

А. А. Талалян

О представлении измеримых функций рядами

§ 1. Известно [1], что если последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на ограниченном измеримом множестве G положительной меры, образует нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, то для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на G , существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на множестве G к $f(x)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

В связи с этим естественно возникает вопрос:

Какие последовательности функций $\{f_n(x)\}$, кроме базисов пространства L_p , обладают тем свойством, что любая измеримая функция $f(x)$ представляется в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (a_n — \text{действительные числа}),$$

который сходится к этой функции по мере.

Чтобы сформулировать теорему, доказанную в настоящей работе, введем следующие определения.

Определение 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, называется полной в смысле сходимости по мере, если для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, существует последовательность конечных линейных комбинаций функций системы $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ по мере на $[a, b]$.

Определение 2. Мы будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, асимптотически ортогональна, если для любого $\varepsilon > 0$ можно определить N такое, что для любых целых $n > N$, $m > N$, $n \neq m$, функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ ортогональны на некотором множестве $E_{n,m}$, мера которого больше, чем $b - a - \varepsilon$, т. е.

$$\int_{E_{m,n}} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \text{mes } E_{m,n} > b - a - \varepsilon.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полна в смысле сходимости по мере и пусть функции этой последовательности линейно независимы на любом измеримом множестве E меры $\text{mes } E > a_0 > 0$, где $a_0 < b - a$ — некоторое фиксированное число. Тогда можно определить последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, обладающую следующими свойствами:

1. Каждая функция $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и, наоборот, $f_n(x)$ $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{n,k} f_k(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

2) Система $\{\varphi_n(x)\}$ асимптотически ортогональна.

3) Для любой измеримой функции $f(x)^*$, определенной на $[a, b]$, существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится к $f(x)$ по мере на $[a, b]$.

Заметим, что в теореме 1 требование асимптотической ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ нельзя заменить более сильным требованием ортогональности этой системы на $[a, b]$ в обычном смысле даже тогда, когда функции последовательности $\{f_n(x)\}$ интегрируемы с квадратом.

В самом деле. В работе [2] была построена ортогональная и нормированная система $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$ и обладающих тем свойством, что

$$f_n(x) = b_{n-1} x^{n-1} \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где b_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ отличные от нуля действительные числа.

Так как система $x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+k}, \dots$ для любого фиксированного n полна в пространстве $L_2[0, 1]$, то система $\{f_n(x)\}$ будет полной в смысле сходимости в среднем второй степени на любом отрезке

$$\left[\frac{1}{n}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует полнота системы $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости по мере на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, что $\{f_n(x)\}$ будет линейно независимой на любом множестве меры большей, чем $1/2$.

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

В силу того, что система $\{f_n(x)\}$ ортогональна и нормирована, легко видеть, что если $\{\varphi_n(x)\}$ произвольная система, удовлетворяющая условию 1) теоремы 1 и ортогональная на $[0,1]$, то каждая функция $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ получается из функции $f_k(x)$ умножением на постоянное число.

Теперь можно показать, что ни одна из систем $\{\varphi_n(x)\}$ указанного вида не будет удовлетворять условию 3) теоремы 1.

В самом деле, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

сходится по мере на $[0,1]$ к $f(x)$, то в силу (1) на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ та же самая функция будет представляться степенным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (3)$$

сходящимся к ней по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. В том случае, когда функция $f(x)$ почти везде конечна, из того, что ряд (3) сходится по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ к $f(x)$, будет следовать стремление к нулю по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ последовательности $\{c_n x^n\}$. Тогда для любого x_0 , $1/2 < x_0 < 1$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0, \quad (4)$$

ибо в обратном случае для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и некоторой последовательности $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ имели бы место неравенства

$$|c_{n_k} x^{n_k}| > \varepsilon_0, \quad x \in [x_0, 1], \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Но из (4) следует, что ряд (3) сходится при $|x| < 1$ к аналитической функции, и тогда $f(x)$ почти всюду на $[1/2, 1]$ будет совпадать с некоторой аналитической функцией. Отсюда следует, что для рассматриваемых систем $\{\varphi_n(x)\}$ условие 3) теоремы 1 не будет выполняться.

