

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем

Задача о кручении изотропного упругого стержня с поперечным сечением в виде узкой и длинной области была впервые поставлена Динкяном [1] и в дальнейшем математически обоснована Д. Ю. Пановым [2, 3].

В настоящей работе рассматривается задача кручения анизотропного стержня с узким и длинным сечением. Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра λ , введенного в уравнение контура области.

Обобщен метод, развитый в работе [3].

Исследован вопрос об асимптотической сходимости этого ряда. Для иллюстрации полученных результатов решены некоторые задачи.

1. Как известно [4], задача о кручении анизотропного стержня сводится к решению уравнения

$$a_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2v \quad (1.1)$$

с граничным условием $\Psi(x, y) = 0$ вдоль кривой

$$F(x, y) = 0,$$

ограничивающей поперечное сечение стержня.

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений, a_{ik} — упругие постоянные, v — относительный угол закручивания.

Рассмотрим область D , ограниченную двумя пересекающимися на оси x кривыми (фиг. 1).

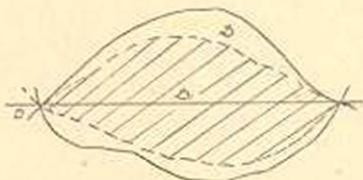
Область D_1 отличается от D только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении $1:\lambda$, где $0 < \lambda < 1$. Предполагается, что D и D_1 конечные односвязные области.

Пусть область, ограниченная двумя дугами кривых

$$\begin{aligned} y &= \lambda \varphi_1(x); \\ y &= \lambda \varphi_2(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

эквивалентна $F(x, y) = 0$.

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат к типу кривых, показанных на



Фиг. 1.

фиг. 1, и имеют необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x .

При помощи (1.2) граничное условие примет вид

$$\Psi [x, \lambda \varphi_1(x)] = 0, \quad (1.3)$$

$$\Psi [x, \lambda \varphi_2(x)] = 0.$$

Положим

$$y = \lambda \eta; \quad \Psi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda). \quad (1.4)$$

Имея в виду (1.4), преобразуя уравнение (1.1), находим

$$\lambda^2 \cdot a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = -2v\lambda^2. \quad (1.5)$$

Не трудно видеть, что граничные условия (1.3) можно представить так

$$\Phi [x, \varphi_1(x); \lambda] = 0, \quad (1.6)$$

$$\Phi [x, \varphi_2(x); \lambda] = 0.$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.5) в виде ряда по степеням λ :

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, \eta) \cdot \lambda^k. \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.6) при помощи (1.7) легко получаются

$$P_k [x, \varphi_1(x)] = 0; \quad (1.8)$$

$$P_k [x, \varphi_2(x)] = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя значения $\Phi(x, \eta; \lambda)$ из выражения (1.7) в дифференциальное уравнение (1.5), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ -2a_{12} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \eta^2} &= 0, \\ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2} &= -2v, \quad (1.9) \\ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial \eta^2} &= 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Из рекуррентных уравнений (1.9), при помощи (1.8), последовательно определяются функции $P_k(x, \eta)$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

$$P_0(x, \eta) \equiv 0,$$

$$P_1(x, \eta) \equiv 0,$$

$$P_2(x, \eta) = -\frac{\nu}{a_{22}} \{ \eta^2 - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \cdot \eta + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \}, \quad (1.10)$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{\nu a_{12}}{a_{22}^2} \cdot D_x(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \{ \eta^2 - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \cdot \eta + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \},$$

.....

