

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О центре изгиба призматических стержней
 прямоугольного сечения с несимметричным
 прямоугольным вырезом

Задача поперечного изгиба призматического стержня прямоугольного сечения с симметрично расположенным прямоугольным вырезом была решена Б. Л. Абрамяном [1].

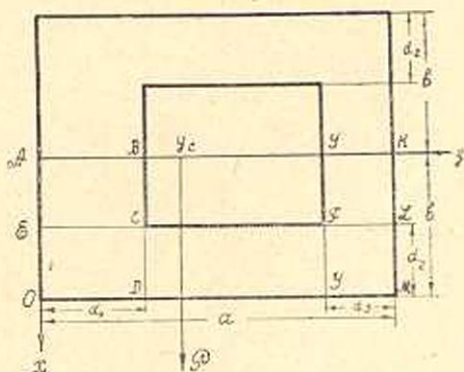
В данной работе рассматривается задача об изгибе призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным эксцентрично расположенным отверстием. Задача решается введением вспомогательных функций [2], сводящих задачу к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается вполне регулярность этих систем. Даются формулы для определения напряжений и координаты центра изгиба. Приведен числовой пример определения координаты центра изгиба и напряжений для призматических стержней квадратного поперечного сечения с несимметричным квадратным вырезом.

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила P приложена на свободном конце стержня параллельно оси x (фиг. 1) и проходит через центр изгиба, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [3]:

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P y (y - y_0)}{I(1 + \nu)} - \frac{P}{2I} f(y), \quad (1)$$

где y_0 — координата центра тяжести сечения, I — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y^* , $f(y)$ — произвольная функция, ν — коэффициент Пуассона.



Фиг. 1.

Для двухсвязных областей на внешнем и внутреннем контурах должно выполняться условие:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds}. \quad (2)$$

Положим

$$f(y) = b^2. \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) и (2) примут вид:

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P\nu(y - y_0)}{I(1 + \nu)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} (x^2 - b^2) \frac{dy}{ds}. \quad (5)$$

В силу симметричности области поперечного сечения относительно оси y решение ищем только в области АКМОА. Чтобы распространить решение на всю область сечения, требуем, чтобы на оси симметрии $x = 0$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Из граничного условия (5) следует

$$\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=a} = 0,$$

т. е. на внешнем контуре $F(x, y) = C$. Эту постоянную C примем равной нулю. Тогда будем иметь

$$F(b, y) = F(x, 0) = F(x, a) = 0. \quad (7)$$

На внутреннем контуре:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=d_1} &= 0, & \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=a-d_1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=b-d_2} &= \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b). \end{aligned} \quad (8)$$

Для непрерывности значения функции $F(x, y)$ на внутреннем контуре положим

$$F(x, d_1) = C_0, \quad F(b - d_2, y) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b) (y - d_1)$$

и

$$F(x, a - d_3) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1). \quad (9)$$

Значение постоянной C_0 определяется из теоремы Лейбница о циркуляции касательного напряжения [3].

Пусть

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) & \text{внутри области } OABDO; \\ F_2(x, y) & \text{" " } OELMO; \\ F_3(x, y) & \text{" " } IKMGI. \end{cases} \quad (10)$$

При решении задачи введем вспомогательные функции (2), т. е. решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } AECBA; \\ \Phi_1(x, y) & \text{" " } OECD O; \end{cases} \\ F_2(x, y) &= \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{" " } CDGFC; \\ \Phi_2(x, y) & \text{" " } OECD O; \\ \Phi_4(x, y) & \text{" " } GFLMG; \end{cases} \\ F_3(x, y) &= \Psi_3(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{" " } FIKLF; \\ \Phi_3(x, y) & \text{" " } GFLMG. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) выбираем так, чтобы внутри областей, где они существуют, удовлетворяли уравнению Лапласа, т. е.

$$\nabla^2 F_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (12)$$

Тогда функции $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) согласно (4) будут удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Psi_i(x, y) = \frac{P_y(y - y_0)}{I(1 + \nu)}. \quad (13)$$

