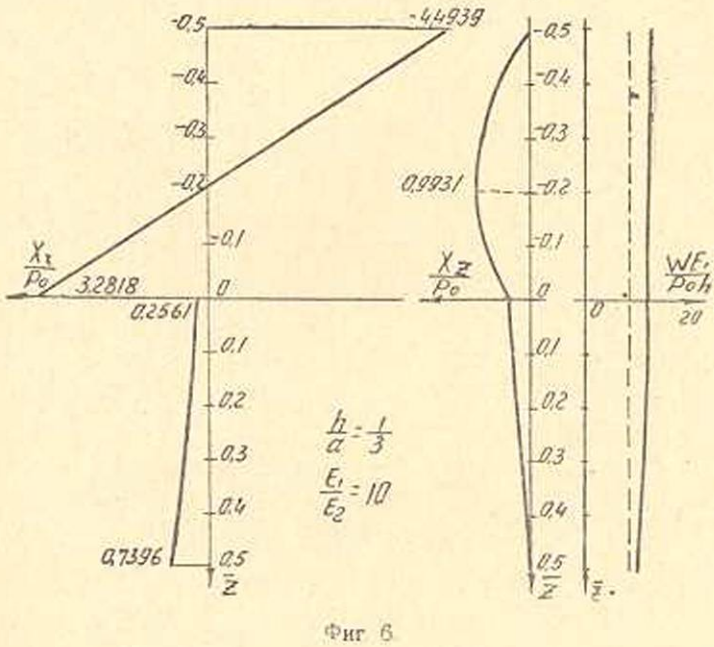


-11,1023
1,5121
7,893
0,7078
$\frac{X_x}{P_0}$
$\frac{X_z}{P_0}$
$\frac{WE_1}{P_0 h}$
50
60
70
80
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$
$\frac{E_1}{E_2}=10$
2,2829

Фиг. 4.


-2,5376
0,7271
0,5865
0,2212
1,4458
h/a = 1/3
E1/E2 = 2
WE1/P0h

Фиг. 5.


-4,4939
0,9931
3,2818
0,2561
0,7396
h/a = 1/3
E1/E2 = 10
WE1/P0h

Фиг 6

Таблица 1

Значения напряжений

	$\frac{E_1}{E_2}=2$											
	$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$				$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$				$\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$			
z/h	X_x°/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0	X_x°/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0	X_x°/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0
−0,5	−23,2344	−23,2378	−1	0	−5,7671	−6,1749	−1	0	−2,0911	−2,5376	−1	0
−0,4	−17,7024	−17,5621	−0,9493	1,0148	−4,3841	−4,5837	−0,9602	0,5273	−1,5932	−1,8051	−0,9626	0,3440
−0,3	−12,1704	−11,9535	−0,8650	1,7485	−3,0011	−3,0620	−0,8699	0,8995	−1,0953	−1,1520	−0,8650	0,5709
−0,2	− 6,6384	− 5,8812	−0,7368	2,2041	−1,6181	−1,5855	−0,7407	1,1227	−0,5975	−0,5522	−0,7306	0,6965
−0,1	− 1,1064	− 0,8255	−0,5916	2,3812	−0,2351	−0,1350	−0,5941	1,1883	−0,0996	0,0193	−0,5799	0,7271
0	4,4256 2,2128	4,7154 2,2835	−0,4454	2,2803	1,1478 0,5739	1,3128 0,5822	−0,4452	1,1349	0,3983 0,1991	0,5865 0,2212	−0,4324	0,6659
0,1	4,9788	4,9665	−0,3083	2,0959	1,2654	1,2184	−0,3075	1,0402	0,4481	0,4187	−0,2988	0,6047
0,2	7,7448	7,6736	−0,1860	1,7764	1,9569	1,8706	−0,1865	0,8821	0,6970	0,6301	−0,1813	0,5122
0,3	10,5108	10,4023	−0,0867	1,3217	2,6484	2,5493	−0,0887	0,6584	0,9459	0,8648	−0,0867	0,3846
0,4	13,2768	13,1655	−0,0234	0,7727	3,3399	3,2634	−0,0241	0,3660	1,1949	1,1330	−0,0229	0,2167
0,5	16,0428	15,9778	0	0	4,0314	4,0247	0	0	1,4438	1,4458	0	0