где под символом D_x понимается частная производная по x . Последовательно определяя функции $P_k(x, \eta)$, можно записать выражение для $\Phi(x, \eta; \lambda)$, а следовательно и для функции $\Psi(x, y)$:

$$\Psi(x, y) = -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot \left\{ \frac{y^2}{\lambda^2} - (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{y}{\lambda} + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right\} \cdot \lambda^2 +$$

$$+ \frac{\nu \cdot a_{12}}{a_{22}^2} \cdot D_x(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left\{ \frac{y^2}{\lambda^2} - (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{y}{\lambda} + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right\} \cdot \lambda^2 + \dots$$

или

$$\Psi(x, y) = -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot y^2 + \lambda \cdot \left\{ \frac{\nu}{a_{22}} \cdot y \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{a_{12} \cdot \nu \cdot y^2}{a_{22}^2} \times \right.$$

$$\times D_x(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots \left. \right\} + \lambda^2 \cdot \left\{ -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \frac{\nu a_{12}}{a_{22}^2} \cdot y \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) \times \right.$$

$$\times D_x(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots \left. \right\} + \dots \quad (1.11)$$

Имея функцию напряжения $\Psi(x, y)$, можно определить касательные напряжения и жесткость стержня.

Полученные результаты значительно упрощаются, когда имеем симметричную область.

II. Случай симметричной области

Если область D_1 симметрична относительно оси x , то

$$\varphi_1(x) = -\varphi_2(x) = f(x).$$

Тогда

$$F(x, y) = y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0,$$

или

$$\eta = \pm f(x). \quad (2.1)$$

При таких условиях системы рекуррентных уравнений (1.10) упрощаются и примут вид:

$$P_0(x, \eta) = 0,$$

$$P_1 = 0,$$

$$P_2 = \frac{f^2 - \eta^2}{a_{22}},$$

$$P_3 = 0,$$

$$P_4 = (f^2 - \eta^2) \cdot \frac{a_{11}}{2a_{22}^2} \cdot D^2 f^2,$$

(2.2)

$$P_5 = \frac{\eta(f^2 - \eta^2)}{3a_{22}^3} \cdot a_{11}a_{22} \cdot D^2 f^2,$$

$$P_6 = (f^2 - \eta^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^2} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} D (f^2 D^3 f^2) \right] +$$

$$+ (f^4 - \eta^4) \cdot \left[D^4 f^2 \cdot \frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2 a_{22}}{24a_{22}^4} \right],$$

где

$$D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Имея значение $P_k(x, \eta)$, можем для симметричной области записать выражение функции напряжений

$$\Psi(x, y) = \frac{v(\lambda^2 f^2 - y^2)}{a_{22}} + \lambda^2 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}}{2a_{22}^2} D^2 f^2 + y \cdot \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^3} \times \right. \right.$$

$$\times D^3 f^2 \left. \right] + (\lambda^4 f^4 - y^4) \cdot \left[\frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2 a_{22}}{4!a_{22}^4} \cdot D^4 f^2 + y \times \right.$$

$$\times \frac{2a_{11}a_{12}^3 - a_{11}^2 a_{12} a_{22}}{5 \cdot 3!a_{22}^5} \cdot D^5 f^2 \left. \right] + (\lambda^6 f^6 - y^6) \cdot \frac{a_{11}^3 a_{22}^2 + 16a_{11}a_{12}^4 - 12a_{11}^2 a_{12}^2 a_{22}}{6!a_{22}^6} \cdot$$

$$\cdot D^6 f^2 + \dots \left. \right\} + \lambda^4 \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^3} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} \cdot D (f^2 D^3 f^2) \right] + \dots \right\} + \dots \quad (2.3)$$

Определим жесткость анизотропного упругого стержня при кручении

$$T = 2 \int_a^b \int_{-y}^{+y} \Psi(x, y) dx dy = \lambda^3 \cdot \frac{8v}{3a_{22}} \cdot \int_a^b f^3 dx + \lambda^6 \cdot \frac{4a_{11}v}{3a_{22}^3} \cdot \int_a^b f^3 D^3 f^2 dx +$$

$$+ \lambda^7 \cdot v \cdot \left\{ \frac{8}{3} \cdot \int_a^b f^3 \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^3} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} \cdot D (f^2 D^3 f^2) \right] dx + \right.$$

$$+ \frac{2}{15} \cdot \frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2a_{22}}{a_{22}^3} \cdot \int_a^b f^2 D^4 f^2 dx \} + 0 (\lambda^9),$$

