

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

Об одном способе решения нелинейных уравнений
 теории ползучести

§ 1. Интегрально-операторная форма уравнений ползучести
 и их решение

Согласно Н. Х. Арутюняну [1] система уравнений нелинейной теории ползучести, связывающая напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ и деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ для несжимаемого тела состоит из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy} \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xz} \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, и интегральной зависимости

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (1.2)$$

связывающей интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

с интенсивностью деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

В соотношении (1.2) модуль упругости $E(t)$, согласно Н. Х. Арутюняну, изменяется во времени по закону

$$E(t) = E_0 (1 - e^{-at}).$$

Нелинейная функция имеет вид

$$f(\sigma_i) = \sigma_i + \beta \sigma_i^2, \quad (1.3)$$

где, следуя Н. Х. Арутюняну, параметр нелинейности β предполагаем малым.

Мера ползучести $C(t, \tau)$ имеет вид

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (1.4)$$

где $\varphi(\tau) = \frac{A}{\tau} + C_0$.

Физические параметры A , C_0 и γ определяются из экспериментов на простую ползучесть.

Н. Х. Арутюнян определил σ_i из интегрального уравнения (1.2) путем предварительного приведения его к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

В результате, полагая $E(t) = E_0 = \text{const}$, упомянутый автор нашел выражение σ_i в виде разложения по малому параметру β .

В настоящей статье предлагается другой способ решения интегрального уравнения (1.2), который иллюстрируется далее применительно к двум задачам.

2. Введем два интегральных оператора с ядрами

$$P(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right],$$

$$Q(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau),$$

воздействующих на некоторую функцию точки $M(x, y, z)$ и времени t :

$$\dot{P}f = \int_{\tau_1}^t P(t, \tau) f(M, \tau) d\tau, \quad \dot{Q}f = \int_{\tau_1}^t Q(t, \tau) f(M, \tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение Н. Х. Арутюняна (1.2), с учетом (1.3), будет представлено в интегрально-операторной форме

$$E\varepsilon_i = (1 + \dot{P})\sigma_i + \beta \dot{Q}\sigma_i^2. \quad (1.6)$$

Решая уравнение (1.6) относительно σ_i , получим

$$\sigma_i = \frac{-(1 + \dot{P}) + (1 + \dot{P}) \sqrt{1 + \frac{4\beta E\varepsilon_i \dot{Q}}{(1 + \dot{P})^2}}}{2\beta \dot{Q}}. \quad (1.7)$$

В выражении (1.7) знак перед радикалом взят плюс потому, что из физических соображений $\sigma_i > 0$.

Всегда можно подобрать такое значение параметра малости β , при котором

$$\frac{4\beta E_{\varepsilon_i} \bar{Q}}{(1 + \bar{P})^2} < 1.$$

Поэтому справедливо разложение

$$\sigma_i = \frac{E_{\varepsilon_i}}{1 + \bar{P}} + \frac{1 + \bar{P}}{2\beta \bar{Q}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left[\frac{4\beta E_{\varepsilon_i} \bar{Q}}{(1 + \bar{P})^2} \right]^n. \quad (1.8)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{1 + \bar{P}} = 1 - \bar{R},$$

где ядро $R(t, \tau)$ оператора $\bar{R}$ представляет собою резольвенту ядра $P(t, \tau)$, а также, выполняя разложение в ряд функции оператора $\bar{P}$

$$\frac{1}{(1 + \bar{P})^{2n-1}},$$

фигурирующей в (1.8), получим

$$\begin{aligned} \sigma_i = E_{\varepsilon_i} (1 - \bar{R}) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (E_{\varepsilon_i})^n (4\beta)^{n-1} \left[\bar{Q}^{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2n-1)2n \dots (2n+\nu-2)}{\nu!} \bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выражая степенные функции $\bar{Q}^{n-1}$ и $\bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu}$ операторов $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, фигурирующие в (1.9), через повторные ядра исходных ядер $P(t, \tau)$ и $Q(t, \tau)$, получим

$$\bar{Q}^{n-1} f = \int_{\tau_1}^t Q_{n-1}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

где

$$Q_{n-1}(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q(t, s) Q_{n-2}(s, \tau) ds; \quad (1.11)$$

$$\bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu} f = \int_{\tau_1}^t \Pi_{n+\nu-1}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.12)$$

