ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 1, 1959 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян

К теории ортотропных оболочек и пластинок

В работе [1] рассматривалась тонкая анизотропная оболочка в предположении, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы. В настоящей статье рассматриваются тонкие ортотропные оболочки, для которых справедливы уравнения теории облочек с большим показателем изменяемости [2], при произвольном законе изменения напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки [3].

1. Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку, для которой справедливы уравнения теории оболочки с большим показателем изменяемости. За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки, отнесенную к криволинейным ортогональным координатам α, β, совпадающим с линиями главной кривизны; ось $o\gamma$ направим по нормали к поверхности. Через A, B и k_1, k_2 обозначим соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны координатной поверхности.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материала оболочки в каждой точке параллельны координатным поверхностям.

Предположим, что

а. нормальный к срединной поверхности элемент после деформации не меняет своей длины (т. е., как и во всех существующих теориях, перемещение по нормали w не зависит от координаты γ);

б. нормальное напряжение $\sigma_{\gamma\gamma}$ не оказывает существенного влияния на величины деформаций $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$ и $e_{\alpha\beta}$;

в. касательные напряжения $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по некоторому закону $f(\gamma)$ [3].

2. В силу принятых предположений для деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ имеем:

$$e_{\alpha\gamma} = a_{55} f(\gamma)\,\varphi_1(\alpha, \beta), \quad e_{\beta\gamma} = a_{44} f(\gamma)\,\varphi_2(\alpha, \beta) \tag{2.1}$$

где a_{55}, a_{44} — упругие постоянные, $f(\gamma)$ — некоторая известная функция [3], $\varphi_i(\alpha, \beta)$ — произвольные искомые функции.

Подставляя выражение (2.1) в соответствующие уравнения трехмерной теории упругости [4], для перемещений точек оболочки будем иметь:

$$
\begin{aligned}
u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) &= u(\alpha, \beta) - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + a_{55}\varphi_1 I_0(\gamma), \\
u_\beta(\alpha, \beta, \gamma) &= v(\alpha, \beta) - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + a_{44}\varphi_2 I_0(\gamma),
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

где $u(\alpha, \beta)$ и $v(\alpha, \beta)$ — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности.

В силу (2.2), для деформаций $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\alpha\beta}$ и $e_{\beta\beta}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) - \frac{\gamma}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \\
&+ \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v + k_1 w + \left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + a_{44}\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\varphi_2\right)\frac{1}{A}I_0(\gamma), \\
e_{\beta\beta} &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) - \frac{\gamma}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \\
&+ \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u + k_2 w + \left(a_{55}\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\varphi_1 + a_{44}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)\frac{1}{B}I_0(\gamma), \\
e_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) - \frac{A}{B}\gamma\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) - \\
&- \frac{B}{A}\gamma\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) + \left[\frac{a_{55}}{B}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}\varphi_1\right) + \right. \\
&\left. + \frac{a_{44}}{A}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\varphi_2\right)\right] I_0(\gamma),
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

где

$$
I_0(\gamma) = \int_0^\gamma f(\gamma)\, d\gamma. \tag{2.4}
$$

Далее из обобщенного закона Гука получим следующие выражения для напряжений:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha} &= B_{11}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) - \frac{\gamma}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v + k_1 w\right] + B_{12}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) - \right. \\
&\left. - \frac{\gamma}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u + k_2 w\right] + \left[B_{11}\frac{1}{A}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \right.\right. \\
&\left.\left. + a_{44}\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\varphi_2\right) + B_{12}\frac{1}{B}\left(a_{55}\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\varphi_1 + a_{44}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)\right] I_0(\gamma),
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{\beta\beta}=B_{22}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{\gamma}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-\frac{\gamma}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u+k_2w\right]+B_{12}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\gamma}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+k_1w\right]+\left[B_{22}\frac{1}{B}\left(a_{44}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\right.\right. \tag{2.5}$$
$$\left.\left.+a_{55}\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_1\right)+B_{12}\frac{1}{A}\left(a_{44}\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2+a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\right)\right]I_0(\gamma),$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=B_{66}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{A}{B}\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-\frac{B}{A}\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B_2}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right]+$$
$$+B_{66}\left[a_{44}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_2\right)+\right.$$
$$\left.+a_{55}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_1\right)\right]I_0(\gamma).$$

Здесь B_{ik} — известные комбинации упругих постоянных [3].

