

А. А. Талалаян

Об универсальных ортогональных рядах

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть полная ортонормированная система функций, определенных на отрезке $[a, b]$.

Ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

называется универсальным, если всякой измеримой функции, определенной почти всюду на $[a, b]$, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i , $i = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = f(x) \quad (2)$$

почти всюду на $[a, b]$, где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (3)$$

В работе [5] было доказано, что для любой полной ортонормированной системы существует универсальный ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю.

Пусть даны две измеримые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad (6)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Определение А. Ортогональный ряд (1) называется универсальным относительно функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, если всякой измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющей неравенству

$$F_1(x) \leq f(x) \leq F_2(x) \quad (5)$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i , $i = 1, 2, \dots$, что равенство (2) выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Ортогональный ряд, универсальный относительно функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, следуя Д. Е. Меньшову, будем называть рядом типа А (F_1, F_2) .

Если $F_1(x) = -\infty$ и $F_2(x) = +\infty$ для всех x на $[a, b]$, то ясно, что ряд типа $A(F_1, F_2)$ будет универсальным ортогональным рядом.

В настоящей работе мы будем доказывать существование ряда типа $A(F_1, F_2)$ с пределами неопределенности по мере $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для любой полной ортонормированной системы.

Как известно, верхний и нижний пределы по мере определяются следующим образом (см. [1], стр. 4).

Пусть

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots \quad (6)$$

есть последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на $[a, b]$.

Говорят, что функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (6), если $F(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

$$a^\circ. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0, \quad (7)$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$b^\circ. \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) > \chi(x)] \cdot E[F(x) > \chi(x)]\} > 0, \quad (8)$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\text{mes} E[F(x) > \chi(x)] > 0$.

Функцию $G(x)$, определенную почти всюду на $[a, b]$, называют верхним пределом по мере на $[a, b]$ последовательности (6), если $G(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

$$a^\circ. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < G(x)]\} = 0, \quad (9)$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$b^\circ. \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) < \chi(x)] \cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0, \quad (10)$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\text{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть полная ортонормированная система функций определенных на $[a, b]$. Для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, определенных почти всюду на сегменте $[a, b]$, и таких, что $G(x) \leq F(x)$ почти всюду на этом сегменте, существует ортогональный ряд (1), обладающий следующими свойствами:

1°. $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда (1).

2°. Какова бы ни была измеримая функция $\psi(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющая условию $G(x) \leq \psi(x) \leq$

$\ll F(x)$ всюду на этом сегменте, можно определить последовательность частных сумм ряда (1) сходящуюся к $\psi(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

$$3^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Теорема 1 была доказана Д. Е. Меньшовым в том частном случае, когда $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с тригонометрической системой (см. [1]).

Следуя Д. Е. Меньшову (см. [2], стр. 4), введем следующее определение.

Определение В. Пусть даны две измеримые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству

$$F_1(x) \leq F_2(x).$$

Ортогональный ряд (1) будем называть рядом типа $B(F_1, F_2)$, если любым четырем измеримым функциям $\Phi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\Phi_2(x)$, определенным почти всюду на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющим неравенствам

$$F_1(x) \leq \Phi_1(x) \leq \psi_1(x) < \psi_2(x) < \Phi_2(x) \leq F_2(x)$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i , $i = 1, 2, \dots$, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[a, b]$ последовательности функций $S_{n_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots$ и, кроме того, выполняются равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = \Phi_1(x), \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = \Phi_2(x)$$

почти всюду на том же сегменте.

В работе [2] Д. Е. Меньшовым доказано, что классы тригонометрических рядов типа $A(F_1, F_2)$ и типа $B(F_1, F_2)$ совпадают, при этом в доказательстве нигде не использовано, что эти ряды являются тригонометрическими.

Таким образом имеет место следующая

Теорема 2. Каковы бы ни были измеримые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству (4) почти всюду на этом сегменте, классы ортогональных рядов типа $A(F_1, F_2)$ и типа $B(F_1, F_2)$ совпадают.

Приступим к доказательству теоремы 1. Мы будем пользоваться следующими леммами:

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система функций, определенных на $[a, b]$ и $f(x)$ — произвольная почти везде конечная измеримая функция, определенная на том же отрезке.