где

$$\Pi_{n+\nu-1}(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q_{n-1}(t, u) P_{\nu}(u, \tau) du;$$

в последнем $Q_{n-1}(t, u)$ выражается согласно (1.11), а

$$P_v(u, \tau) = \int_u^\tau P(\tau, v) P_{v-1}(v, u) dv,$$

$$(n = 2, 3, \dots; \quad v = 1, 2, \dots),$$

причем

$$P_0(t, \tau) = P(t, \tau), \quad Q_0(t, \tau) = Q(t, \tau).$$

Наконец, принимая во внимание (1.10) и (1.12), из (1.9) получим

$$\begin{aligned} \sigma_i = E(t) \varepsilon_i(t) - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) E(\tau) \varepsilon_i(\tau) d\tau + \\ + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta)^{n-1} \int_{\tau_1}^t [Q_{n-1}(t, \tau) + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{(2n-1)2n \dots (2n+v-2)}{v!} \Pi_{n+v-1}(t, \tau)] [E(\tau) \varepsilon_i(\tau)]^n d\tau. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, задача определения σ_i решена и сведена к квадратурам.

В частности, например, для старого бетона, т. е. в случае $E(t) = E_0$ и $A = 0$, при этом

$$P(t, \tau) = Q(t, \tau) = \gamma C_0 E_0 e^{-\gamma(t-\tau)},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_i = E_0 \varepsilon_i - E_0 C_0 \gamma \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(1+C_0 E_0)(t-\tau)} \varepsilon_i(\tau) d\tau + \\ + 2 E_0 C_0 \gamma \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta E_0 C_0 \gamma)^{n-1} \int_{\tau_1}^t \left[\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{(2n-1)2n \dots (2n+v-2)}{v!(n+v)!} (\gamma C_0)^{v+1} (t-\tau)^{n+v} \right] e^{-\gamma(t-\tau)} \varepsilon_i^n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В случае, когда ε_i является только функцией координат x, y, z получим

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - \frac{E_0 C_0 \varepsilon_i}{1 + C_0 E_0} [1 - e^{-\gamma(1+C_0 E_0)(t-\tau_1)}] +$$

$$\begin{aligned}
& + 2E_0 C_0 \gamma \varepsilon_i \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta E_0 C_0 \gamma \varepsilon_i)^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{\gamma^n} - \right. \\
& - e^{-\gamma(t-\tau_1)} \left[\frac{(t-\tau_1)^{n-1}}{\gamma} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{\gamma^{k+1}} (t-\tau_1)^{n-k-1} \right] + \\
& + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{(2n-1)2n\dots(2n+v-2)}{v!(n+v)!} (\gamma C_0)^{v+1} \left[\frac{(n+v)!}{\gamma^{n+v+1}} - \right. \\
& \quad \left. - e^{-\gamma(t-\tau_1)} \left(\frac{(t-\tau_1)^{n+v}}{\gamma^{n+v+1}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{n+v} \frac{(n+v)(n+v-1)\dots(n+v-k+1)}{\gamma^{k+1}} (t-\tau_1)^{n+v-k} \right) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

3. В общем случае меры ползучести (1.4), т. е. для молодого бетона, нахождение указанных выше квадратур связано с кропотливыми вычислениями. Поэтому, принимая во внимание, что параметр нелинейности β мал, можно получить приближенное выражение для σ_i с точностью до β^2 .

Тогда из (1.9) следует

$$\sigma_i = E \varepsilon_i (1 - \bar{R}) - \frac{2E^2 \varepsilon_i^2 \beta \bar{Q}}{(1 + \bar{P})^3}. \quad (1.14)$$

Чтобы получить выражение σ_i в замкнутом виде, учтем приближенное равенство

$$(1 + \bar{P})^3 \approx 1 + 3\bar{P}.$$

Тогда (1.14) преобразуется к следующему виду

$$\sigma_i = E \varepsilon_i (1 - \bar{R}) - 2E^2 \varepsilon_i^2 \beta \bar{Q} (1 - \bar{R}_2), \quad (1.15)$$

где $\bar{R}$ оператор, ядро которого $R_2(t, \tau)$ представляет собою резольвенту ядра $3P(t, \tau)$.