С помощью формул (2.5) обычным путем [4] определяются усилия и моменты.

$$T_{11}=C_{11}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+k_1w\right)+C_{12}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u+k_2w\right)+\left[a_{44}\frac{1}{B}\left(C_{11}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2+C_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+a_{55}\frac{1}{A}\left(C_{12}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_1+C_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\right)\right]\frac{I_1(h)}{h},$$
$$\tag{2.6a}$$
$$T_{22}=C_{22}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u+k_2w\right)+C_{12}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+k_1w\right)+\left[a_{55}\frac{1}{A}\left(C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_1+C_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+a_{44}\frac{1}{B}\left(C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2+C_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right)\right]\frac{I_1(h)}{h},$$

$$T_{12}=C_{66}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\right]+$$

$$+C_{66}\left[a_{44}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_2\right)+a_{55}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_1\right)\right]\frac{I_I(h)}{h}.$$

$$N_{11}=I_{III}(h)\,\varphi_1;\quad N_{22}=I_{III}(h)\,\varphi_2. \tag{2.6в}$$

$$M_{11}=D_{11}\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right]+$$

$$+D_{12}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]+\left[a_{44}\frac{1}{B}\left(D_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\right.\right.$$

$$\left.+D_{11}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2\right)+a_{55}\frac{1}{A}\left(D_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.\left.+D_{12}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_1\right)\right]\frac{12\,I_{II}(h)}{h^3}, \tag{2.7а}$$

$$M_{22}=D_{22}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]+$$

$$+D_{12}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right]+\left[a_{55}\frac{1}{A}\left(D_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_{11}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_1\right)+a_{44}\frac{1}{B}\left(D_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+D_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2\right)\right]\frac{12\,I_{II}(h)}{h^3},$$

$$M_{12}=D_{66}\left[-\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right]+$$

$$+D_{66}\left[a_{55}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_1\right)+a_{44}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_2\right)\right]\frac{12\,I_{II}(h)}{h^3} \tag{2.7б}$$

В этих формулах введены следующие обозначения

$$I_I(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}I_0(\gamma)\,d\gamma;\qquad I_{II}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}I_0(\gamma)\,\gamma d\gamma;$$

$$I_{III}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}f(\gamma)\,d\gamma, \tag{2.8}$$

а для жесткостей растяжения-сжатия (C_{ik}) и изгиба (D_{ik}) имеем:

$$C_{ik}=hB_{ik},\qquad D_{ik}=\frac{h^3}{12}B_{ik}. \tag{2.9}$$

Усилия и моменты должны удовлетворять уравнениям равновесия [4]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_{11})-T_{22}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{12})+T_{12}\frac{\partial A}{\partial\beta}+ABX=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{22})-T_{11}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_{12})+T_{12}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+ABY=0,$$

$$-(k_1T_{11}+k_2T_{22})+\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_{11})+\frac{\partial}{\partial\beta}(AN_{22})\right]+Z=0, \tag{2.10}$$

$$ABN_{22}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_{12})+M_{12}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}(AM_{22})+M_{11}\frac{\partial A}{\partial\beta},$$

$$ABN_{11}=\frac{\partial}{\partial\beta}(AM_{12})+M_{12}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_{11})+M_{22}\frac{\partial B}{\partial\alpha},$$

где X, Y, Z — компоненты внешней нагрузки по направлениям осей координат.

Подставляя выражения моментов и усилий в уравнения равновесия (2.10), получим систему из пяти дифференциальных уравнений относительно пяти неизвестных u, v, w, φ_1, φ_2. Ввиду громоздкости ее не приводим.

Перейдем к частным случаям.

3. Прямоугольные в плане оболочки положительной гауссовой кривизны. Пусть α и β представляют длины дуг координатных линий; тогда коэффициенты первой квадратичной формы приближенно могут быть приняты равными единице [9, 10, 11] и исходные соотношения (2.5)—(2.8) значительно упрощаются.

Уравнения равновесия (2.10) в этом случае при $X=Y=0$ принимают вид:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{12}}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{\partial T_{22}}{\partial\beta}+\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha}=0,$$

$$-(k_1T_{11}+k_2T_{22})+\frac{\partial N_{11}}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_{22}}{\partial\beta}=-Z, \tag{3.1}$$

$$N_{22}=\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha}+\frac{\partial M_{22}}{\partial\beta},\qquad N_{11}=\frac{\partial M_{12}}{\partial\beta}+\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha}.$$

Здесь задачу удобнее решать смешанным методом [4]. Введя некоторую функцию $F(\alpha,\beta)$, через которую внутренние усилия T_{11}, T_{22}, T_{12} представляются соотношениями

$$T_{11}=\frac{\partial^2F}{\partial\beta^2},\qquad T_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2},\qquad T_{12}=-\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\beta}, \tag{3.2}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (3.1). Из третьего уравнения, учитывая значения N_{11} и N_{22} из (2.6в), получим первое уравнение разрешающей системы:

$$\Delta_r F - I_{III}(h)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right) = Z, \tag{3.3}$$

где
$$\Delta_r = k_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + k_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Второе уравнение строим на базе уравнения неразрывности. Последнее, в усилиях, имеет вид [1]:

$$\frac{C_{22}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\beta^2} - \frac{C_{12}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial\beta^2} + \frac{C_{11}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial\alpha^2} - \frac{C_{12}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\alpha^2} -$$

$$-\frac{1}{C_{66}}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial\alpha\partial\beta} - k_1\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - k_2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0,$$

где $\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$.