Из условий (6)–(9) на основании (10) и (11) получим следующие граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \Psi_1(b, y) + \Phi_1(b, y) = \Phi_1(x, 0) = \Psi_2(b, y) = \\ &= \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = \Psi_2(x, a) + \Phi_4(x, a) = \Phi_2(b, y) = \\ &= \Phi_4(b, y) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi_3(x, a) = \Psi_3(b, y) + \Phi_3(b, y) = \\ &= \Phi_3(x, a) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi_1(x, d_1) = C_0, \quad \Psi_2(b - d_2, y) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(y - d_1)$$

$$\Psi_3(x, a - d_3) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1).$$

Для непрерывности решения надо потребовать, чтобы

$$\Phi_1(b - d_2, y) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} = 0; \quad \Phi_1(x, d_1) = \Psi_2(x, d_1) - C_0;$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0,$$

$$\Phi_2(b-d_2, y) = \Psi_1(b-d_2, y) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2^2 - 2b)(y-d_1);$$

$$\Phi_4(x, a-d_3) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \Big|_{y=a-d_3} = 0;$$

$$\Phi_4(b-d_2, y) = \Psi_3(b-d_2, y) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2^2 - 2b)(y-d_1),$$

$$\Phi_3(b-d_2, y) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} = 0; \quad (15)$$

$$\Phi_3(x, a-d_3) = \Psi_2(x, a-d_3) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2^2 - 2b)(a-d_3-d_1).$$

Граничные условия для определения функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ неоднородны, но, следуя Гринбергу [4], решение ищем в таком же виде, как и при однородных граничных условиях, т. е.

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \text{где } H_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy;$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2},$$

где
$$U_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_2}^b \Psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} dx;$$

$$\Psi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y),$$

где
$$V_k(x) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \Psi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) dy;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1},$$

где
$$W_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy;$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2},$$

где

$$G_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_1}^b \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2} dx;$$

$$\Phi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y),$$

где

$$L_k(x) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_1}^b \Phi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y) dy;$$

$$\Phi_4(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2},$$

где

$$K_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_1}^b \Phi_4(x, y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2} dx. \quad (16)$$

§ 2. Решение уравнений задачи

Для определения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ... и $K_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} H_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 H_k(x) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} C_0 + \\ &+ \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2}{k\pi} \cdot \{d_1(-1)^{k+1} + y_0[(-1)^k - 1]\}; \\ U_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 U_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} C_0 + \\ &+ \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \cdot (y_0 - y) + (-1)^k \frac{k\pi}{d_2} \cdot \frac{P}{I} (d_2 - 2b)(y - d_1); \quad (17) \\ V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 V_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_3^2} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) \right] - \\ &- \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{P_y}{I(1+\nu)} (a - y_0) [(-1)^k - 1] + \frac{2d_3(-1)^k}{k\pi} \cdot \frac{P_y}{I(1+\nu)}; \\ W_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 W_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{d_1^2} C_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p(d_1) \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2}; \\
G_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 G_k(y) &= \frac{2k\pi}{d_2^2} (-1)^{k+1} C_0 + \\
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} H_p(b-d_2) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_1} - \frac{Pd_2}{2l} (d_2-2b)(y-d_1) \right]; \\
K_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 K_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{d_2^2} C_0 + \\
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} V_p(b-d_2) \cdot \sin \frac{p\pi}{d_3} (a-y) - \frac{Pd_2}{2l} (d_2-2b)(y-d_1) \right].
\end{aligned}$$

Из условий (14) и (15) на основании (16) получим следующие граничные условия для этих функций:

$$\begin{aligned}
H_k^*(x)|_{x=0} = V_k^*(x)|_{x=0} = W_k(b-d_2) &= W_k^*(x)|_{x=b-d_2} = G_k(d_1) = \\
= G_k^*(y)|_{y=d_1} = K_k(a-d_3) &= K_k^*(y)|_{y=a-d_3} = L_k(b-d_2) = \\
= L_k^*(x)|_{x=b-d_2} &= 0;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
H_k(b) + W_k(b) &= 0, & U_k(0) + G_k(0) &= 0; \\
U_k(a) + K_k(a) &= 0, & V_k(b) + L_k(b) &= 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Решая уравнение (17) и используя условия (18), получим следующие выражения для искомых функций:

$$\begin{aligned}
H_k(x) &= A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{2d_1^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P_v}{l(1+v)} [d_1((-1)^{k+1} + \\
& + y_0[(-1)^k - 1]) - \frac{2(-1)^k C_0}{k\pi}; \\
U_k(y) &= C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} - \\
& - \frac{2d_2^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P_v}{l(1+v)} [(-1)^k - 1](y_0 - y) - \\
& - \frac{(-1)^k}{k\pi} \cdot \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b)(y - d_1) - \frac{2(-1)^k}{k\pi} C_0; \\
V(x) &= E \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2l} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2d_3^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P}{l(1+\nu)} (a - y_0) [(-1)^k - 1] - 2(-1)^k \frac{P}{l(1+\nu)} \left(\frac{d_3}{k\pi} \right)^3; \quad (20)$$

$$W_k(x) = \frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi} C_0 \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_1} (x - b + d_2) + \\ + \frac{2(-1)^{k+1}d_2}{\pi d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b + d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p U_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1} \right)^2} + \\ + \frac{2(-1)^{k+1}kd_2^2}{\pi d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1} \right)^2} \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2};$$

$$G_k(y) = \frac{4(-1)^{k+1}C_0}{k\pi} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_2} (d_1 - y) + \\ + \frac{d_2(-1)^k}{(k\pi)^2} \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (d_1 - y) + \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \cdot \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b) (d_1 - y) + \\ + \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (d_1 - y) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2} \cdot H_p(b - d_2) + \\ + \frac{2k(-1)^{k+1}d_1^2}{\pi d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H_p(b - d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1};$$

$$L_k(x) = \frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2l} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \right] \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_3} (x - b + \\ + d_2) + \frac{2(-1)^{k+1}d_2}{\pi d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p U_p(a - d_3)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3} \right)^2} + \\ + \frac{2kd_2^2}{\pi d_3^2} (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_p(a - d_3)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3} \right)^2} \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2};$$

$$K_k(y) = \frac{4C_0(-1)^{k+1}}{k\pi} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_2} (y - a + d_3) + \\ + \frac{d_2}{k\pi} (-1)^{k+1} \frac{P}{l} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{d_2}{k\pi} \right)^2 \cdot \frac{P}{l} (-1)^{k+1} (d_2 - 2b) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_2) + \\
& + \frac{2(-1)^{k+1} d_3}{\pi d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p V_p(b-d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2} \right)^2} + \\
& + \frac{(-1)^k}{k\pi} \cdot \frac{P d_2}{l} \cdot (d_2 - 2b) (y - d_1) + \\
& + \frac{2k(-1)^{k+1} d_3^2}{\pi d_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_p(b-d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2} \right)^2} \cdot \sin \frac{p\pi}{d_3} (a - y).
\end{aligned}$$

Подставляя в (19) соответствующие значения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ... и $K_k(y)$ из (20), получим совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений, из которой должны быть определены постоянные интегрирования A_k , C_k , D_k и E_k , что возможно сделать, если эта совокупность систем вполне регулярна.

Покажем, что полученная совокупность систем вполне регулярна. Делая подстановки

$$\begin{aligned}
D_k &= -C_k \operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot F_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2}; \\
C_p &= \frac{abd_2}{ap(-1)^p} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} C_p^*; \\
F_p &= \frac{abd_2}{ap(-1)^p} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} F_p^*; \\
A_p &= \frac{abd_2}{p(-1)^p} \operatorname{sch} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2) A_p^*; \\
E_p &= \frac{abd_2}{p(-1)^p} \operatorname{sch} \frac{p\pi}{d_3} (b-d_2) E_p^*;
\end{aligned} \tag{21}$$