Для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить множество $e_\varepsilon \subset [a, b]$ и действительные числа a_{n+1} , a_{n+2} , $\dots$, a_m такие, что выполняются следующие условия

$$1) \operatorname{mes} e_3 < \varepsilon;$$

$$2) |a_k| < \varepsilon \quad n+1 \leq k \leq m;$$

$$3) \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{ce_0} < \varepsilon;$$

$$4) \left\| \sum_{k=n+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2\|f\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m,$$

где e — произвольное измеримое подмножество множества $ce_0 = [a, b] - e_0^*$.

Лемма 2. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две измеримые функции, определенные на некотором множестве E_0 положительной меры и удовлетворяющие неравенству

$$G(x) < F(x) \quad (11)$$

почти всюду на E_0 .

Тогда существует последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве E_0 и обладающих следующими свойствами.

$$1^\circ. G(x) < f_n(x) < F(x)$$

почти всюду на множестве E_0 .

2°. Для любой измеримой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

почти всюду на E_0 , существует последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$; такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на множестве E_0 .

3°. Для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{mes} E \mid |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon = 0.$$

Лемма 1 непосредственно следует из леммы 2 работы [4].

Докажем лемму 2. Рассмотрим множество $M = \{f(x)\}$ всех почти везде конечных измеримых функций $f(x)$, определенных почти всюду на E_0 и удовлетворяющих неравенству

$$G(x) < f(x) < F(x)$$

почти всюду на E_0 .

* Мы обозначаем $\left(\int_e f^2(x) dx \right)^{1/2} = \|f\|_e$.

В множестве всех почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на E_0 обычным образом, введем метрику, а именно, если $f(x)$ и $g(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные почти всюду на E_0 , то полагаем

$$\rho(f, g) = \int_{E_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx. \quad (12)$$

Как известно, сходимость некоторой последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в этом метрическом пространстве эквивалентна сходимости этой последовательности к $f(x)$ по мере на множестве E_0 .

Пусть теперь последовательность $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ всюду плотна в этом метрическом пространстве.

Обозначим через δ_i расстояние функции $g_i(x)$ от множества $M = \{f(x)\}$:

$$\delta_i = \inf_{f \in M} \rho(g_i, f)$$

и выберем для каждого i функцию $\varphi_i(x)$ из $M = \{f(x)\}$ такую, что

$$\rho(\varphi_i, g_i) \leq \delta_i + \frac{1}{i}. \quad (14)$$

Выделенная таким образом система φ_i будет обладать следующим свойством:

для любой функции $f(x) \in M$ существует последовательность $i_1 < i_2 < \dots < i_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{i_k}(x) = f(x) \quad (15)$$

почти всюду на множестве E .

В самом деле, пусть $f(x) \in M$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Возьмем $g_i(x)$ такую, чтобы

$$\rho(g_i, f) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad i > \frac{3}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Ясно, что $\delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$ и мы получаем

$$\rho(\varphi_i, f) \leq \rho(\varphi_i, g_i) + \rho(g_i, f) < \delta_i + \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \quad (17)$$

Заметим, что функцию $\varphi_i(x)$, удовлетворяющую неравенству (17), можно выбрать со сколько угодно большим номером i . Таким образом для любой функции $f(x) \in M$ существует последовательность функций из системы $\{\varphi_i(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ по мере на множестве E . Отсюда следует существование последовательности $\{\varphi_{i_k}(x)\}$, удовлетворяющей условию (15).

Пусть $\varphi(x)$ и $g(x)$ —две любые функции из множества M , т. е.

$$G(x) < \varphi(x) < F(x); \quad G(x) < g(x) < F(x) \quad (18)$$

почти всюду на множестве E_0 и пусть $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ —произвольные положительные числа.