Подставляя сюда значения усилий (3.2), получаем второе уравнение разрешающей системы в виде:

$$\frac{1}{\Omega}L_1(C_{ik})F - \Delta_r w = 0. \tag{3.4}$$

Третье и четвертое уравнения системы получаем непосредственной подстановкой значений моментов (2.7) и перерезывающих сил (2.6в) в два последние уравнения равновесия (3.1).

$$E_2(D_{ik})w - \left[a_{44}\left(D_{66}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\alpha^2} + D_{22}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\beta^2}\right) + a_{55}(D_{66} +\right.$$

$$\left. + D_{12})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha\partial\beta}\right]\frac{12 I_{II}(h)}{h^3} + I_{III}(h)\,\varphi_2 = 0, \tag{3.5}$$

$$E_1(D_{ik})w - \left[a_{55}\left(D_{66}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2} + D_{11}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2}\right) + a_{44}\left(D_{66} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + D_{12}\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right]\frac{12 I_{II}(h)}{h^3} + I_{III}(h)\,\varphi_1 = 0, \tag{3.6}$$

где для операторов L_1 и E_i имеем:

$$L_1(C_{ik}) = C_{11}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \left(\frac{\Omega}{C_{66}} - 2C_{12}\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + C_{22}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4},$$

$$E_1(D_{ik}) = D_{11}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}, \tag{3.7}$$

$$E_2(D_{ik}) = D_{22}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы четырех дифференциальных уравнений (3.3)—(3.6) относительно четырех неизвестных функций $w(\alpha, \beta)$, $\varphi_1(\alpha, \beta)$, $\varphi_2(\alpha, \beta)$, $F(\alpha, \beta)$.

Эта система может быть приведена к одному уравнению относительно неизвестной функции $\Phi(\alpha, \beta)$.

Полагая

$$\varphi_1 = \left[\frac{12 I_{II}}{h^3} a_{44} D_{66} \frac{\partial}{\partial \alpha} L_1(D_{ik}) - I_{III} E_1(D_{ik})\right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi,$$

$$\varphi_2 = \left[\frac{12 I_{II}}{h^3} a_{55} D_{66} \frac{\partial}{\partial \beta} L_1(D_{ik}) - I_{III} E_2(D_{ik})\right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi, \tag{3.8}$$

$$w = \left\{a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} \left[\left(a_{44} D_{22} + a_{55} D_{66}\right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(a_{44} D_{66} + a_{55} D_{11}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right] + I_{III}^2\right\} \frac{1}{\Omega} L(C_{ik}) \Phi,$$

$$F = \left[\frac{144 I_{II}^2}{h^6} a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} L_2(a_{ik} D_{ik}) + I_{III}^2\right] \Delta_r \Phi,$$

тождественно удовлетворим трем уравнениям разрешающей системы (3.4)—(3.6), а из четвертого уравнения (3.3), для определения функции $\Phi(\alpha, \beta)$, получим уравнение десятого порядка:

$$\left[\frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} D_{66} \Delta_a L_1(D_{ik}) - I_{III}^2 L_3(D_{ik})\right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi -$$

$$- \left[I_{III}^2 + \frac{144 I_{II}^2}{h^6} a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \right.$$

$$\left. - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} L_2(a_{ik} D_{ik})\right] \Delta_r^2 \Phi = -Z, \tag{3.9}$$

где введены следующие обозначения:

$$L_2(a_{ik} D_{ik}) = (a_{55} D_{11} + a_{44} D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (a_{44} D_{22} + a_{55} D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$L_3(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \tag{3.10}$$

$$\Delta_a = a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + a_{44} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

В качестве примера рассмотрим свободно опертую прямоугольную в плане трансверсально изотропную оболочку под синусоидальной нагрузкой

$$Z = q_0 \sin \frac{\pi \alpha}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}. \tag{3.11}$$

Как известно, для трансверсально изотропного тела имеем:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad B_{12} = \mu B_{11}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'},$$