§ 2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сформулированной в § 1, приведем некоторые определения и теоремы работы [2].

Определение 1°. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, называется полной в смысле сходимости почти всюду, если для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, существует последовательность конечных линейных комбинаций функций системы $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Очевидно, что это определение эквивалентно определению 1 параграфа 1, т. е. из полноты системы $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости почти всюду следует полнота этой системы в смысле сходимости по мере, и, наоборот.

Мы будем пользоваться также следующими теоремами, доказанными в работе [2].

Теорема 1°. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полна в смысле сходимости почти всюду, то она остается полной в смысле сходимости почти всюду также после удаления из этой системы любого конечного числа функций.

Теорема 2°. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, была полной в смысле сходимости почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало множество E такое, что $\text{mes } E > b - a - \varepsilon$ и система $\{f_n(x)\}$ полна в пространстве $L_2(E)$.

В силу замечания, сделанного после определения 1°, ясно, что в теоремах 1° и 2° предположение полноты $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости почти всюду можно заменить предположением полноты в смысле сходимости по мере.

§ 3. В этом параграфе мы приведем доказательство теоремы 1 см. § 1).

При доказательстве мы будем пользоваться теоремами 1° и 2° и следующей леммой, являющейся частным случаем более общей леммы, доказанной в работе [1] (см. лемму 2, [1]).

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ О. Н.* система функций, определенных на ограниченном множестве G положительной меры, полная в $L_2(G)$. Пусть $f(x) \in L_2(G)$ и $f(x) = 0$ при $x \in E_0 \subset G$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $F(x) \in L_2(G)$ и множество e_0 , такие, что выполняются следующие условия:

а) $F(x) = 0$ при $x \in e_0$, где $e_0 \subset E_0$, $\text{mes } e_0 < \varepsilon$,

б) $\left| \int_G |f(x) - F(x)| \varphi_k(x) dx \right| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots,$

в) $\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_e = \left(\int_e \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n = 1, 2, \dots,$

для любого $e \subset G - e_0$, где

$$a_k = \int_G |f(x) - F(x)| \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что из этой леммы непосредственно следует

* Через О. Н. мы обозначаем ортогональные и нормированные системы.

** В частности множество E_0 может быть пустым или иметь меру нуль.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ О. Н. система функций, определенных на ограниченном множестве G положительной меры, полная в $L_2(G)$, и пусть $f(x) \in L_2(G)$.

Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n , можно определить множество $e_0 \subset G$ и действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$, такие, что выполняются условия:

$$1. \text{mes } e_0 < \varepsilon,$$

$$2. |a_k| < \varepsilon, \quad n+1 \leq k \leq m,$$

$$3. \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \varepsilon,$$

$$4. \left\| \sum_{k=n+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m,$$

где e произвольное измеримое подмножество множества $G - e_0$.

В самом деле. Пусть n фиксированное натуральное число. Возьмем в формулировке леммы 1 $\eta > 0$ вместо ε и определим функцию $F(x) \in L_2(G)$ и множество e_0 , для которых выполняются условия $\alpha)$, $\beta)$ и $\gamma)$, где вместо ε взято η . Так как n фиксированное число, то в силу $\beta)$ мы можем взять η настолько малым, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_G \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.1)$$

Одновременно мы можем предполагать, что

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Так как в силу $\alpha)$

$$f(x) - F(x) = f(x), \quad x \in G - e_0, \quad (3.3)$$

то разложение функции $f(x) - F(x)$ в силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ будет сходиться в среднем на множестве $G - e_0$ к $f(x)$. Следовательно, существует натуральное число m настолько большое, что

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4)$$

При этом мы можем предполагать, что

$$m > n. \quad (3.5)$$

Из (3.1) и (3.4) следует

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \varepsilon, \quad (5.5)$$

а в силу условия γ), где $\varepsilon = \eta$, и неравенств (3.1) и (3.2) будем иметь также

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m, \quad (3.6)$$

где e произвольное измеримое подмножество множества $G - e_0$.

Условия 3 и 4 леммы 2 совпадают соответственно с неравенствами (3.6) и (3.5).