Таблица 2

Значения напряжений

	$\frac{E_1}{E_2} = 10$											
	$\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$				$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$				$\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$			
z/h	X'_x/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0	X'_x/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0	X'_x/P_0	X_x/P_0	Z_z/P_0	X_z/P_0
−0,5	−41,1038	−40,0870	−1	0	−10,2766	−11,1023	−1	0	−3,6996	−4,4939	−1	0
−0,4	−27,2174	−26,3949	−0,8891	1,6533	− 6,8047	− 7,1999	−0,9355	0,9063	−2,4497	−2,8229	−0,9344	0,5957
−0,3	−13,3309	−12,870	−0,7601	2,6320	− 3,3329	− 3,4054	−0,7870	1,4277	−1,1998	−1,2720	−0,7712	0,9195
−0,2	0,5555	0,7483	−0,5755	2,9308	0,1389	0,3405	−0,5932	1,5121	0,0499	0,2218	−0,5667	0,9931
−0,1	14,4419	14,3306	−0,4016	2,5482	3,6107	4,0870	−0,4082	0,9215	1,2998	1,7193	−0,3724	0,8211
0	28,3283 2,8328	27,9301 2,7056	−0,2746	1,4852	7,0825 0,7082	7,8930 0,7078	−0,2717	0,7386	2,5497 0,2549	3,2818 0,2561	−0,2403	0,3973
0,1	4,2215	3,9634	−0,1867	1,3161	1,0554	0,9869	−0,1839	0,6506	0,3799	0,3223	−0,1625	0,3447
0,2	5,6101	5,2383	−0,1110	1,0834	1,4026	1,2793	−0,1094	0,5351	0,5049	0,3999	−0,0967	0,2816
0,3	6,9987	6,5289	−0,0513	0,7869	1,7498	1,5898	−0,0508	0,3899	0,6299	0,4925	−0,0454	0,2057
0,4	8,3874	7,8417	−0,0143	0,4259	2,0969	1,9225	−0,0128	0,2133	0,7549	0,6041	−0,0117	0,1135
0,5	9,7760	9,1835	0	0	2,4441	2,2829	0	0	0,8798	0,7396	0	0

Примечение к таблицам 1 и 2. В плоскости контакта $z = 0$ приведены значения $\frac{X_x}{P_0}$ для верхнего и нижнего слоев.

Значения $\frac{wE_1}{P_0 h}$

Таблица 3

	$\frac{E_1}{E_2}=2$				$\frac{E_1}{E_2}=10$			
$\frac{z}{h}$	$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$		$\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$		$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$		$\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$	
−0,5	31,0086	по Кирхгофу 26,2472	5,3503	по Кирхгофу 3,4016	75,4721	по Кирхгофу 65,8897	11,9965	по Кирхгофу 8,5393
−0,4	31,1753		5,3636		75,8227		12,0809	
−0,3	31,2746		5,3454		76,0013		12,0963	
−0,2	31,3097		5,3079		76,0160		12,0563	
−0,1	31,2859		5,2555		75,8478		11,9612	
0	31,2047		5,1899		75,5157		11,8067	
0,1	31,0396		5,0851		74,8651		11,4617	
0,2	30,8363		4,9852		74,1539		11,1534	
0,3	30,6851		4,8843		73,3594		10,8612	
0,4	30,2874		4,7744		72,4515		10,5610	
0,5	29,9253		4,6443		71,4061		10,2226	

При $\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$ расхождения w и w_0 не превышают 4%

Таблица 4

	$\frac{E_1}{E_2}=2$			$\frac{E_1}{E_2}=10$		
$\frac{z}{h}$	$\frac{E_1 a}{P_0 h}\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{E_1 a}{P_0 h}\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{e_{xz}}{\frac{\partial w}{\partial x}}$	$\frac{E_1 a}{P_0 h}\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{E_1 a}{P_0 h}\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{e_{xz}}{\frac{\partial w}{\partial x}}$
			$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$			
−0,5	1364,6951	−1364,6853	0	3285,4616	−3285,7876	0
0	1370,6424	−1313,6672	4,16%	3289,0443	−3251,9882	1,13%
0	1370,6424	−1256,6935	8,31%	3289,0443	−2917,8305	11,28%
0,5	1355,9837	−1356,1202	0	3240,9261	−3241,7786	0
			$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$			
−0,5	97,4164	−97,4233	0	237,1024	−237,1096	0
0	98,0323	−83,8473	14,46%	237,2395	−228,0123	3,89%
0	98,0323	−69,6502	28,95%	237,2395	−144,9193	38,91%
0,5	94,0127	−94,0137	0	224,3287	−224,0623	0
			$\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$			
−0,5	16,8083	−16,8093	0	37,6880	−37,6705	0
0	16,3047	−11,3110	30,62%	37,0919	−34,1145	8,03%
0	16,3047	− 6,3170	61,25%	37,0919	− 7,3039	80,3%
0,5	14,5906	−14,5834	0	32,1152	−32,0235	0