Легко видеть, что из множества M можно выбрать конечное число функций $\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\text{mes } E[|\varphi(x) - \tau_1(x)| \geq \sigma] < \varepsilon, \quad \text{mes } E[|\tau_n(x) - g(x)| \geq \sigma] < \delta \quad (19)$$

и

$$\text{mes } E[|\tau_i(x) - \tau_{i+1}(x)| \geq \sigma] < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, (n-1)).$$

Возьмем две последовательности положительных чисел

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_i > \dots, \quad \sigma_i \rightarrow 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots, \quad \varepsilon_i \rightarrow 0. \quad (21)$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots$ рассмотрим функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ и положительные числа σ_i и ε_i . Существуют функции $f_{m_i}(x), f_{m_i+1}(x), \dots, f_{m_{i+1}-1}(x)$ из множества M такие, что

$$\begin{aligned} \text{mes } E[|\varphi_i(x) - f_{m_i}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \\ \text{mes } E[|f_{m_{i+1}-1}(x) - \varphi_{i+1}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{mes } E[|f_m(x) - f_{m+1}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \\ (m = m_i, m_i + 1, \dots, m_{i+1} - 2). \end{aligned}$$

К последовательности $\{\varphi_i(x)\}$ добавим новые функции следующим образом: для каждого $i = 1, 2, \dots$ между функциями $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ поместим функции $f_{m_i}(x), f_{m_i+1}(x), \dots, f_{m_{i+1}-1}(x)$ в возрастающем порядке индекса m , $m_i \leq m < m_{i+1} - 1$.

Полученную систему обозначим через $\{f_n(x)\}$. Система $\{f_n(x)\}$ будет удовлетворять условиям леммы 2.

Условие 1° выполнено в силу того, что каждая из функций $f_n(x)$ принадлежит множеству M , т. е. удовлетворяет неравенству

$$G(x) < f_n(x) < F(x)$$

почти всюду на E_0 .

Условие 2° выполнено в силу того, что система $\{f_n(x)\}$ содержит систему $\{\varphi_i(x)\}$, которая в силу (15) удовлетворяет условию 2° в том случае, когда $f(x)$ —любая функция такая, что

$$G(x) < f(x) < F(x) \quad (23)$$

почти всюду на E_0 , а любую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

можно приблизить в смысле сходимости почти всюду функциями, удовлетворяющими неравенству (23).

Выполнение условия 3° непосредственно следует из определения системы $\{f_n(x)\}$ и из условия (22).

Доказательство теоремы 1. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — измеримые функции, определенные на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству

$$G(x) \leq F(x) \quad (24)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Обозначим через E_0 множество тех точек, где имеет место неравенство

$$G(x) < F(x). \quad (25)$$

В том случае, когда $\text{mes } E_0 = 0$, теорема справедлива в силу теоремы 3 работы [3], так как по этой теореме существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на $[a, b]$ к функции $f(x) = G(x) = F(x)$ причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ясно, что этот ряд будет удовлетворять условиям теоремы 1 в том частном случае, когда $F(x) = G(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Предположим, что $\text{mes } E_0 > 0$. Возьмем последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на E_0 и удовлетворяющих условиям леммы 2. Каждую из функций $f_n(x)$ продолжим в отрезке $[a, b]$, полагая

$$f_n(x) = 0 \text{ при } x \in [a, b] - E_0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющих условию (21).

Применяя лемму 2, где положено $f(x) = f_1(x)$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $n = 1$, мы можем определить множество e_1 и действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, такие, что выполняются условия:

$$1) \text{ mes } e_1 < \varepsilon_1;$$

$$2) |a_k| < \varepsilon_1 \quad 1 \leq k \leq n_1;$$

$$3) \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k \varphi_k(x) - f_1(x) \right\|_{e_1} < \varepsilon_1;$$

$$4) \left\| \sum_{k=1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon_2 + 2 \|f_1(x)\|_e, \quad 1 \leq s \leq n_1,$$

где e — произвольное измеримое подмножество множества

$$ce_1 = [a, b] - e_1.$$

Предположим, что числа $a_1, a_2, \dots, a_{n_i}, \dots, a_{n_i}$ определены.

В формулировке леммы 2 положим

$$n = n_i + 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_{i+1}, \quad f(x) = f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x)$$

и определим числа $a_{n_{i+1}}, a_{n_{i+1}+1}, \dots, a_{n_{i+1}}$ и множество e_{i+1} так, чтобы выполнялись условия

$$1) \quad \text{mes } e_{i+1} < \varepsilon_{i+1};$$

$$2) \quad |a_k| < \varepsilon_{i+1}, \quad n_i + 1 \leq k \leq n_{i+1};$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) - f_{i+1}(x) \Big|_{ce_{i+1}} < \varepsilon_{i+1};$$

$$4) \quad \left\| \sum_{k=n_i+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_{i+1} + 2 \left\| f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_e.$$

$n_i + 1 \leq s \leq n_{i+1}$ и e — произвольное измеримое подмножество множества $ce_{i+1} = [a, b] - e_{i+1}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (27)$$

где коэффициенты a_k определены вышеуказанным процессом. Этот ряд будет обладать тем свойством, что для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ выполняются условия 1), 2), 3), 4)*.