где E — модуль упругости в плоскости изотропии, μ — коэффициент Пуассона, G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы [1,3], т. е.

$$f(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Тогда по (2.4) и (2.8) для интегралов получим:

$$I_0(\gamma) = \frac{\gamma^3}{6} - \gamma\frac{h^2}{8}; \quad I_{II} = -\frac{h^5}{120}; \quad I_{III} = -\frac{h^3}{12}. \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.9) ищем в форме:

$$\Phi = \Phi_0 \sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}. \tag{3.13}$$

Выбранная функция удовлетворяет условиям свободного опирания [1] по торцам $\alpha = 0, a$ и $\beta = 0, b$. Подставляя ее в разрешающее уравнение (3.9), определяем Φ_0, а затем по (3.8) для прогибов получим следующие величины (для простоты записи оболочку в плане считаем квадратной $a = b$):

а) в случае сферической оболочки ($k_1 = k_2 = k = \mathrm{const}$)

$$w_{\text{сф}} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}\left\{1 + 2{,}4\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2} - \right.$$

$$\left. - k^2\frac{4A}{1 + 1{,}2(1-\mu)\dfrac{D}{hG'}\dfrac{\pi^2}{a^2} + 4B}\right\}. \tag{3.14}$$

б) в случае цилиндрической оболочки ($k_1 = 0$, $k_2 = k = \mathrm{const}$)

$$w_{\text{ц}} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}\left\{1 + 2{,}4\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2} - \right.$$

$$\left. - k^2\frac{A}{1 + 1{,}2(1-\mu)\dfrac{D}{hG'}\dfrac{\pi^2}{a^2} + B}\right\}; \tag{3.15}$$

в) в случае пластинки ($k_1 = k_2 = 0$)

$$w_{пл} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}\left\{1 + 2{,}4\,\frac{D}{hG'}\,\frac{\pi^2}{a^2}\right\}, \tag{3.16}$$

где

$$A = \frac{h}{16}\,\frac{E}{D}\,\frac{a^4}{\pi^4} + \frac{9(2-\mu)}{25h}\,\frac{DE}{G'^2} + \frac{3(5-\mu)}{40}\,\frac{E}{G'}\,\frac{a^2}{\pi^2} +$$

$$+ \frac{54(1-\mu)}{125h^2}\,\frac{D^2E}{G'^3}\,\frac{\pi^2}{a^2},$$

$$B = k^2\left(\frac{h}{16}\,\frac{E}{D}\,\frac{a^4}{\pi^4} + \frac{9(1-\mu)}{50\,h}\,\frac{DE}{G'^2} + \frac{3(3-\mu)}{40}\,\frac{E}{G'}\,\frac{a^2}{\pi^2}\right).$$

Принимая модуль сдвига G' бесконечным, получим решение соответствующих задач при гипотезе недеформируемых нормалей. Как нетрудно заметить, полученные результаты при больших значениях $\frac{E}{G'}$ существенно отличаются от величин, полученных при наличии гипотезы Кирхгофа.

Исследуем влияние подъемистости оболочки на точность гипотезы Кирхгофа. Значения прогибов (3.13)—(3.15) при различных отношениях $\frac{h}{a}$, $\frac{E}{G'}$ и $\frac{a}{R}$ помещены в таблицах I—III, первые строки которых представляют решение соответствующей задачи при гипотезе Кирхгофа $\left(\frac{E}{G'} = 0\right)$. В следующих таблицах I′—III′ приводятся значения величин

$$\frac{w\left(\frac{E}{G'} > 2\right) - w\left(\frac{E}{G'} = 0\right)}{w\left(\frac{E}{G'} > 2\right)}\,100\%, \tag{3.17}$$

представляющих расхождение в процентах результатов классической теории от результатов предлагаемой теории.

Для простоты в расчетах коэффициент Пуассона принимаем равным нулю.

Значения $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4}\,w_{пл}$

Таблица I

E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,4386	1,1579	1,0395
5	2,0965	1,3948	1,0988
10	3,1930	1,7895	1,1975

Таблица I′

E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	30,4%	13,6%	3,7%
5	52,3%	28,3%	8,9%
10	68,6%	44,1%	16,4%

Значения $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} w_{\text{ц}}$

Таблица II

	$\frac{a}{R}=0,5$			$\frac{a}{R}=0,8$		
E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	0,9830	0,9541	0,8386	0,9575	0,8903	0,6699
2	1,4035	1,0968	0,8662	1,3522	1,0134	0,6874
5	2,0226	1,3071	0,9070	1,9187	1,1911	0,7141
10	3,0247	1,6477	0,9732	2,7979	1,4662	0,7533

Таблица II'