приведем эту совокупность бесконечных систем уравнений к виду:

$$\begin{aligned}
A_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{11} C_p^* + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{12} F_p^* + \gamma_k^{11}; \\
C_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{12} A_p^* + \gamma_k^{11}; \\
F_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} E_p^* + \gamma_k^{11};
\end{aligned} \tag{22}$$

$$E_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} C_p^* + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{42} F_p^* + \gamma_{1k}^{IV},$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2d_2k}{\pi d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1) \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{12} = \frac{2d_2k}{\pi d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{21} = \frac{2d_1\pi k}{\pi d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{31} = \frac{2\pi k d_3}{\pi d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{41} = \frac{2kd_2}{\pi d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{42} = \frac{2d_2k}{\pi d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_3) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2};$$

$$\gamma_{1k}^I = \frac{d_1}{abd_2^2} \frac{2}{k\pi^2} C_0 \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \\ - \frac{d_1^2}{abd_2} (d_1 - y_0) \cdot \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2}{k^2\pi^3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} - \\ - \frac{d_1^2 y_0}{abd_3} (-1)^k \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2}{k^2\pi^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_1}{ab} \cdot \frac{1}{k\pi^2} \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} (d_1 - y_0) \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2); \\
\gamma_k^{II} &= \frac{P}{I} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2d_2 x}{k^2 \pi^3} \frac{(y_0 - d_1)}{ab} \operatorname{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
& + \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} (-1)^{k+1} \frac{2d_2 y_0 x}{ab} \cdot \frac{1}{k^3 \pi^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{P}{I} \frac{x d_2}{ab} (d_2 - 2b) \frac{1}{k\pi^2} + \\
& + \frac{1}{abd_1} \cdot \frac{2x}{k\pi^2} C_0 + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{3} \frac{d_1}{ab} \frac{x}{k\pi^2} (2d_1 - 3y_0) + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{2d_2^2}{ab} \frac{x}{k^3 \pi^4}; \\
\gamma_k^{III} &= \frac{x}{ab} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_2}{k^2 \pi^3} (y_0 - a + d_3) \operatorname{cth} \frac{k\pi d_3}{d_2} + \\
& + \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{x d_2}{ab} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2 \pi^3} (a - y_0) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} + \frac{2x}{abd_3} \frac{1}{k\pi^2} C_0 + \\
& + \frac{x}{ab} \frac{P}{I} \frac{d_3}{d_3} \frac{1}{k\pi^2} (d_2 - 2b) (a - d_1) + \frac{x d_3}{ab} \frac{P}{3I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1}{k\pi^2} (3a - 3y_0 - 2d_3) - \\
& - \frac{x d_2^2}{ab} \frac{1}{k^3 \pi^4} \cdot \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu}; \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k^{IV} &= - \frac{d_3^2}{abd_2} \frac{2}{k^2 \pi^3} \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_3} (a - y_0 - d_3) + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{2d_3^2}{k^2 \pi^3} (a - y_0) \frac{(-1)^k}{abd_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_3) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{d_3}{k\pi^2} (a - d_3 - y_0) \frac{1}{ab} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) + \\
& + \frac{2C_2 d_3}{k\pi^2 d_2^2} \frac{1}{abd_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) + \\
& + \frac{P}{I} \cdot \frac{d_3}{k\pi^2} \frac{1}{abd_2} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3}.
\end{aligned}$$

Совокупность четырех бесконечных систем уравнений можно свести к одной бесконечной системе

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + b_\nu, \quad (24)$$

если положить

$$\begin{aligned}
A_k^* &= Z_{4k-3}, \quad C_k^* = Z_{4k-2}, \quad F_k^* = Z_{4k-1}, \quad E_k^* = Z_{4k}; \\
C_{4k-3, 4p-2} &= a_{kp}^{11}; \quad C_{4k-3, 4p-1} = a_{kp}^{12}; \quad C_{4k-3, 4p} = C_{4k-3, 4p-3} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{4k-2, 4p-3} &= a_{kp}^{21}, \quad C_{4k-2, 4p} = C_{4k-2, 4p-1} = C_{4k-2, 4p-2} = 0; \\
C_{4k-1, 4p} &= a_{kp}^{31}, \quad C_{4k-1, 4p-1} = C_{4k-1, 4p-2} = C_{4k-1, 4p-3} = 0; \\
C_{4k, 4p-2} &= a_{kp}^{41}, \quad C_{4k, 4p-1} = a_{kp}^{42}, \quad C_{4k, 4p} = C_{4k, 4p-3} = 0; \\
b_{4k-3} &= \gamma_{1k}^I, \quad b_{4k-2} = \gamma_{1k}^{II}, \quad b_{4k-1} = \gamma_{1k}^{III}, \quad b_{4k} = \gamma_{1k}^{IV}.
\end{aligned}
\tag{25}$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-3, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{11} + a_{kp}^{12}| < \frac{1}{4\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right]; \\
\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-2, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{21}| \leq \alpha; \\
\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{31}| \leq \alpha; \\
\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{41} + a_{kp}^{42}| < \frac{1}{4\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right].
\end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} &< \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right]; \\
\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} &\leq e^{-\frac{k\pi d_1}{d_2}}; \\
\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} &\leq 1 \quad (0 < x < \infty).
\end{aligned}$$