Функции $F_1(x)$ и $G_1(x)$ определим следующим образом:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0. \end{cases} \quad (28)$$

$$G_1(x) = \begin{cases} G(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0. \end{cases} \quad (29)$$

Покажем, что $F_1(x)$ и $G_1(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере, ряда (27).

Покажем, что $F_1(x)$ есть верхний предел по мере ряда (27).

Пусть $\varphi(x)$ — измеримая функция, определенная на $[a, b]$.

* При $i = 0$ полагаем $n_i = 0$.

Если $\text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x)] = 0$, то выполнение равенства а° очевидно (см. (7)).

Предположим, что множество $E[\varphi(x) > F_1(x)]$ имеет положительную меру. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число. Выберем $\sigma > 0$ такое, чтобы для множества $E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma]$ выполнялось неравенство

$$\text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x)] \leq \text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (30)$$

Так как $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ (см. (21)), то из условий 1) и 3) непосредственно следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f_i(x) \quad (i=1, 2, \dots)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю, при $i \rightarrow \infty$.

С другой стороны, в силу определения функций $f_i(x)$, последовательность

$$f_{i+1}(x) - f_i(x) \quad (i=1, 2, \dots)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю при $i \rightarrow \infty$ (см. (26) и условие 3° леммы 2).

Таким образом будем иметь также, что последовательность

$$f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю при $i \rightarrow \infty$.

В силу вышесказанного и в силу условия 4), так как $\text{mes } e_i < \varepsilon_i$ и $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, легко видеть, что можно взять i_0 настолько большое, чтобы при $i \geq i_0$ выполнялись неравенства

$$\text{mes } E \left[\left| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f_i(x) \right| \geq \frac{\sigma}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{4}; \quad (31)$$

$$\text{mes } E \left[\left| \sum_{k=n_i+1}^s a_k \varphi_k(x) \right| \geq \frac{\sigma}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{4} \quad (32)$$

для всех s , удовлетворяющих неравенству $n_i + 1 \leq s \leq n_{i+1}$.

Возьмем $n \geq n_{i_0}$. Предположим, что

$$n_i \leq n \leq n_{i+1}, \quad i \geq i_0. \quad (33)$$

Рассмотрим множество

$$E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)],$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (34)$$

В силу (30) очевидно имеем

$$\begin{aligned} \text{mes } E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)] &\leq \text{mes } E[S_n(x) > \\ &> \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как

$$E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] \subset E[S_n(x) > F_1(x) + \sigma] \quad (36)$$

и так как

$$G_1(x) < f_1(x) < F_1(x) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (37)$$

то

$$\begin{aligned} E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] &\subset \\ &\subset E[|S_n(x) - f_1(x)| \geq \sigma]. \end{aligned} \quad (38)$$

Из (35) и (38) следует

$$\begin{aligned} \text{mes } [E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)]] &\leq \\ &\leq \text{mes } E[|S_n(x) - f_1(x)| \geq \sigma + \frac{\varepsilon}{2}]. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что в силу (33) и (34) можно написать

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n_l} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_l+1}^n a_k \varphi_k(x); \quad i \geq i_0. \quad (40)^*$$

Принимая во внимание (40), очевидно имеем

$$\begin{aligned} E[|S_n(x) - f_1(x)| \geq \sigma] &\subset E\left[\left|\sum_{k=1}^{n_l} a_k \varphi_k(x) - f_1(x)\right| \geq \frac{\sigma}{2}\right] + \\ &+ E\left[\left|\sum_{k=n_l+1}^n a_k \varphi_k(x)\right| \geq \frac{\sigma}{2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (31) и (32) получаем

$$\text{mes } E[|S_n(x) - f_1(x)| \geq \sigma] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (41)$$

Сравнивая (39) и (41), мы заключаем;

* при $n = n_l$ второе слагаемое равенства (40) исчезает.

$$\text{mes} \{ E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)] \} < \varepsilon. \quad (42)$$

при $n \geq n_{i_0}$, где n_{i_0} , зависит только от ε .