или

$$T = \frac{v}{3a_{22}} \cdot \int_a^b t^3 dx + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}v}{6a_{22}^2} \cdot \int_a^b t^3 D^2 f^2 dx + \frac{\lambda^4 v}{3} \times \\ \times \int_a^b t^3 \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^2} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^3} \cdot D (f^2 D^3 f^2) \right] dx + \\ + \lambda^2 \cdot \frac{(4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2a_{22}) \cdot v}{240 \cdot a_{22}^4} \cdot \int_a^b t^3 D^4 f^2 dx + 0 (\lambda^9), \quad (2.4)$$

где

$$t = 2\lambda f(x).$$

Рассмотрим некоторые конкретные случаи.

1. *Стержень эллиптического сечения.* Пусть контур поперечного сечения (фиг. 2) задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (2.5)$$

Так как поперечное сечение представляет собой узкую, длинную область, то, естественно, как малый параметр взять отношение полуосей эллипса

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Тогда уравнение эллипса (2.5) можно записать так

$$y = \pm \lambda \cdot f(x), \quad (2.6)$$

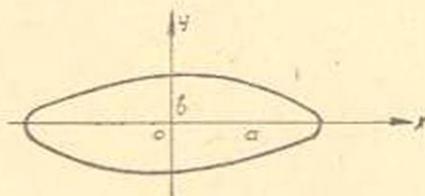
где $f^2(x) = a^2 - x^2$.

Из соотношений (2.6) и (2.3) легко получается выражение функции напряжений для анизотропного упругого стержня с эллиптическим поперечным сечением

$$\Psi(x, y) = \frac{v}{a_{22}} \cdot [\lambda^2 f^2(x) - y^2] \cdot \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} + \lambda^4 \frac{a_{11}^2}{a_{22}^2} - \lambda^6 \frac{a_{11}^3}{a_{22}^3} + \dots \right) \quad (2.7)$$

Так как малый параметр λ всегда удовлетворяет неравенству

$$\lambda^2 > -\frac{a_{22}}{a_{11}},$$



фиг. 2

то ряд (2.7) суммируется

$$\Psi(x, y) = \frac{\lambda^2 (a^2 - x^2) - y^2}{a_{22}} \cdot \frac{\nu}{1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}} \quad (2.8)$$

Жесткость эллиптического стержня определяется из (2.4) так

$$T = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \Psi(x, y) dx dy = \frac{\lambda^2 \pi a^4 \nu}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)} \quad (2.9)$$

При помощи (2.8) для компонент напряжений получаются следующие выражения

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = - \frac{2\nu y}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)}, \quad (2.10)$$

$$\tau_{yz} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{2\nu \lambda^2 x}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)}$$

2. Кручение анизотропного стержня (фиг. 3) трапециевидного поперечного сечения.

Уравнения линий AB и CD можно записать так

$$y = \pm \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2 - d_1}{2b} \cdot x \right)$$

или

$$y = \pm \frac{d_2}{b} \left(\frac{d_1 b}{2d_2} + \frac{d_2 - d_1}{2d_2} \cdot x \right). \quad (2.11)$$

Так как исследуются удлиненные профили, то отношение $\frac{d_2}{b}$ является

малой величиной $\left(0 < \frac{d_2}{b} < 1 \right)$.

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{d_2}{b}, \quad a = \frac{d_2 - d_1}{2d_2}, \quad c = \frac{bd_1}{2d_2}.$$

Имея ввиду эти обозначения, уравнения (2.11) можно представить так

$$y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0, \quad (2.12)$$

где

$$f^2(x) = (ax + c)^2.$$

Из выражения (2.3), при помощи уравнения (2.12), получим выражение функции напряжения при кручении для анизотропного стержня трапециoidalного поперечного сечения:

$$\Psi(x, y) = \frac{v [\lambda^2 (ax + c)^2 - y^2]}{a_{22}} \cdot \left(1 + \lambda^2 \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2 + \lambda^4 \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{22}^2} \cdot a^4 + \lambda^6 \cdot \frac{a_{11}^3}{a_{22}^3} \cdot a^6 + \dots \right). \quad (2.13)$$