Расшифровывая смысл операторов, фигурирующих в (1.15), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_i = E(t) \varepsilon_i(t) - \int_{\tau_1}^t \{ R(t, \tau) E(\tau) \varepsilon_i(\tau) - 2\beta [Q(t, \tau) + \\
+ \Pi(t, \tau)] E^2(\tau) \varepsilon_i^2(\tau) \} d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\Pi(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q(t, s) R_2(s, \tau) ds.$$

Так как при $E(t) = E_0$, $\bar{P} = \bar{Q}$, то из (1.14) следует

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - E_0 [\bar{R} \varepsilon_i - 2\beta E_0 (\bar{R}_2 - \bar{R}_3) \varepsilon_i^2]. \quad (1.16)$$

Откуда

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i(t) - E_0 \int_{\tau_1}^t [R(t, \tau) \varepsilon_i(\tau) - 2\beta E_0 [R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)] \varepsilon_i^2(\tau)] d\tau, \quad (1.17)$$

где $R_2(t, \tau)$ — резольвента ядра $2P(t, \tau)$.

Если при $E(t) = E_0$ исходить из меры ползучести (1.4), то из всех найденных выше выражений σ_i наиболее удобным для практического применения является выражение (1.17).

Полученные результаты, а также примеры, которые будут рассмотрены ниже, относятся к общему случаю неустановившейся ползучести.

2. Некоторые приложения

1. Чистый сдвиг плоскопараллельного слоя

Рассмотрим бесконечный плоскопараллельный слой толщиной h и любой ширины, находящийся при $t < \tau_1$ в покое. Нижняя граница слоя ($z = 0$) неподвижна, а верхняя ($z = h$), начиная с некоторого момента τ_1 , смещается в направлении оси ox .

Так как теория ползучести Н. Х. Арутюняна применима не только к бетону, но и к другим стареющим материалам, то формула, которая будет получена ниже, непосредственно применима к исследованию процесса деформации ползучего слоя почвы, заключенного между твердыми пластинами, или к изучению поведения слоя смазки между трущимися поверхностями и т. п.

В рассматриваемом чисто сдвиговом случае перемещения имеют вид $u(z, t)$, $v(z, t) = 0$, $w(z, t) = 0$.

Инерцией тела пренебрегаем.

Пусть задано смещение границы $z = h$: $u(h, \tau) = u_1 = \text{const}$.

Тогда

$$u(z, t) = \frac{zu_1}{h},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_i = \frac{u_1 \sqrt{3}}{3h}.$$

Пользуясь (1.16) и (1.4) получим выражение касательного напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{E_0 u_1}{3h} \left[1 - \gamma_1 \left(\frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^{\gamma_1} e^{r_1 \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_1 \tau}}{\tau^{\gamma_1}} d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta E_0 u_1}{3h} \left(\frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \sum_{k=2}^3 (-1)^k \gamma_k^{\gamma_k} \tau_1^{\gamma_k} e^{r_k \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_k \tau}}{\tau^{\gamma_k}} d\tau \right]. \end{aligned}$$

где

$$r_k = \gamma_k (1 + E_0 C_0), \quad q_k = \gamma_k A E_0, \quad \gamma_k = k\gamma, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Здесь имеет место процесс релаксации. При $\beta < 0$ эффект нелинейности активизирует процесс релаксации, при $\beta > 0$, наоборот тормозит.

2. Деформация трубы

Рассмотрим деформацию трубы, находящейся под действием внутреннего давления при заданном перемещении внешней поверхности.

Пусть σ_r и σ_θ — радиальное и окружное напряжения $\varepsilon_r = du_r/dr$, $\varepsilon_\theta = u_r/r$ — соответствующие деформации, a и b — внутренний и внешний радиус трубы, q — приложенное изнутри давление, u_b — перемещение внешней поверхности трубы.

Предположим, что осевая деформация отсутствует, т. е. $\varepsilon_z = 0$.

Если считать материал несжимаемым, то

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание граничное условие $u_r(b) = u_b$, получим

$$u_r = \frac{bu_b}{r}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{bu_b}{r^2}, \quad \varepsilon_z = \frac{bu_b\sqrt{12}}{3r^2}. \quad (2.1)$$

Из уравнения (1.1) следует

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta). \quad (2.2)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

с учетом граничного условия $\sigma_r(a) = q$ и соотношения (2.2), получим

$$\sigma_r = \frac{2}{3} \int_a^r \frac{\sigma_i (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}{\rho \varepsilon_i} d\rho + q. \quad (2.3)$$

Если теперь поставить в (2.3) вместо σ_i одно из найденных в § 1 для нее выражений, а вместо ε_r , ε_θ и ε_i их выражения из (2.1) и выполнить квадратуру по ρ , то задачу определения напряжений можно считать решенной.