Приведенные в таблицах результаты вычислений показывают следующее:

1. Нормальное напряжение X_x, претерпевая разрыв на контакте, по высоте плиты меняется линейно для отношений $\frac{h}{a}=\frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ и по кривой для случая $\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$, причем как показывают фиг. 1—6 при $\frac{E_1}{E_2}=2$ закон изменения напряжения X_x более отличен от линейного, чем при $\frac{E_1}{E_2}=10$.

В таблице 5 приведены расхождения максимальных значений X_x и X_x^*.

2. Максимальное значение нормального напряжения Z_z составляет от максимального значения X_x следующие величины (таблица 6). Как показывают фигуры 1—6 и таблица 6 предел отношения $\frac{h}{a}$, до которого можно пренебрегать Z_z по отношению к X_x, для случая $\frac{E_1}{E_2}=10$ выше, чем при $\frac{E_1}{E_2}=2$.

Таблица 5

E_1/E_2 \ h/a	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
2	0,014%	6,6%	17,59%
10	2,53%	7,44%	17,67%

Таблица 6

E_1/E_2 \ h/a	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
2	4,3%	16,2%	39,3%
10	2,49%	9%	22,3%

3. Напряжение X_z принимает максимальное значение в слое с большим модулем упругости; с увеличением отношения модулей упругости слоев этот максимум перемещается к плоскости $z=\frac{h}{4}$ этого слоя.

4. Сравнение значений w с w_0 показывает, что теория изгиба тонких плит при отношениях $\frac{h}{a}>\frac{1}{5}$ дает для прогиба существенно заниженные значения.

В таблице 7 приводятся результаты сравнения расхождений наименьшего и наибольшего значений прогиба w с прогибом w_0.

5. Как показывает таблица 4 для отношений $\frac{h}{a}>\frac{1}{5}$ допущение $e_{xz}=e_{yz}=0$ может привести к значительным погрешностям, в то время как предположение $e_{zz}=0$ (табл. 3) допустимо для отношений

$\frac{h}{a} < \frac{1}{3}$. Это подтверждается также значениями прогибов (таблица 8), вычисленными для рассматриваемого случая по гипотезе [3], где принимается $e_{xz} \neq 0$, $e_{yz} \neq 0$, $e_{zz} = 0$.

Таблица 7

E_1/E_2 \ h/a	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
2	12,3—16,3%	26,7—36,3%
10	7 —13,15%	16,6—29,4%

Таблица 8

E_1/E_2 \ h/a	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
2	31,649	5,345
10	76,270	12,275

В заключение отметим, что если для однослойной плиты критерием применимости теории изгиба тонких плит является некоторое предельное отношение $\frac{h}{a}$, то для двухслойной плиты этого отношения недостаточно. На напряженное состояние оказывает влияние отношение модулей упругости слоев.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 26 VIII 1958

Ա. Պ. Մելքոնյան

ԵՐԿՇԵՐՏ ՀԱՍՏ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է ազատ հենված ուղղանկյուն կտրվածքով երկշերտ հաստ սալի ծռման խնդիրը: Շերտերի նյութերի առաձգականության մոդուլները տարբեր են, բայց հաստատուն են յուրաքանչյուր շերտի համար: Ենթադրվում է նաև, որ Պուասոնի գործակիցը երկու շերտի համար էլ միևնույնն է: Մասնավոր դեպքում լուծված է քառակուսի սալի ծռման խնդիրը տարբեր հարաբերական չափերի և շերտերի առաձգականության մոդուլների տարբեր հարաբերությունների համար: Ճշգրիտ լուծման արդյունքները համեմատվում են բարակ սալերի ծռման տեսությունից ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, том 1, 1952.
2. *Амбарцумян С. А.* Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ), VI, 5, 1953.
3. *Амбарцумян С. А.* Известия АН СССР ОТН, 7, 1957.