Условия 1 и 2 вытекают из α) и β), где вместо ε взято η , и из неравенства (3.2). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Перенумеруем полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (3.7)$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, таких, что

$$a_0 < b - a - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty, \quad (3.9)$$

где a_0 число, фигурирующее в формулировке теоремы 1.

Так как система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости по мере, то в силу теоремы 2° (см. также замечание после теоремы 2°) существует множество $E_1 \subset [a, b]$, такое, что

$$\text{mes } E_1 > b - a - \frac{\varepsilon_1}{4} \quad (3.10)$$

и на E_1 система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле L_2 .

По предположению, сделанному в формулировке теоремы 1, а также в силу первого неравенства (3.8) и неравенства (3.10), функции системы $\{f_n(x)\}$ линейно независимы на множестве E_1 . Поэтому, ортогонализируя и нормируя эту систему на множестве E_1 , мы получим систему $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$ и обладающих следующими свойствами:

а) каждая функция $\varphi_n^{(1)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и, наоборот, $f_n(x)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_1^{(1)}(x), \dots, \varphi_n^{(1)}(x)$

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n c_{n,k}^{(1)} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n d_{n,k}^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

в) функции $\varphi_n^{(1)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ на множестве E_1 образуют полную в смысле L_2 О. Н. систему:

$$\int_{E_1} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m, \end{cases} \quad (3.12)$$

Применяя лемму 2 к системе $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$, когда $f(x) = P_1(x)$, $n = 0$ и $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{4}$, мы можем определить числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}$ и множество $e_1 \subset E_1$, такие, что выполняются условия

$$1. \text{mes } e_1 < \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad (3.13)$$

$$2. \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) - P_1(x) \right\|_{(E_1 - e_1)} < \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad (3.14)$$

$$3. \left\| \sum_{k=1}^s a_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) \right\|_e \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + 2 \|P_1(x)\|_e \quad (3.15)$$

для всех $1 \leq s \leq n$ и для любого множества e , $e \subset E_1 - e_1$.

Теперь рассмотрим последовательность

$$\varphi_{n_1+1}^{(1)}(x), \varphi_{n_1+2}^{(1)}(x), \dots, \varphi_{n_2+k}^{(1)}(x), \dots \quad (3.16)$$

которая остается из последовательности $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$ после исключения первых n_1 функций.

Для последовательности (3.16) выполняются предположения теоремы 1, т. е. она полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 .

В самом деле. Из условия а) непосредственно следует, что система $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(1)}(x), \dots, \varphi_n^{(1)}(x), \dots$ полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 , так как этими свойствами обладает система $\{f_n(x)\}$. Остается заметить, что в силу теоремы 1° система (3.16) будет полной в смысле сходимости по мере (см. также замечание после теоремы 2°).

Предположим, что мы уже определили действительные числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, a_{n_j}^{(j)}$, множества $E_1, E_2, \dots, E_j, e_1, e_2, \dots, e_j$ и последовательность функций

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}, \dots, \varphi_{n_{j-2}+1}^{(j-1)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}}^{(j-1)}, \varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, \\ &\dots, \varphi_{n_j}^{(j)}, \varphi_{n_j+1}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_{j+k}}^{(j)}, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

для которых выполняются следующие условия.

А) Для любого i , $1 \leq i \leq j$ имеют место соотношения

$$\text{mes } E_i > b - a - \frac{\varepsilon_i}{4} \quad (3.19)$$

$$e_i \subset E_i, \text{mes } e_i < \frac{\varepsilon_i}{4} \quad (3.20)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x) - P_i(x) \right\|_{(E_i - e_i)} < \frac{\varepsilon_i}{2} \quad (3.21)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{i-1}+1}^s a_k^{(i)} \varphi_k^{(j)}(x) \right\|_e \leq \frac{\varepsilon_i}{2} + 2 \|P_i(x)\|_e \quad (3.22)$$

для всех s , $n_{i-1} + 1 \leq s \leq n_i^*$ и любого множества e , $e \subset E_i - e_i$.