Таким образом мы доказали, что для последовательности частных сумм ряда (27) и функции $F_1(x)$ имеет место первое условие определения верхнего предела (см. условие а° или (7)).

Докажем, что выполняется также условие в° (см. 8).

Пусть $\chi(x)$ произвольная измеримая функция, определенная почти всюду на $[a, b]$ и такая, что

$$\text{mes} E[F_1(x) > \chi(x)] > 0. \quad (43)$$

В силу определения функций $f_i(x)$ и $F_1(x)$ (см. (28)) (26) и условие 2° леммы 2) мы можем выбрать последовательность $i_1 < i_2 < \dots$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(x) = F_1(x) \quad (44)$$

почти всюду на $[a, b]$.

С другой стороны, как мы уже знаем, последовательность функций

$$S_{n_{i_k}}(x) - f_{i_k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

будет сходиться по мере на $[a, b]$ к нулю, при $k \rightarrow \infty$.

Отсюда и из (44) вытекает, что существует некоторая последовательность $\{S_{m_k}(x)\}$ частных сумм ряда (27), которая сходится к $F_1(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Тогда в силу теоремы Егорова* легко видеть, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{ E[S_{m_k}(x) > \chi(x)] \cdot E[F_1(x) > \chi(x)] \} = \\ \text{mes} E[F_1(x) > \chi(x)] > 0$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \text{mes} \{ E[S_n(x) > \chi(x)] \cdot E[F_1(x) > \chi(x)] \} > 0.$$

Итак, мы доказали, что $F_1(x)$ является верхним пределом по мере на $[a, b]$ последовательности частных сумм ряда (27).

Точно так же можно доказать, что $G_1(x)$ есть нижний предел по мере на $[a, b]$ ряда (27).

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (45)$$

обладает тем свойством, что он сходится по мере на $[a, b]$ к функции

* Здесь употребляется теорема Егорова в обобщенном виде, когда предельная функция может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in E_0 \\ F(x) = G(x) & \text{при } x \in CE_0^*, \end{cases} \quad (46)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (47)$$

Такой ряд существует согласно теореме 3 работы [3].

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (48)$$

полученный сложением рядов (27) и (45), т. е. имеем

$$c_n = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (49)$$

Покажем, что ряд (48) удовлетворяет условиям теоремы 2.

В силу соотношений (28), (29), (46) и из определения рядов (27) и (45) легко видеть, что функции $F(x)$ и $G(x)$ будут соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда (48).

Далее, из условия 2) (см. стр. 10) и из (21) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (50)$$

Отсюда, принимая во внимание (47) и (4), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (51)$$

Проверим выполнение остальных условий теоремы 1. Пусть $f(x)$ произвольная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x) \quad (52)$$

почти всюду на $[a, b]$.

В силу определения множества E_0 будем иметь

$$f(x) = G(x) = F(x) \quad (53)$$

почти всюду на $CE_0 = [a, b] - E_0$.

В силу условия 2° леммы 2 существует последовательность $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(x) = f(x) \quad (54)$$

почти всюду на E_0 .

Так как последовательность функций

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} a_s \varphi_s(x) = f_{i_k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

* Напомним, что множество E_0 есть множество тех точек из $[a, b]$, для которых $G(x) < F(x)$.

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю при $k \rightarrow +\infty$, то в силу (54) и в силу того, что по определению $f_i(x) = 0$ при $x \in CE_0$ ($i = 1, 2, \dots$) последовательность частных сумм

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} a_s \varphi_s(x)$$

будет сходиться по мере на $[a, b]$ при $k \rightarrow \infty$ к функции $\psi(x)$ определяемой равенством

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0. \end{cases}$$

Тогда в силу определения ряда (45) и в силу равенства (53) последовательность частных сумм

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} c_s \varphi_s(x)$$

ряда (48) будет сходиться по мере на $[a, b]$ при $k \rightarrow \infty$ к $f(x)$.

Отсюда вытекает, что существует последовательность $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} c_i \varphi_i(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Постъ теперь для некоторой последовательности $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ последовательность

$$\sum_{i=1}^{m_k} c_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (44) сходится на некотором множестве E положительной меры к некоторой функции $f(x)$. Покажем, что

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x) \quad (55)$$

почти всюду на E .