	$\frac{a}{R}=0,5$			$\frac{a}{R}=0,8$		
E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	29,9%	13%	3,1%	29,1%	12,1%	2,5%
5	51,3%	27%	7,5%	50%	25,2%	6,1%
10	67,5%	42%	13,8%	65,7%	39,2%	11%

Значения $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} w_{\text{сф}}$

Таблица III

	$\frac{a}{R}=0,5$			$\frac{a}{R}=0,8$		
E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	0,9352	0,8332	0,5648	0,8500	0,6700	0,3368
2	1,3078	0,9467	0,5772	1,1458	0,7375	0,3411
5	1,8129	1,0996	0,5952	1,5341	0,8268	0,3520
10	2,6114	1,3311	0,6491	2,0390	0,9509	0,3567

Таблица III'

	$\frac{a}{R}=0,5$			$\frac{a}{R}=0,8$		
E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	28,4%	11,9%	2,1%	25,8%	9,1%	1,2%
5	48,4%	24,2%	5,1%	44,5%	18,2%	4,3%
20	64,1%	37,4%	12,9%	58,3%	29,5%	5,5%

Как и следовало ожидать, с увеличением подъемистости $\left(\frac{a}{R}\right)$ оболочки, ошибка, допускаемая при принятии гипотезы Кирхгофа, уменьшается. В случае пластин $\left(\frac{a}{R}=0\right)$ расхождения прогибов (таблица I') максимальные.

Дело в том, что при увеличении подъемистости значение изгибных параметров на напряженное состояние оболочки уменьшается, в связи с чем уменьшается и влияние перерезывающих сил, т. е напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$.

4. Сферическая оболочка и круглая пластинка. Будем считать внутреннюю геометрию срединной поверхности сферической оболочки совпадающей с геометрией круглой пластинки. Тогда полярные координаты r и β на плоскости будут координатами точки на срединной поверхности сферы [4]. При этом $A=1$, $B=r$, $k_1=k_2=k=\mathrm{const}$ и из (2.2) — (2.10) могут быть получены все нужные соотношения. Приведем лишь систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций u, v, w, φ_1, φ_2; подставляя значения усилий и моментов из (2.7), (2.8) в уравнения равновесия (2.10), получим:

$$rC_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+C_{11}\frac{\partial u}{\partial r}-C_{22}\frac{u}{r}+C_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+$$

$$+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\beta}-(C_{16}+C_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\beta}+rk(C_{11}+C_{12})\frac{\partial w}{\partial r}+$$

$$+(C_{11}-C_{22})kw+\frac{I_1}{h}\left[C_{11}a_{55}r\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}+C_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\right.$$

$$-C_{22}a_{55}\frac{\varphi_1}{r}+C_{66}a_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2}+(C_{12}+C_{66})a_{44}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial\beta}-$$

$$\left.-(C_{22}+C_{66})a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right]=-rX,$$

$$(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\beta}+(C_{22}+C_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\beta}+C_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+C_{66}\frac{\partial v}{\partial r}-$$

$$-C_{66}\frac{v}{r}+rC_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+(C_{12}+C_{22})k\frac{\partial w}{\partial\beta}+$$

$$+\frac{I_1}{h}\left[(C_{12}+C_{66})a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial\beta}+(C_{22}+C_{66})a_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}+C_{22}a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\beta^2}+\right.$$

$$\left.+C_{66}a_{44}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-C_{66}a_{44}\frac{\varphi_2}{r}+C_{66}a_{44}r\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}\right]=-rY,$$

$$k(C_{11}+C_{12})\frac{\partial u}{\partial r}+k(C_{12}+C_{22})\frac{u}{r}+(C_{12}+C_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\beta}+$$

$$+k^2(C_{11}+2C_{13}+C_{22})w+\left[(C_{11}+C_{12})a_{55}\frac{I_I k}{h}+I_{III}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+$$

$$+\left[(C_{12}+C_{22})a_{55}\frac{I_I k}{h}+I_{III}\right]\frac{\varphi_1}{r}+\left[(C_{12}+C_{22})a_{44}\frac{I_I k}{h}+\right.$$

$$\left.+I_{III}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+Z=0, \qquad (4.1)$$

$$-(2D_{66}+D_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\beta}-D_{22}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}\right)+\frac{12I_{II}}{h^3}\left[(D_{66}+\right.$$

$$+D_{12})a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial\beta}+a_{55}(D_{66}+D_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+a_{44}D_{66}\left(r\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}+\frac{\partial\varphi^2}{\partial r}\right)-$$

$$\left.-D_{66}a_{44}\frac{\varphi_2}{r}+D_{22}a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\beta^2}\right]-rI_{III}\varphi_2=0$$

$$-(2D_{66}+D_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\beta^2}+(2D_{66}+D_{12}+D_{22})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-$$

$$-D_{11}r\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+D_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{12I_{II}}{h^3}\left[D_{66}a_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2}+\right.$$

$$+(D_{12}+D_{66})a_{44}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial\beta}-(D_{66}+D_{22})a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+$$

$$\left.+D_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+D_{11}a_{55}r\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}-D_{22}a_{55}\frac{\varphi_1}{r}\right]-rI_{III}\varphi_1=0.$$