Выбирая при $d_1 > d_2$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right]},$$

для всех γ получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\gamma, p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)} \right]}.$$

Если же $d_2 > d_1$, то α придаем значение

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)}\right]}$$

и для всех γ имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\gamma, p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)}\right]},$$

т. е.

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\gamma, p}| < 1 - \theta$$

для любого γ и $\theta > 0$. Следовательно, система (24) вполне регулярна [5]. Свободные члены системы (24) ограничены $|\gamma_k| \leq M$. Как известно [5], в этом случае система имеет ограниченные решения, удовлетворяющие неравенству

$$|Z_\gamma| \leq K = \frac{M}{\theta}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. $d_1 = a - b$, т. е. случай прямоугольного сечения с внутренне-внецентренно расположенной трещиной, система (24) остается вполне регулярной;

2. $b = d_2$, т. е. случай прямоугольного сечения с горизонтально расположенной трещиной вдоль оси. Система (24) также вполне регулярна;

3. $d_1 = d_2$, т. е. случай сечения с центрально расположенным прямоугольным вырезом. Как это видно из (23).

$$a_{kp}^{21} = a_{kp}^{31}, \quad a_{kp}^{11} = a_{kp}^{42}, \quad a_{kp}^{42} = a_{kp}^{41}.$$

Совокупность четырех бесконечных систем (22) вырождается в совокупность двух бесконечных систем:

$$M_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{21} L_p^* + b_k^1,$$

$$L_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} M_p^* + b_k^{11},$$

где

$$c_{kp} = a_{kp}^{11} + a_{kp}^{12}, \quad b_k^1 = \gamma_k^{11} + \gamma_k^{12}, \quad b_k^{11} = \gamma_k^1 + \gamma_k^{1V}.$$

§ 3. Определение постоянного C_0

Постоянная C_0 определяется из теоремы Л. С. Лейбензона [3] о циркуляции касательного напряжения при изгибе:

$$\int_{L_i} \frac{\partial F}{\partial n} ds + \frac{P}{2I} \iint f_1(y) dx dy + \left[2\mu\tau - \frac{P\nu(y'_0 - y_0)}{(1+\nu)I} \right] \Omega = 0,$$

где Ω — площадь, ограниченная внутренним контуром L_i ;

y'_0 — координата центра тяжести замкнутой области Ω .

Поскольку было принято $f(y) = b^2$ и $\tau = 0$, то это соотношение упрощается

$$\int_{L_i} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) \Omega. \quad (26)$$

Учитывая (10) и (11), формуле (26) можно придать вид:

$$\begin{aligned} & \int_{d_1}^{a-d_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \Big|_{x=b-d_1} dy - \int_0^{b-d_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} dx + \int_0^{b-d_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \Big|_{y=a-d_2} dx = \\ & = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) (a - d_2 - d_1) (b - d_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Решая бесконечную систему (24), получим значения постоянных интегрирования, выраженные через C_0 . Затем находим функции $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$, через которые определяются функции напряжений $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$.