Из выражения (2.13) видно, что

$$\Psi(x, y) = \frac{\lambda^2 (ax + c)^2 - y^2}{a_{22}} \cdot \frac{v}{1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2}, \quad (2.14)$$

если малый параметр λ удовлетворяет следующему неравенству

$$\lambda^2 < \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Имея функцию напряжения, определим жесткость рассматриваемого стержня

$$T = 2 \int_{a - \lambda(ax+c)}^{b + \lambda(ax+c)} \int \Psi(x, y) dx dy = \frac{2\lambda^2 [(ab+c)^4 - c^4] \cdot v}{3a_{22} \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2 \right)}$$

или

$$T = \frac{b}{12} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2 - d_1} \cdot \frac{v}{a_{22} a \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}, \quad (2.15)$$

где

$$a\lambda = \frac{d_2 - d_1}{2b} = k = \operatorname{tg} \beta.$$

Для компонент напряжений получаются следующие компактные выражения

$$\tau_{xz} = \frac{2vy}{a_{22} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}, \quad (2.16)$$

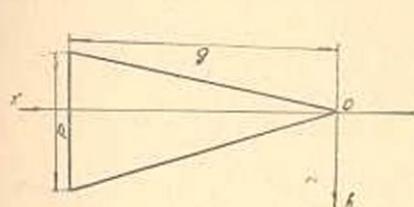
$$\tau_{yz} = \frac{2k^2 v \cdot (ax + c)}{a a_{22} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}.$$

3. Кручение стержня треугольного сечения (фиг. 4). Настоящая задача является частным случаем предыдущей, т. е. $d_1 = 0$, $d_2 = d$,

будем иметь

$$\lambda = \frac{d}{b}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad c = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.17), из (2.14)–(2.16) находим



Фиг. 4.

$$\Psi(x, y) = \frac{\left(\lambda^2 \cdot \frac{x^2}{4} - y^2\right) \cdot v}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2vy}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$\tau_{yz} = \frac{\lambda^2 vx}{2a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$T = \frac{bd^3}{12} \cdot \frac{v}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]}.$$

4. *Авиационный профиль (фиг. 5).* Пусть сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол

$$y = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{x}{b} \cdot (b-x)}, \quad (2.18)$$

где

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot h.$$

Пусть $\lambda = \frac{h}{b}$ является малой величиной.

Тогда уравнение (2.18) можно написать в более удобном виде

$$y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0, \quad (2.19)$$

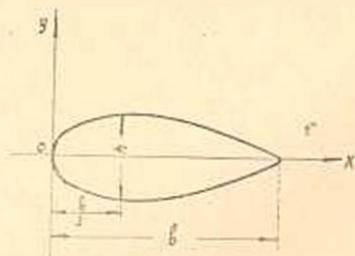
где

$$f^2(x) = cx(b-x)^2, \quad c = \frac{27}{16b}.$$

Имея в виду (2.19) можно выражение (2.3), после некоторых элементарных действий, представить так

$$\Psi(x, y) = \frac{v(\lambda^2 f^2 - y^2)}{a_{22}} + \lambda^2 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}^2} \cdot c(3x - 2b) + \right.$$

$$\left. + y(\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \frac{2ca_{11}a_{12}}{a_{22}^3} + \dots \right\} + \lambda^4 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{a_{22}^3} \cdot c^2 \times \right. \right.$$



Фиг. 5.