Остановимся подробнее на случае изгиба круглой трансверсально изотропной пластинки ($k=0$) равномерно распределенной нагрузкой $Z=q_0$.

В этом случае система (4.1) сводится к одному уравнению:

$$r\frac{d^3 w}{dr^3}+\frac{d^2 w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{q_0 r^2}{2D}, \qquad (4.2)$$

которое ничем не отличается от обычного уравнения осесимметричного изгиба круглой пластинки. Принятие в п° 1 исходного допущения „в“ отражается в граничных условиях.

Приведем значения прогиба в центре пластинки при различных условиях. [$f(\gamma)$ — квадратная парабола].

а) Свободно опертый край:
граничные условия [3, 5, 12]

при $r=a$ $\qquad w=0$ и

$$M_r=-D\frac{d^2 w}{dr^2}-D\mu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+a_{55}D\left(\frac{d\varphi_1}{dr}+\mu\frac{\varphi_1}{r}\right)\frac{12I_{II}}{h^3}=0.$$

Из уравнения (4.2) при данных граничных условиях получим следующие значения прогиба:

для трансверсально изотропной пластинки

$$w_{т.\ и.}=\frac{q_0a^4}{64D}\frac{5+\mu}{1+\mu}\left[1+\frac{1,6}{(1-\mu)(5+\mu)}\frac{E}{G'}\frac{h^2}{a^2}\right]; \tag{4.3}$$

для изотропной пластинки

$$w_{и.}=\frac{q_0a^4}{64D}\frac{5+\mu}{1+\mu}\left[1+\frac{3,2(1+\mu)}{(1-\mu)(5+\mu)}\frac{h^2}{a^2}\right]. \tag{4.4}$$

Для сравнения приводим значения прогибов $w_т$, полученные в теории толстых изотропных плит [5].

$$w_т=\frac{q_0a^4}{64D}\frac{5+\mu}{1+\mu}\left[1=0,4\frac{8+\mu+\mu^2}{(5+\mu)(1-\mu)}\frac{h^2}{a^2}\right] \tag{4.5}$$

б) Закрепленный край.

1. Закрепляется горизонтальный элемент срединной плоскости края пластаинки [5]

$$\text{при } r=a,\quad w=0 \quad\text{и}\quad \frac{dw}{dr}=0,$$

в этом случае все три решения совпадают, и прогиб центра пластинки равен

$$w_{т.\ и.}=w_и=w_т=\frac{q_0a^4}{64\,D}. \tag{4.6}$$

2. Закрепляется вертикальный элемент краевой цилиндрической поверхности [5]

$$\text{при}\quad r=a,\quad w=0 \quad\text{и}\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0}=0,$$

для трансверсально изотропной пластинки

$$w_{т.\ и.}=\frac{q_0a^4}{64\,D}\left[\quad+\frac{2}{1-\mu^2}\frac{E}{G'}\frac{h^2}{a^2}\right]. \tag{4.7}$$

Для изотропной пластинки по предлагаемой теории и теории толстых плит [5] получаем одно и то же выражение для прогиба в центре пластинки:

$$w_и=w_т=\frac{q_0a^4}{64}\left(1+\frac{4}{1-\mu}\frac{h^2}{a^2}\right). \tag{4.8}$$

Второй член в квадратных скобках выражений (4.3) и (4.6) представляет поправку к гипотезе Кирхгофа, вносимую допущениями, принятыми в п° 1. Посчитаем величину прогиба при различных относительных размерах $\frac{h}{a}$ и отношениях $\frac{E}{G'}$ ($\mu=0,3$) (таблицы IV и V). В таблице IV' приводится погрешность гипотезы Кирхгофа по (3.17).