Подставляя в (27) соответствующие значения функций $\Psi_i(x, y)$, после некоторых преобразований получим следующую формулу для определения C_0 :

$$\begin{aligned} & C_0 \left[\frac{b-d_2}{d_1} + \frac{b-d_2}{d_2} + \frac{a-d_1-d_2}{d_2} \right] = \\ & = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) (a - d_2 - d_1) (b - d_2) - \\ & - \frac{1}{3} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (b - d_2) (d_1^2 - d_2^2) + \frac{1}{2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (b - d_2) [y_0(d_1 + d_2) - \\ & - ad_2] - \frac{Pd_2}{2Id_2} (d_2 - 2b) (a - d_2 - d_1) (b - d_2) + \\ & + \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \frac{d_2}{4} (a - d_2 - d_1) (2y_0 - a + d_2 - d_1) - \\ & - \frac{P}{4I} (d_2 - 2b) (a - d_2 - d_1)^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -abd_2 \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{II}}{k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{III}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^I}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{IV}}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) - \frac{d_1}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} - \\
& - \frac{d_3}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} - \frac{d_2}{\alpha \pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) - \\
& - \frac{d_2}{\alpha \pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} - \\
& - \frac{d_3}{\alpha \pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} - \\
& \left. - \frac{d_2}{\alpha \pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \right\},
\end{aligned}$$

§ 4. Определение центра изгиба

Координата центра изгиба определяется по формуле

$$y = \frac{1}{P} \iint_{\Omega} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{2I} \iint_{\Omega} (x^2 - b^2) y dx dy, \quad (28)$$

Подставляя в (28) полученные значения функций напряжений и произведя интегрирование, окончательно получим

$$\begin{aligned}
y_c = & \frac{1}{6I} [2b^3 |d_1^2 + d_3(2a-d_3)| + d_2^2 (3b-d_2) |a-d_3|^2 - d_1^2] + \\
& + \frac{2}{P} \left\{ 4abd_2 \frac{d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} \left(b - \frac{d_2}{2} \right) + \right. \\
& + 4 \frac{abd_2^3}{\alpha \pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{a-2d_1}{2d_2} k\pi \right] + \\
& + 4 \frac{abd_2^3}{\alpha \pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} k\pi \frac{a-2d_3}{2d_2} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \frac{abd_2d_3^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{2d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} \left(b - \frac{d_2}{2}\right) + \\
& + C_0 [-2ab + bd_3 + bd_1 - ad_2] - \frac{8C_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \\
& \quad \left. + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} + d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{12} \cdot [d_1^2(bd_1^2 - d_2^2) + d_3^2 b(2a - d_2) + d_2^2(a - d_3)^2] + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} y_0 \frac{1}{6} [-bd_1^3 - ad_2^3 + d_2d_3^2 + d_1d_2^2 - bd_3^3] + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{8}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot [2d_1d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^5 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} - 2ad_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + \\
& \quad + d_3^5 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + 2d_2^4(a - d_3) \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2}] + \\
& + \frac{16}{\pi^5} \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} y_0 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[-d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} + d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \\
& \quad \left. + d_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} \right] + \frac{Pd_2}{4I} (d_2 - 2b) \cdot (a - d_3 - d_1) [bd_1 - 3ab + bd_3 + 2ad_2] - \\
& - \frac{4}{\pi^3} \frac{Pd_2}{I} (d_2 - 2b) \cdot (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] \}.
\end{aligned}$$

Если вырез расположен симметрично, т. е. $d_1 = d_3$, то из формулы (29) следует, что, как и следовало ожидать, $y_c = \frac{a}{2}$.

§ 5. Определение напряжений

Напряжения определяются через функцию напряжений следующим образом [3]:

$$\begin{aligned}
X_z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
Y_z &= -\frac{\partial F}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя в (30) соответствующие значения $F(x, y)$, получим:

$$\begin{aligned}
 X_z &= \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \cos \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-2} + \\
 &+ \frac{C_0}{d_1} + \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} (3y^2 - d_1^2) + \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{y_0}{2} (d_1 - 2y) - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
 Y_z &= \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-3} \\
 &0 < x < b-d_2, \quad 0 < y < d_1, \\
 X_z &= \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} \cdot Z_{4k-2} + \\
 &+ \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} \cdot Z_{4k-1} - \\
 &- \frac{P}{2I} [x^2 + x(d_2 - 2b) + b(b-d_2)] - \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (b-x)(d_2 - b + x); \\
 Y_z &= \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \cos \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-2} + \\
 &+ \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \cos \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \\
 &+ \frac{C_0}{d_2} + \frac{P}{2I} (d_2 - 2b)(y - d_1) + \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (y_0 - y)[d_2 - 2(b-x)] \\
 &b-d_2 < x < b, \quad d_1 < y < a-d_3, \\
 X_z &= \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) Z_{4k-} \\
 &- \frac{C_0}{d_3} - \frac{Pd_2}{2Id_3} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) + \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (a - y_0)[d_3 - \\
 &- 2(a-y)] + \frac{P_0}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} [3(a-y)^2 - d_3^2] - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
 Y_z &= \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) \cdot Z_{4k}; \\
 &0 < x < b-d_2; \quad a-d_3 < y < a.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_z = & \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-2} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-2} + \\
& + \frac{2C_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} (3y^2 - d_1^2) + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \frac{y_0}{2} (d_1 - 2y) - \\
& - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (d_1 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) - \\
& - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} - \\
& - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4y_0 d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} - \\
& - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y = & \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-3} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-1} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2C_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) - \\
& - \frac{P_v}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (d_1 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{P_v}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \\
& + \frac{P_v}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4y_0 d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \\
& \qquad b-d_2 < x \leq b; \quad 0 \leq y < d_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_z = & \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) Z_{4k} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-2} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{Pd_2}{Id_3} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \times \\
& \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) + \frac{P}{I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{2} (a - y_0) [d_3 - 2(a - y)] + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{6} [3(a - y)^2 - \\
& - d_3^2] - \frac{4d_3}{\pi^2} \cdot \frac{P_y}{I(1+\nu)} (a - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \times \\
& \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_2} (a - y) - \\
& - \frac{2d_3^2}{\pi^2} \frac{P_y}{I(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_2} (a - y) + \\
& + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (a - d_3 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \times \\
& \times \sin \frac{k\pi (b - x)}{d_2} - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
Y_2 = & \frac{abd_3\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a - y) Z_{4k} + \\
& + \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x) \cdot Z_{4k-2} + \\
& + \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_3) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x) Z_{4k-1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi (a - y)}{d_3} + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x) + \\
& + \frac{Pd_2}{Id_3} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - x) \times \\
& \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_2} (a - y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P}{I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x) - \\
& - \frac{4d_3}{\pi^2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (a - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a - y) - \\
& - \frac{2d_3^2}{\pi^2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a - y) - \\
& - \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \frac{4d_2}{\pi^2} (a - d_3 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \times \\
& \quad \times \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x).
\end{aligned}$$

$$b - d_2 < x \leq b, \quad a - d_3 < y \leq a.$$

§ 6. Числовой пример

В качестве примера решена задача изгиба стержня квадратного поперечного сечения с несимметричной квадратной полостью, т. е. для $a = 2b$, $2(b - d_2) = a - d_1 - d_3$ при следующих относительных размерах и толщине стенок $d_2 = d$, $d_1 = 2d_3 = \frac{4}{3}d$, $a = 2b = 3d$. В расчетах принято $\nu = 0,3$.

Из решения бесконечной системы после применения лимитант [5] получены следующие оценки сверху и снизу для неизвестных Z_k :

$$0,27813 \frac{C_0}{ab^2} - 0,00111 \frac{P}{ab^3} < Z_1 < 0,27604 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00826 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,20908 \frac{C_0}{ab^2} + 0,02433 \frac{P}{ab^3} < Z_2 < 0,20606 \frac{C_0}{ab^2} + 0,03785 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,29464 \frac{C_0}{ab^2} - 0,10763 \frac{P}{ab^3} < Z_3 < 0,29268 \frac{C_0}{ab^2} - 0,09885 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,18512 \frac{C_0}{ab^2} - 0,05037 \frac{P}{ab^3} < Z_4 < 0,18223 \frac{C_0}{ab^2} - 0,03744 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,17171 \frac{C_0}{ab^2} - 0,00684 \frac{P}{ab^3} < Z_5 < 0,16858 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00718 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,15360 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00006 \frac{P}{ab^3} < Z_6 < 0,14904 \frac{C_0}{ab^2} + 0,02052 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,19102 \frac{C_0}{ab^2} - 0,06576 \frac{P}{ab^3} < Z_7 < 0,18778 \frac{C_0}{ab^2} - 0,03127 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,13519 \frac{C_0}{ab^2} - 0,03953 \frac{P}{ab^3} < Z_8 < 0,13096 \frac{C_0}{ab^2} - 0,02057 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,17166 \frac{C_0}{ab^2} - 0,05816 \frac{P}{ab^3} < Z_{7,8,9} < 0,15696 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00774 \frac{P}{ab^3};$$