В) Функции системы (3.18) с одинаковым верхним индексом i ортогональны и нормированы на множестве E_i и ортогональны всем следующим функциям на том же множестве:

$$\int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(i)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}; \quad \int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(j)} dx = 0 \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq j-1 \\ i \leq s \leq j \end{matrix} \quad (3.23)$$

$$\int_{E_j} \varphi_n^{(j)} \varphi_m^{(j)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (3.24)$$

С) Последовательность

$$\varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \varphi_{n_{j-1}+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}+k}^{(j)}, \dots \quad (3.25)$$

удовлетворяет предположениям теоремы 1, т. е. полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем $a_0 > 0$.

Д) Обозначая последовательность (3.18) через

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots \quad (3.26)$$

будем иметь

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{nk} \psi_k(x). \quad (3.27)$$

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_{n_j+1}^{(j)}, \varphi_{n_j+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j)}, \dots \quad (3.28)$$

которая получается из (3.25) после исключения из нее функций $\varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \varphi_{n_{j-1}+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}$, которые удовлетворяют соотношениям (3.19), ..., (3.22), где $i = j$.

* Мы полагаем $n_0 = 0$.

В силу свойств С) и теоремы 1° последовательность (3.28) полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 .

Применяя теорему 2°, мы можем определить множество E_{j+1} такое, что

$$\text{mes } E_{j+1} > b - a - \frac{\varepsilon_{j+1}}{4} \quad (3.29)$$

и последовательность (3.28) полна на этом множестве в смысле L_2 .

В силу неравенства (3.8) последовательность (3.28) будет также линейно независимой на множестве E_{j+1} .

Ортогонализируя и нормируя эту последовательность на множестве E_{j+1} , мы получаем последовательность функций

$$\varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \varphi_{n_j+2}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j+1)}, \dots \quad (3.30)$$

определенных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \varphi_n^{(j+1)} &= \sum_{k=n_j+1}^n c_{n,k}^{(j+1)} \varphi_k^{(j)}; \\ \varphi_n^{(j)} &= \sum_{k=n_j+1}^n d_{n,k}^{(j+1)} \varphi_k^{(j+1)}, \quad n \geq n_j + 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

в) функции (3.30) образуют полную на множестве E_{j+1} О. Н. систему:

$$\int_{E_{j+1}} \varphi_m^{(j+1)} \varphi_n^{(j+1)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (3.32)$$

Применяя лемму 2 к системе (3.30), когда $f(x) = P_{j+1}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}$, мы можем определить числа $a_{n_j+1}^{(j+1)}, \dots, a_{n_j+1}^{(j+1)}$ и множество $e_{j+1} \subset E_{j+1}$ так, что будут выполняться соотношения (3.19), ..., (3.22), где $i = j + 1$.

Таким образом, последовательность функций

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(i)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}, \varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \dots, \\ \dots, \varphi_{n_{j+1}}^{(j+1)}, \varphi_{n_{j+1}+1}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_{j+1}+k}^{(j+1)}, \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

удовлетворяет условиям (3.19), ..., (3.22), где $1 \leq i \leq j + 1$.

Легко видеть, что последовательность (3.33) удовлетворяет также условиям В), С) и Д).

В самом деле. Условие В) непосредственно следует из (3.23), (3.24) первого равенства (3.31) и из (3.32).

Условие С) для последовательности

$$\varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \varphi_{n_j+2}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j+1)}, \dots \quad (3.34)$$

непосредственно следует из (3.31) и из свойства С) для последовательности (3.25), так как, в силу теоремы 1°, свойством С) будет обладать также последовательность

$$\varphi_{n_j+1}^{(j)}, \varphi_{n_j+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j)}, \dots \quad (3.35)$$

Выполнение свойства Д) для последовательности (3.33) следует из (3.27) и (3.31).

Так как свойства А), Б), С), Д) выполняются для $j=1$, то, продолжая вышеописанный процесс неограниченно, мы получаем последовательность

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x), \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}(x), \varphi_{n_1+1}^{(2)}(x), \dots, \varphi_{n_2}^{(2)}(x), \dots \\ \dots, \varphi_{n_{i-1}+1}^{(i)}(x), \dots, \varphi_{n_i}^{(i)}(x), \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, действительных чисел

$$a_1^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_{i-1}+1}^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, \dots$$

и последовательность множеств $\{E_i\}$ и $\{e_i\}$, такие, что для любого $i=1, 2, \dots$ выполняются неравенства (3.19), ..., (3.22) и, кроме того, имеют место также условия

A₁) функции системы (3.36) с одинаковым верхним индексом i ортогональны и нормированы на множестве E_i и ортогональны всем следующим функциям на том же множестве:

$$\int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(i)} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}, \int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(j)} dx = 0 \text{ для всех } i < j \text{ и } (3.37) \\ n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots;$$

B₁) Обозначая последовательность (3.36) через

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (3.38)$$

будем иметь

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{n,k} f_k(x), f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.39)$$

Из соотношений (3.37) и из неравенства (3.19) вытекает, что последовательность (3.38) асимптотически ортогональна.