а) Свободный край

Значения $\dfrac{64D}{q_0a^4}\,\dfrac{1+\mu}{5+\mu}w$

Таблица IV

E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	1,12145	1,0450	1,0112
5	1,2[illegible]95	1,0865	1,0215
10	1,4790	1,1730	1,0430

Таблица IV'

E/G \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2,6	11%	4,3%	1,1%
5	19,3%	7,9%	2,1%
10	32,3%	14,7%	4,1%

Для изотропной пластинки $\dfrac{E}{G'}=2{,}6$ значения прогиба могут быть получены по теории толстых плит [5] из (4.5)

$$\text{при } \frac{h}{a}=\frac{1}{3}\qquad \frac{1}{5}\qquad \frac{1}{10}$$

$$1{,}1005\quad 1{,}0362\quad 1{,}0090 \tag{14.9}$$

Сравнивая значения, полученные по предлагаемой теории и теории Кирхгофа со значениями (4.9), замечаем, что даже в случае изотропной пластинки средней толщины погрешность гипотезы недеформируемых нормалей по сравнению с решением (4.9) достигает 10%, в то время как значения прогиба по предлагаемой теории отличаются от (4.9) на 2%. В случае же анизотропных пластинок $\left(\dfrac{E}{G'}>2{,}6\right)$ эта погрешность может быть значительно существенней.

Аналогичные расчеты, проведенные для второго способа закрепления пластинки (таблица V), показывают, что в этом случае закрепления гипотеза Кирхгофа неприменима.

Значения $\dfrac{64D}{q_0a^4}w$

Таблица V

E/G' \ h/a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	1,6349	1,2285	1,0572
5	2,2210	1,4395	1,1100
10	3,4420	1,8790	1,2200

Таким образом, граничные условия существенным образом влияют на погрешность гипотезы Кирхгофа.

5. В настоящем п° рассмотрим случай, когда $f(\gamma)$, $\varphi_i(\alpha,\beta)$ в (2.1) заведомо известны [8]. Они представляют значения касательных напряжений $\tau^0_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma}$, полученных при наличии гипотезы Кирхгофа.

Ввиду того, что этот вариант подробно рассмотрен в [6, 7, 8], приведем лишь окончательные результаты.

Для прямоугольных в плане оболочек положительной гауссовой кривизны разрешающая система представляется в виде (из [7] без учета нелинейных членов):

$$L_4(a_{ik})F - \Delta_r w = 0, \tag{5.1}$$

$$L_2(D_{ik})w + \Delta_r F = q - \frac{h^2}{10}[E_1(D_{ik})\varphi_0 + E_2(D_{ik})\psi_0],$$

где

$$L_4(a_{ik}) = a_{11}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}.$$

$$\varphi_0 = a_{55}E_1(B_{ik})w_0, \quad \psi_0 = a_{44}E_2(B_{ik})w_0; \tag{5.2}$$

w_0 — значение прогиба при гипотезе недеформируемых нормалей.

Введением функции $\Phi(\alpha, \beta)$ по формулам

$$w = L_4(a_{ik})\Phi \text{ и } F = \Delta_r\Phi \tag{5.3}$$

сводим систему (5.1) к одному уравнению восьмого порядка:

$$L_2(D_{ik})L_4(a_{ik})\Phi + \Delta_r^2\Phi = q - \frac{h^2}{10}[E_1(D_{ik})\varphi_0 + E_2(D_{ik})\psi_0]. \tag{5.4}$$

Рассмотрим, как и в п° 3, задачу изгиба свободно опертой прямоугольной в плане трансверсально изотропной оболочки под действием синусоидальной нагрузки (3.11). Представляя функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ в виде (3.13), с помощью (5.4) и (5.3) определяем значения прогиба в центре:

а) для сферической оболочки с прямоугольным контуром

$$w_{сф} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}\left[1 + 2,4\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2} - k^2\frac{A' + B'}{(C' + D')^2}\right]; \tag{5.5}$$

б) для цилиндрической оболочки с прямоугольным контуром

$$w_ц = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}\left[1 + 2,4\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2} - k^2\frac{A' + 4B'}{(4C' + D')^2}\right], \tag{5.6}$$

где

$$A' = E^2h^2k^2a^8\left(1 + 2,4\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2}\right),$$

$$B' = 4a^4h\pi^4ED\left(1 + 4,8\frac{D}{hG'}\frac{\pi^2}{a^2}\right),$$

$$C' = 4\pi^4D, \qquad D' = Ehk^2a^4;$$

в) для прямоугольной в плане пластинки, как нетрудно заметить, значение прогиба совпадает с ранее полученным (3.16).

В случае изгиба круглой пластинки равномерной нагрузкой (n°4) для прогиба получаем те же значения (4.3), (4.6) и (4.7).

Посчитаем значение прогиба по формулам (5.6) и (5.5) (таблицы VI и VII) и сравним с ранее полученными (таблицы II и III).