где

$$0,11247 \frac{P}{b} < C_0 < 0,12319 \frac{P}{b}.$$

Для координаты центра изгиба y_c получены следующие оценки снизу $\bar{y}_c$ и сверху $\bar{y}_c$:

$$0,44331 a < y_c < 0,47721 a.$$

За расчетное значение координаты центра изгиба y_c^0 принято среднее арифметическое между нижней границей $\bar{y}_c$ и верхней границей $\bar{y}_c$

$$y_c^0 = 0,4602 a,$$

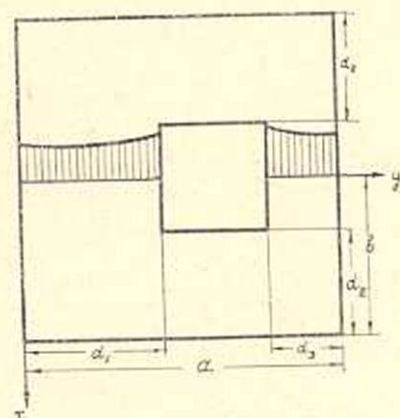
что дает ошибку расчета менее 3,6%.

По приближенной теории тонкостенных стержней замкнутого профиля (6) для этого случая находим

$$y_c^* = 0,3961 a.$$

Погрешность приближенного значения y_c^* по сравнению с точным y_c^0 составляет 14%.

В таблице 1 приведены значения касательных напряжений на нейтральной оси ou при $v=0$, эпюра которых построена на фиг. 2.



Фиг. 2.

Таблица 1

y	$\tilde{X}_z / \frac{P}{a^2}$	$\bar{X}_z / \frac{P}{a^2}$	$X_z^0 / \frac{P}{a^2}$
0	1,8215	2,0193	1,9206
$\frac{d_1}{4}$	1,8671	2,0045	1,9358
$\frac{d_1}{2}$	1,9912	2,0817	2,0364
$\frac{3}{4} d_1$	2,1486	2,2859	2,2172
$\frac{7}{8} d_1$	2,2089	2,3564	2,2826
d_1	2,2064	2,4048	2,3056
$a - d_3$	2,4332	2,5955	2,5143
$a - \frac{7}{8} d_3$	2,4298	2,5842	2,5070
$a - \frac{3}{4} d_3$	2,4165	2,5555	2,4860
$a - \frac{d_3}{2}$	2,3717	2,4782	2,4250
$a - \frac{d_3}{4}$	2,3043	2,4432	2,3738
a	2,2737	2,4360	2,3549

Здесь $\tilde{X}_z$ — нижняя граница касательного напряжения; $\bar{X}_z$ — верхняя граница, а $X_z^0 = \frac{\tilde{X}_z + \bar{X}_z}{2}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 27 V 1958

Ն. Օ. Գուլայան

ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՈՒՂՂԱՆԿՑՈՒՆ ԱՆՑՔՈՎ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է արտակենտրոն ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ծավալի խնդիրը:

Ներմուծելով օժանդակ ֆունկցիաներ, խնդիրը բերվում է գծային հավասարումների սխեմայի սխեմայի լուծմանը: Ապացուցվում է այդ սխեմաների լրիվ ռեզոլյուցիվությունը: Լարումների և ծավալի կենտրոնի կոորդինատների համար ստացված են բանաձևեր: Թվային հաշվումները կատարված են արտակենտրոն քառակուսի անցքով քառակուսի հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ծավալի խնդրի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян Б. Л.* ПММ, т. XIV, в. 3, 1950.
2. *Арутюнян Н. Х.* ДАН АрмССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. *Гринберг Г. А.* Изв. АН СССР, серия физическая, 1946, т. X, вып. 2.
5. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. ОТНИ, М., 1949.
6. *Уманский А. А.* Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. Оборонгиз, 1939.