Принимая во внимание также условие (3.39), мы видим, что последовательность (3.38) удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 нам надо доказать, что последователь-

ность (3.39) удовлетворяет также условию 3) этой теоремы, т. е., для любой измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Напишем последовательность чисел

$$a_1^{(1)} a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_{i-1}}^{(i)}, a_{n_i}^{(i)}, \dots$$

в виде последовательности $\{a_n\}$, где числа a_n следуют по порядку их следования в первоначальной последовательности.

Условия (3.19), (3.22) системы (3.37), для системы (3.38), можно сформулировать следующим образом.

Существуют последовательности действительных чисел $\{a_k\}$, целых положительных чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < \dots$ и последовательности множеств $\{E_k\}$ и $\{e_k\}$ такие, что

$$\text{mes } E_k > b - a - \frac{\varepsilon_k}{4} \quad (3.40)$$

$$e_k \subset E_k, \text{mes } I_k < \frac{\varepsilon_k}{4} \quad (3.41)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i \varphi_i(x) - P_k(x) \right\|_{(E_k - e_k)} < \frac{\varepsilon_k}{2} \quad (3.42)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^s a_i \varphi_i(x) \right\|_e < \varepsilon_k + 2 \|P_k(x)\|_e \quad (3.43)$$

для всех s , где $n_{k-1} + 1 \leq s \leq n_k$, и для любого множества e , где $e \subset E_k - e_k$.

Пусть теперь $f(x)$ произвольная почти везде конечная измеримая функция, заданная на $[a, b]$.

Возьмем полином с рациональными коэффициентами $P_k(x)$ так, чтобы

$$\|P_k(x) - f(x)\|_{E_1} < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

где

$$\text{mes } E_1 > b - a - \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Так как $\varepsilon_k < \varepsilon_1$ [см. (3.8)], то, полагая $A_1 = E_1 \setminus (E_{k_1} - e_{k_1})$ в силу (3.40), (3.41) (3.42), где $k = k_1$, будем иметь

$$\text{mes } A_1 > b - a - \varepsilon_1 \quad (3.44)$$

и

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_1} < \varepsilon_1. \quad (3.45)$$

Кроме того, в силу (3.43) имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_1} \leq \varepsilon_{k_1} + 2 \|P_{k_1}(x)\|_{A_1}, \quad n_{k_1-1} < n \leq n_{k_1}. \quad (3.46)$$

После этого возьмем полином $P_{k_2}(x)$, $k_2 > k_1$ и множество E'_2 , такие, что

$$\text{mes } E'_2 > b - a - \frac{\varepsilon_2}{2}$$

и

$$\left\| P_{k_2}(x) - \left[f(x) - \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) \right] \right\|_{E'_2} < \frac{\varepsilon_2}{3}. \quad (3.47)$$

Так как $\varepsilon_{k_1} < \varepsilon_2$, то, полагая $A_2 = E'_2(E_{k_1} - \varepsilon_{k_1})$, в силу (3.40), (3.41), (3.42), где $k = k_2$, будем иметь

$$\text{mes } A_2 > b - a - \varepsilon_2, \quad (3.48)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_2} \leq \varepsilon_2. \quad (3.49)$$

В силу (3.43), где $k = k_2$, и в силу того, что $A_2 \subset (E_{k_2} - \varepsilon_{k_2})$, для любого измеримого множества $e \subset A_2$ будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_e \leq \varepsilon_{k_2} + 2 \|P_{k_2}(x)\|_e, \quad n_{k_2-1} + 1 < n < n_{k_2}. \quad (3.50)$$