Так, например, в случае (1.17) будем иметь

$$\sigma_{gk} = -\frac{2bu_b E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[1 - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right.$$

$$+ 2\beta u_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \int_{\tau_1}^t [R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)] d\tau, \quad (2.4)$$

где $k=1, 2, 3$, причем индексы $g_1=r$, $g_2=z$, $g_3=\theta$.

Для молодого бетона из (2.4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{g_k} = & -\frac{2\beta u_0 E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[1 - \gamma_1 \left(\frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^q e^{\tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\tau_1 \tau}}{\tau^{q_1}} d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\beta u_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \left(\frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \sum_{k=2}^3 (-1)^k \gamma_k \tau_1^{r_k} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\tau_k \tau}}{\tau^{q_k}} d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если старение бетона практически завершилось, то можно принять $A=0$ и $q_k=0$.

Тогда из (2.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{g_k} = & -\frac{2\beta u_0 E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[1 - \frac{C_0}{1 + C_0 E_0} \left(1 - e^{-\gamma_1(1+C_0 E_0)(t-\tau_1)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2\beta u_0 C_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \sum_{k=2}^3 (-1)^k \times \right. \\ & \left. \times \frac{k}{1 + k C_0 E_0} \left(1 - e^{-\gamma_k(1+C_0 E_0)(t-\tau_1)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь также, как и в первой задаче, происходит процесс релаксации. Однако, влияние эффекта нелинейности противоположно тому, которое имеет место в предыдущей задаче.

В заключение заметим, что для практического определения напряжений σ_r , σ_θ и σ_z достаточно в (2.5) подставить числовые значения геометрических и физических характеристик бетонной трубы и воспользоваться известным [1] выражением интегралов, входящих в (2.5), через неполную гамма-функцию, согласно формуле

$$\int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_k \tau}}{\tau^{q_k}} d\tau = r_k^{-(1-q_k)} [\phi(r_k t, q_k) - \phi(r_k \tau_1, q_k)],$$

где $\phi(\xi, q_k) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^{q_k}} d\tau$, которая протабулирована [1].

Так, например, если время t измерять в днях, то согласно Н. Х. Арутюняну [1], для бетона, изготовленного на нормальном поргланд-цементе, $A = 4,82 \cdot 10^{-5}$, $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 0,026$, $E_0 = 2,10^6$ кг/см². Тогда $r_1 = 0,073$, $r_2 = 0,146$, $r_3 = 0,219$, $q_1 = 0,25$, $q_2 = 0,50$, $q_3 = 0,75$.

Обработка кривых ползучести бетона показывает, что порядок величины параметра нелинейности β примерно $M \cdot 10^{-6} - N \cdot 10^{-5}$, где $1 < (M, N) < 10$.

Днепропетровский горный институт им. Артема

Поступило 29 IV 1958

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՍԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մուծելով (1.5) ինտեգրալ-օպերատորները, Ն. Ս. Հարությանյանի (1.2) հավասարումը բերվում է (1.6) ինտեգրալ-օպերատորային ձևին: (1.6) հավասարումը σ_i լարումների ինտենսիվության նկատմամբ լուծելու, օպերատորների ֆունկցիաները երկանդամ ինտեգրալ-օպերատորային առանձնական շարքի վերածելու և հետագայում այդ շարքի անդամները (1.5) հավասարման մեջ կերպակալող $P(t, \tau)$ ու $Q(t, \tau)$ ելակետային միջուկների կրկնական միջուկներով արտահայտելու միջոցով, ստացվում է σ_i բացահայտ արտահայտություն:

Առաջարկված են σ_i -ի մի քանի մոտավոր արտահայտություններ, որոնք թույլ են տալիս σ_i -ն անմիջականորեն արտահայտել $P(t, \tau)$ -ին համեմատական միջուկների սեղուկներով միջոցով:

Բերված են ընդհանուր բնույթի օբինակներ, ինչպես նաև գիտարկված է երկու կոնկրետ խնդիր հարթ-դուրաննական շերտի սահքի դեֆորմացիայի և խողովակի դեֆորմացիայի վերաբերյալ, սողքի (1.4) չափի հաշվառումով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюни, Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.