$$\begin{aligned}
& \times (18x^2 - 24bx + 7b^2) - \frac{2a_{11}a_{12}^2 \cdot c^2}{a_{22}^4} \cdot (3x^2 - 4bx + b^2) \Big] + y(\lambda^2 f^2 - y^2) \times \\
& \times \left[\frac{4c^2(a_{11}^2 a_{12} a_{22} - 4a_{11} a_{12}^3)}{3! a_{22}^5} + \frac{8c^2 a_{11}^2 a_{12}}{a_{22}^4} \cdot (3x - 2b) \right] + \\
& + (\lambda^4 f^4 - y^4) \cdot \left[\frac{3c^2(4a_{11}^2 a_{12}^2 - a_{11}^3 a_{22})}{a_{22}^5} + \frac{2c^2(a_{22} a_{11}^2 a_{12}^2 - 2a_{11} a_{12}^4)}{a_{22}^6} \right] + \dots \\
& \dots \Big\} + \lambda^6 \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^3 c^3}{a_{22}^4} \cdot (180x^3 - 360bx^2 + 219b^2x - 38b^3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{12c^3 a_{11}^2 a_{12}^2}{a_{22}^5} \cdot (5x^3 - 10bx^2 + 6b^2x - b^3) - 24c^3 \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left(\frac{a_{11}^2 a_{12}^2 a_{22} - 4a_{11} a_{12}^4}{3 \cdot 3! a_{22}^6} + \frac{4a_{11}^2 a_{12}^2}{3! a_{22}^5} \right) (6x^3 - 12bx^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 7b^2x - b^3) \right] + \dots \right\} + \dots \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Для жесткости рассматриваемого стержня получаем выражение:

$$T = 0,162 \cdot \frac{bh^3}{a_{22}} \cdot \left(1 - 1,428 \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot \lambda^2 + 0,565 \frac{a_{11} a_{12}}{a_{22}^2} \cdot \lambda^3 - \dots \right). \quad (2.21)$$

Если принять, $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, т. е. рассматривать изотропный стержень, то для жесткости из (2.21) получается хорошо известное выражение

$$T = 0,162bh^3 \left(1 - 1,428 \cdot \frac{h^2}{b^2} - 6,352 \cdot \frac{h^4}{b^4} - \dots \right).$$

Здесь существенен вопрос сходимости ряда (2.21).

Исследуем асимптотическую сходимость ряда (1.11), который является более общим. С этой целью обобщим результаты Д. Ю. Панова [2] для нашего случая.

III. Доказательство сходимости ряда (1.11)

Распространим основную теорему о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина на уравнение (1.1).

Теорема. Дано уравнение (1.1) в области

$$L(\Psi) + 2v = 0, \quad (3.1)$$

где

$$L(\Psi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$a_{12} = a_{21}, \quad x_1 = x_2, \quad x_2 = y.$$

Дана некоторая функция $V(x, y)$, которая внутри области D имеет конечные, непрерывные частные производные и конечные вторые производные, а на границах области, всюду равняется искомому интегралу $\Psi(x, y)$ уравнения (3.1), который должен обладать, в той же степени, свойствами непрерывности.

Функция $V(x, y)$ будет нижней границей интеграла для внутренних точек области, если результат ее подстановки в уравнение (3.1) всюду положителен, т. е.

$$L(V) + 2v > 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Из (3.1) и (3.2) получается неравенство

$$L(V - \Psi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial^2 (V - \Psi)}{\partial x_i \partial x_k} > 0. \quad (3.3)$$

Составим скалярное произведение

$$((V - \Psi), -L(V - \Psi)) = - \iint_{\Omega} (V - \Psi) \cdot L(V - \Psi) d\Omega. \quad (3.4)$$

Для выражения (3.4) применим вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} ((V - \Psi), -L(V - \Psi)) &= \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_i} \times \\ &\times \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_k} d\Omega - \int_s (V - \Psi) \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_k} \times \\ &\times \cos(\nu, \hat{x}_i) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь (ν, \hat{x}_i) — угол между осью ox_i и внешней нормалью данного замкнутого контура.