Из (3.45) и (3.47) следует

$$\|P_{k_2}(x)\|_{A_1 E'_2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (3.51)$$

а из (3.51) и (3.50), когда $e = A_1 A_2$, учитывая, что $A_2 \subset E'_2$, получаем

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_1 A_2} < \varepsilon_{k_2} + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (3.52)$$

где

$$n_{k_2-1} + 1 \leq n < n_{k_2}. \quad (3.53)$$

Из (3.44) и (3.48) следует

$$\text{mes } A_1 A_2 > b - a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Далее, существуют полином $P_{k_3}(x)$, $k_3 > k_2$ и множество E'_3 такие, что

$$\text{mes } E'_3 > b - a - \frac{\varepsilon_3}{2},$$

$$\left\| P_{k_3}(x) - \left[f(x) - \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) - \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) \right] \right\|_{E'_3} < \varepsilon_3. \quad (3.54)$$

Положим

$$A_3 = E'_3(E_{k_3} - e_{k_3}). \quad (3.55)$$

Так как $\varepsilon_{k_3} < \varepsilon_3$ [см. (3.8)], то в силу (3.40), (3.41), когда $k = k_3$, будем иметь

$$\text{mes } A_3 > b - a - \varepsilon_3. \quad (3.56)$$

Из (3.55), (3.54) и из (3.42), где $k = k_3$, следует

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_3} < \varepsilon_3 + \varepsilon_{k_3}. \end{aligned}$$

В силу (3.43) для любого множества e , $e \subset E_{k_3} - e_{k_3}$, а следовательно и для любого множества $e \subset A_3$ будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_e \leq \varepsilon_{k_3} + 2 \|P_{k_3}(x)\|_e; \quad n_{k_3-1} + 1 \leq n \leq n_{k_3}. \quad (3.57)$$

Из (3.49), (3.54) и (3.57) получаем

$$\left\| \sum_{i=n_{k_3-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_3 A_3} \leq \varepsilon_{k_3} + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (3.58)$$

$$n_{k_3-1} < n < n_{k_3}.$$

При этом из (3.48) и (3.56) следует

$$\text{mes } A_2 A_3 > b - a - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (3.59)$$

Ясно, что, продолжая этот процесс, мы можем определить последовательность множеств $\{A_j\}$ и последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ такие, что выполняются следующие условия

$$a_1) \quad \text{mes } A_j > b - a - \varepsilon_j,$$

$$b_1) \quad \left\| \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \dots \right\|$$

$$\dots + \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \Big\|_{A_j} < \varepsilon_j,$$

$$c_1) \quad \left\| \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_j A_{j-1}} \leq \varepsilon_{k_j} + 2(\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j) \leq 5\varepsilon_{j-1},$$

для всех n , где

$$n_{k_j-1} + 1 \leq n \leq n_{k_j}.$$

Положим

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{при } n_{k_j-1} + 1 \leq n \leq n_{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{для остальных } n. \end{cases} \quad (3.60)$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (3.61)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Пусть $\delta > 0$ произвольное число. Возьмем j_0 настолько большое, чтобы [см. (3.9)]

$$\sum_{k=j_0-1}^{\infty} \varepsilon_k < \delta. \quad (3.62)$$

Положим

$$A_0 = \prod_{k=j_0}^{\infty} A_k. \quad (3.63)$$

Тогда в силу a_1) и в силу (3.62) будем иметь

$$\text{mes } A_0 > b - a - \delta. \quad (3.64)$$

Покажем, что ряд (3.61) сходится в среднем на множестве A_0 к $f(x)$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число. Возьмем $j'_0 > j_0$ такое, что

$$5\varepsilon_{j'_0-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.65)$$

Положим

$$N(\varepsilon) = n_{k_{j'_0}+1}. \quad (3.66)$$

Рассмотрим частные суммы ряда (3.61)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (3.67)$$

где

$$n > N(\varepsilon).$$

Возможны два случая

1. $n_{kj+1}-1 < n \leq n_{kj+1}$ для некоторого $j > j_0$.
2. $n_{kj} < n \leq n_{kj+1}-1$ для некоторого $j > j_0$.