Выполнение неравенства (55) почти всюду на множестве $E \cdot CE_0$ вытекает из того, что ряд (48) сходится по мере на CE_0 к функции $F(x) = G(x)$.

Проверим выполнение неравенства (55) для множества $E \cdot E_0$. Так как ряд (45) сходится по мере на E_0 к нулю, то мы можем предполагать, что последовательность $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ обладает тем свойством, что последовательность

$$\sum_{i=1}^{m_k} a_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (27) сходится почти всюду на $E \cdot E_0$ к $f(x)$.

Далее мы можем предполагать, что числа m_k удовлетворяют неравенствам

$$n_{m_k} < m_k \leq n_{m_k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (56)$$

где $\{n_{m_k}\}$ некоторая подпоследовательность последовательности чисел n_i , фигурирующих в условиях 1), 2), 3), 4) (см. стр. 10).

Из неравенства (32), так как в этом неравенстве σ и ε произвольные положительные числа, видно, что последовательность

$$\sum_{i=n_{m_k}+1}^{m_k} a_i \varphi_i(x)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю.

Отсюда вытекает, что последовательность

$$\sum_{i=1}^{n_{m_k}} a_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (27) сходится по мере на множестве $E \cdot E_0$ к $f(x)$.

Но, как мы видели раньше, в силу условий 1) и 3) (стр. 10), а также в силу (21) последовательность функций

$$\sum_{i=1}^{n_{m_k}} a_i \varphi_i(x) - f_{m_k}(x)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к нулю.

Таким образом последовательность $\{f_{m_k}(x)\}$ будет сходиться по мере на множестве $E \cdot E_0$ к $f(x)$.

Отсюда в силу того, что

$$G(x) \leq f_{m_k}(x) \leq F(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ получаем

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

почти всюду на множестве $E \cdot E_0$.

Доказательство теоремы 1 закончено.

Ա. Ա. Թադադյան

ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ենթադրենք $\{\varphi_n(x)\}$ -ը $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

շարքը կոչվում է ունիվերսալ, եթե $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ցանկացած չափելի ֆունկցիային համապատասխանում է $\{n_i\}$ բնական թվերի անսպասելի հաջորդականություն, որ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = f(x) \quad (2)$$

համարյա ամենուրեք $[a, b]$ -ի վրա, որտեղ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

$[\delta]$ աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ ցանկացած լրիվ օրթոնորմալ սիստեմի համար գոյություն ունի ունիվերսալ շարք՝ զրոյի ձգտող գործակիցներով:

Ենթադրենք տված են $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված $F_1(x)$ և $F_2(x)$ չափելի ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են՝

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad (4)$$

անհավասարությանը համարյա ամենուրեք $[a, b]$ -ի վրա:

Սահմանում (1) շարքը կոչվում է ունիվերսալ $F_1(x)$ և $F_2(x)$ ֆունկցիաների նկատմամբ, եթե $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է

$$F_1(x) \leq f(x) \leq F_2(x) \quad (5)$$

անհավասարությանը համարյա ամենուրեք, կարելի է բնորոշել բնական թվերի անոց $\{n_i\}$ հաջորդականություն, որի համար (2) հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք $[a, b]$ -ի վրա:

Հետևելով Մենշովին, $F_1(x)$ և $F_2(x)$ ֆունկցիաների նկատմամբ ունիվերսալ շարքը մենք կանվանենք $A(F_1, F_2)$ տիպի շարք:

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցված է $A(F_1, F_2)$ տիպի շարքի գոյությունը, որի անորոշության սահմանները ըստ չափի հանդիսանում են $F_1(x)$ և $F_2(x)$ ֆունկցիաները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меньшов Д. Е.* О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды математического института имени В. А. Стеклова, вып. XXXII, 1950.
2. *Меньшов Д. Е.* О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов. Ученые записки МГУ, вып. 165, математика, том VII 1954.
3. *Талалян А. А.* О сходимости ортогональных рядов. ДАН СССР, том 110, № 4 (1956).
4. *Талалян А. А.* О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p . Известия АН АрмССР (серия физико-математических наук), том X, 1 (1957).
5. *Талалян А. А.* О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН АрмССР (серия физико-математических наук), том X, 3, 1957.