Контурный интеграл, стоящий в выражении (3.5), есть нуль по условию $V - \Psi = 0$ на границах. Следовательно, выражение (3.5) примет следующий вид

$$\begin{aligned} ((V - \Psi), -L(V - \Psi)) &= \iint_{\Omega} \left\{ a_{11} \cdot \left[\frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x} \right]^2 - 2a_{12} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x} \times \right. \\ &\times \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial y} + a_{22} \cdot \left[\frac{\partial (V - \Psi)}{\partial y} \right]^2 \left. \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Известно [4], что для упругих постоянных материала стержня имеются такие условия

$$a_{11} > 0 \quad (3.7)$$

$$a_{22} > 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (3.8)$$

Обозначим через \bar{g} следующую квадратичную форму от двух неизвестных $\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x}$, $\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \bar{g} = a_{11} \left[\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x} \right]^2 - 2a_{12} \cdot \frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y} + \\ + a_{22} \cdot \left[\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При помощи (3.9) выражение (3.6) можно записать так

$$((V-\Psi), -L(V-\Psi)) = \int_{\Omega} \int \bar{g} d\Omega. \quad (3.10)$$

Если иметь в виду условия (3.7) и (3.8), то очевидно, что квадратичная форма будет положительно определенной, т. е. $\bar{g} > 0$. Тогда, правая часть выражения (3.10) будет существенно положительна. Следовательно

$$((V-\Psi), -L(V-\Psi)) > 0.$$

Учитывая (3.3) находим, что $V-\Psi$ не может быть всюду положительно. Итак, относительно функции $V-\Psi$ можем делать два предположения: или 1) $V-\Psi < 0$ внутри области, или 2) поперечное сечение разбивается на части, из которых в некоторых частях имеет место $V-\Psi < 0$, а в других частях имеет место $V-\Psi > 0$.

Не трудно видеть, что второе предположение приводит к противоречию. Таким образом находим

$$V-\Psi < 0,$$

или

$$V < \Psi.$$

Аналогично доказывается, что для U —верхней границы интеграла, имеет место следующее неравенство для внутренних точек области D

$$\Psi < U.$$

Итак, получается

$$V < \Psi < U.$$

Теорема доказана.

В частном случае, если положить, что $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ получается теорема, доказанная иным методом академиком С. А. Чаплыгиным [5].

Лемма. Если $\Psi(x, y)$ обращается в нуль на границе области D и удовлетворяет внутри нее уравнению

$$L(\Psi) = -2v,$$

то для любой функции $F(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$L(F) = f(x, y)$$

в области $D_1 \in D$ и обращающейся в нуль на границе области D , имеем

$$|F(x, y)| < |\Psi(x, y)|$$

внутри и на границе D_1 , если только $|f(x, y)| < 2v$ в этой области и на ее границе.

Доказательство. На основании доказанной выше теоремы имеем $\Psi(x, y) > 0$ внутри D , а значит и на границе D_1 .

Построим вспомогательную функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом

- 1) $L(\Phi) + 2v = 0$;
- 2) $\Phi(x, y) = 0$ на границе D_1 .

Легко заметить, что

$$\Phi(x, y) < \Psi(x, y) \text{ внутри и на границе } D_1.$$

Обозначим через $\Phi_1(x, y)$ следующее выражение

$$\Phi_1(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= 0 \text{ на границе } D_1 \text{ и} \\ L(\Phi_1) &= f(x, y) + 2v > 0. \end{aligned}$$

Еще раз применяя теорему, находим

$$\Phi_1(x, y) < 0 \text{ внутри } D_1.$$

А это значит

$$F(x, y) < \Phi(x, y) < \Psi(x, y),$$

или

$$F(x, y) < \Psi(x, y).$$

Аналогично получается

$$F(x, y) > -\Psi(x, y).$$

Следовательно

$$|F(x, y)| < |\Psi(x, y)| \text{ внутри и на границе } D_1.$$

Теперь докажем сходимость ряда (1.11). Изучаем решение нашей задачи как функции λ .