Значения $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} w_{\text{ц}}$

Таблица VI

E/G' \ h/a	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{3}$	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{5}$	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{10}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{3}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{5}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{10}$
0	0,9830	0,9541	0,8386	0,9575	0,8903	0,6699
2	1,4068	1,0978	0,8664	1,3584	1,0153	0,6873
5	2,0424	1,3055	0,9081	1,9627	1,2030	0,7138
10	3,1019	1,6612	0,9774	2,9680	1,5158	0,7631

Значения $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} w_{\text{сф}}$

Таблица VII

E/G' \ h/a	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{3}$	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{5}$	$\frac{a}{R}=0{,}5$: $\frac{1}{10}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{3}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{5}$	$\frac{a}{R}=0{,}8$: $\frac{1}{10}$
0	0,9352	0,8332	0,5648	0,8500	0,6700	0,3368
2	1,3188	0,9496	0,5776	1,1655	0,7407	0,3409
5	1,8942	1,1162	0,5965	1,6339	0,8467	0,3474
10	2,8532	1,3932	0,6280	2,4306	1,0236	0,3597

Сравнения показывают, что при расчете свободно опертых прямоугольных в плане сферической и цилиндрической оболочек под синусоидальной нагрузкой (п°3) с успехом может быть использован вариант теории, изложенной в п°5. В случае же свободно опертой прямоугольной пластинки (п°3) и круглой пластинки при рассмотренных в п°4 граничных условиях, по предлагаемой теории и по варианту п°5 получаем одни и те же результаты.

Вариант п°5 не вводит математических осложнений, и задача может быть с легкостью решена, если имеется решение соответствующей задачи при гипотезе недеформируемых нормалей.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР.

Поступило 15 X 1958

Ս. Ա. Համբարձումյան, Դ. Վ. Փեշտմալջյան

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում են բարակ օրթոտրոպ թաղանթներ, որոնց համար կիրառելի են «փոփոխության մեծ գործակից» ունեցող թաղանթների տեսության հավասարումները [2]։

Ընդունվում են հետևյալ ենթադրությունները.

1. Միջին մակերևույթին նորմալ, թաղանթի գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները։

2. σ_γ նորմալ լարումները էական ազդեցություն չեն ունենում $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$ և $e_{\alpha\beta}$ դեֆորմացիաների վրա։

3. $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ըստ թաղանթի հաստության փոփոխվում են տրված $f(\gamma)$ օրենքով։

Ընդունված ենթադրությունների հիման վրա շարադրված է «փոփոխության մեծ գործակից» ունեցող անիզոտրոպ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը։ Լուծված են մի շարք խնդիրներ՝ գլանային ու սֆերիկ թաղանթների և ուղղանկյան շրջանային սալերի դեպքում։ Ցույց է տրված, որ Կիրխհոֆի հիպոթեզի սխալը թաղանթի կորության մեծացման հետ միասին նվազում է։ Շրջանային սալի ծռման խնդիրն ուսումնասիրելիս դիտարկվում է նաև եզրային պայմանների ազդեցությունը Կիրխհոֆի հիպոթեզի սխալի վրա։

Աշխատության վերջին պարագրաֆում բերված է նաև տեսության մի ուրիշ ավելի մոտավոր օրինակ [6, 7, 8], որը հիմնվելով վերը բերված առաջին երկու ենթադրությունների վրա, երրորդ ենթադրության փոխարեն ընդունում է հետևյալը՝ «$\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ոչնչով չեն տարբերվում Կիրխհոֆի հիպոթեզի ընդունման ժամանակ ստացված համապատասխան շոշափող լարումներից»։

Վերջին պարագրաֆում առաջարկված տեսության հիման վրա լուծվում են բոլոր այն խնդիրները, որոնք լուծվել էին հիմնական տեսությունը քննարկելու ժամանակ։

Ցույց է տրվում, որ վերջին պարագրաֆում առաջարկված մոտավոր տեսությունը մեծ ճշտությամբ կիրառելի է անիզոտրոպ թաղանթների ու սալերի բազմազան խնդիրներ լուծելու համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, № 2, 1958.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, 1935.
6. *Амбарцумян С. А.* К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок. ДАН АрмССР, 4, 1957.
7. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* О нелинейной теории пологих ортотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. наук, т. XI, 1, 1958.
8. *Амбарцумян С. А.* О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, X, 2, 1957.
9. *Работнов Ю. Н.* Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР, т. XVII, 5, 1945.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ, т. X, 3, 1946.
11. *Амбарцумян С. А.* К расчету пологих оболочек. ПММ, т. XI, в. 5, 1947.
12. *Reissner, E.* On bending of elastic plates. Quart. of Applied Mathematics, Vol. 5, 1947.