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что в этом случае в силу (3.60) можно написать

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) = \\ &= \sum_{i=n_{k_1}-1+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2}-1+1}^{n_{k_2}} a_i \varphi_i(x) + \dots + \\ &+ \sum_{i=n_{kj}-1+1}^{n_{kj}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{kj+1}-1+1}^n a_i \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (3.68)$$

В силу условий b_1) и c_1), где вместо j взято $j+1$, учитывая, что $j > j_0$, получаем

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} \leq \varepsilon_j + 5\varepsilon_j. \quad (3.69)$$

Из (3.65) и (3.69) и из того, что $j > j_0$, следует

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} < \varepsilon.$$

Рассмотрим второй случай. В силу (3.60) легко видеть, что в этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=n_{k_1}-1+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2}-1+1}^{n_{k_2}} a_i \varphi_i(x) + \\ &\dots + \sum_{i=n_{kj}-1+1}^{n_{kj}} a_i \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Следовательно в силу условия b_1) имеет место неравенство

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_j} \leq \varepsilon_j.$$

и, так как $A_0 \subset A_j$, $j > j_0$, то

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} \leq \varepsilon.$$

И так, для любого $\delta > 0$ существует множество A_δ при $A_0 > b - a - \delta$ такое, что ряд (3.61) сходится в среднем на A_δ к $f(x)$.



Отсюда следует, что ряд (3.61) сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Тем самым теорема 1 доказана при том предположении, что $f(x)$ почти везде конечная измеримая функция.

Для самого общего случая, когда $f(x)$ произвольная измеримая функция, доказательство аналогично и здесь мы его не приводим.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 17 II 1958

Ս. Ս. Թալալյան

ԶԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սահմանում 1. $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված, համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը կոչվում է լրիվ ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, եթե $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\{f_n(x)\}$ սխառմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաներից կազմված ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $f(x)$ -ին ըստ չափի $[a, b]$ հատվածի վրա:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե ֆունկցիաների սխառմեր լրիվ է $L_2[a, b]$ -ում, ապա նա լրիվ կլինի նաև ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, բայց, ինչպես ցույց է տրված [2]-ում, հակառակը ճիշտ չէ:

Սահմանում 2. Մենք կասենք, որ համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը ասիմպտոտորեն օրթոգոնալ է $[a, b]$ -ում, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$, դրական քվի համար կարելի է որոշել N բնական քիվ այնպես, որ ցանկացած ամբողջ ու դրական n և m քվերի համար, որտեղ $n > N$, $n > N$ և $n \neq m$, $\varphi_n(x)$ և $\varphi_m(x)$ ֆունկցիաները օրթոգոնալ են մի $E_{n,m}$ բազմության վրա, որի չափը ավելի մեծ է, քան $b - a - \varepsilon$ -ը, այսինքն՝

$$\int_{E_{n,m}} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \text{mes } E_{n,m} > b - a - \varepsilon:$$

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Դիցուք, $[a, b]$ հատվածում որոշված, համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը լրիվ է, ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, և այդ հաջորդականության ֆունկցիաները գծորեն անկախ են ցանկացած E չափելի բազմությունների վրա, որոնց չափը մեծ է, քան $a_0 > 0$ ֆիքս քիվը: Այդ դեպքում կարելի է որոշել $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. Յուրաքանչյուր $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ֆունկցիա հանդիսանում է $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա և, հակառակը՝ յուրաքանչյուր $f_n(x)$ ֆունկցիա հանդիսանում է $\varphi_1(x), \varphi_2, \dots, \varphi_n(x)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x),$$

2. $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը ասիմպտոտիկ օրթոգոնալ է:

3. Յունկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար, որը որոշված է $[a, b]$ -ում, գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

շարք, որը $[a, b]$ հատվածում ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ -ին:

Ապացուցվում է նաև, որ նույնիսկ այն դեպքում, երբ ֆունկցիաները պատկանում են $L_2[a, b]$ դասին, թեև որևէ ընդհանրապես ճիշտ չէ, եթե 2) պարմանում ասիմպտոտիկ օրթոգոնալությունը փոխարինենք օրթոգոնալությամբ $[a, b]$ հատվածում սովորական խմայտով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Талалян А. А. О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p . Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. 10, № 1 (1957).
2. Талалян А. А. О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, том 10, № 3 (1957).