Образуем разность

$$\begin{aligned} \rho_n(x, y; \lambda) &= \Psi(x, y) - \rho_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda \rho_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^2 \rho_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \dots - \\ &\quad - \lambda^n \rho_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Составим выражения

$$R_n(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

Подставляя значения p_n из (3.11) в (3.12), имея в виду уравнения (1.9), после некоторых элементарных действий, получим

$$R_n(x, y; \lambda) = -\lambda^{-1} \cdot \left\{ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x \partial \eta} \right\} - \lambda^n \cdot a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

Оценим выражения (3.13)

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{-1} \cdot \left| D_{xx}^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| \cdot a_{11} + 2\lambda^{n-1} \cdot a_{12} \times \\ \times \left| D_{xy}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| + \lambda^n \cdot a_{11} \cdot \left| D_{xx}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (3.14)$$

Эти множители, рассматриваемые как функции x , суть функции регулярные внутри и на границе D_1 , а как функции η — просто, многочлены. Во всяком случае, мы будем иметь в области D_1

$$\left| D_{xx}^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = |D_{xx}^2 P_{n-1}(x, \eta)| < p_{n-1},$$

$$\left| D_{xy}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = \lambda \cdot |D_{xy}^2 P_n(x, \eta)|,$$

$$|D_{xy}^2 P_n(x, \eta)| < q_n,$$

$$\left| D_{xx}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = |D_{xx}^2 P_n(x, \eta)| < p_n.$$

Тогда неравенство (3.14) примет вид

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{-1} \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) \cdot a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]. \quad (3.15)$$

Теперь применим доказанную выше лемму. Пусть эллипс с полуосями a и b содержит внутри себя область D . Функция напряжения для этой области согласно (2.8) будет удовлетворять неравенству

$$\Psi(x, y) = \frac{a^2 b^2 v}{a^2 a_{22} + b^2 a_{11}} \cdot \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} < \frac{a^2 b^2 v}{a^2 a_{22} + b^2 a_{11}}.$$

Очевидно, что можно подобрать эллипс с полуосями a и λb , который будет содержать область D_1 (фиг. 6). Тогда функция напряжения для D_1 будет удовлетворять неравенству

$$\Psi(x, y) < \frac{a^2 b^2 \lambda^2 v}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}}. \quad (3.16)$$

Применяя лемму, из неравенства (3.15), при помощи (3.16), будем иметь

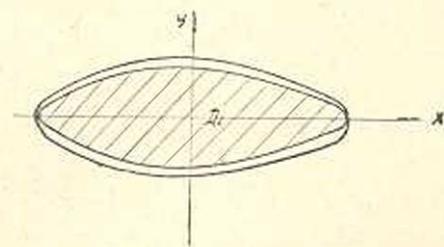
$$| \rho_n(x, y; \lambda) | < \lambda^{n+1} \cdot \frac{a^2 b^2 \cdot v \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) \cdot a_{11} + 2\lambda \cdot a_{12} q_n]}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}} \quad (3.17)$$

$$(n \geq 2)$$

Для $n = 0$ оценка из (3.17) не получается, но ее легко можно получить следующим образом.

$$\text{Имеем} \quad \rho_0(x, y; \lambda) = \Psi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) = \Psi(x, y),$$

откуда



Фиг. 6.

$$R_0(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y^2} = -2v.$$

Применяя лемму, находим

$$| \rho_0(x, y; \lambda) | < \frac{2a^2 b^2 \lambda^2 v^2}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}} \quad (3.18)$$

Аналогично и для случая $n = 1$.

Таким образом полученные оценки (3.17) и (3.18) решают вопрос об асимптотической сходимости ряда (1.11), так как из них следует: при $\lambda \rightarrow 0$ для любого n $\rho_n(x, y; \lambda) \rightarrow 0$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 2 XII 1958

Վ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՊՐԻՉՄԱՅԱՋԵՎ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է երկարացված պրոֆիլներով անկողարոպ պրիզմայաձև ձողերի ոլորման խնդիրը:

Լուծումը ներկայացված է շարքով ըստ փոքր λ պարամետրի: Հետազոտված է լուծման ասիմպտոտիկ զուգամիասնությունը: Ընդհանրացված է Գ. Յու. Պանոֆի [2, 3] մեթոդը: Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Duncan W. I. Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes, R. & M. № 1414 (1932).
2. Панов Д. Ю. Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. Изв. АН СССР, серия математическая, М., 1937.

3. *Панов Д. Ю.* Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН, Новая серия, т. III (VIII), № 12 (62), 1935, стр. 63—66.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.
5. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.