

А. Л. Шагинян

Об одном основном неравенстве в теории функций и ее приложениях

§ 1. Пусть $f(z)$ голоморфная в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию:

$$\int_0^{2\pi} |\lg |f(e^{i\varphi})|| d\varphi$$

равностепенно абсолютно непрерывна относительно φ при $\rho \rightarrow 1$. Класс таких функций обозначим через C . Как известно [1], функции $f(z)$ этого класса имеют почти всюду на $|z|=1$ предельные значения $f(e^{i\varphi})$, произведение Бляшке из нулей функции $f(z)$.

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}$$

сходится равномерно внутри $|z| < 1$ и (ср. [1] стр. 74)

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi = 0. \quad (1)$$

Допустимы также предельные переходы

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi &= \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \\ \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi &= \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Класс таких функций имеет параметрическое представление

$$f(z) = e^{i\alpha} \cdot B(z) \cdot e^{\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \lg p(\theta) d\theta}, \quad (3)$$

где α — вещественное постоянное, $B(z)$ — произведение Бляшке и $\lg p(\theta)$ суммируемая функция ([1], стр. 89—93).

Рассмотрим гармоническую в $|z| < 1$ функцию

$$\lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right|$$

где λ — порядок нуля функции $f(z)$ в $z=0$. Представим эту функцию в круге $|z| < 1$ посредством интеграла Пуассона

$$\begin{aligned} \lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} d\varphi - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} d\varphi - \lambda \lg \rho. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\geq \lg |B(z)| + \frac{\rho - |z|}{\rho + |z|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{\rho - |z|}{\rho + |z|} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \lambda \lg |z| - \lambda \lg \rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Совершив предельный переход согласно равенствам (1)–(3), получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\geq \frac{1 - |z|}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{\pi(1 - |z|)} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \lg |B(z)| + \lambda \lg |z|. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь $\omega(t)$ произвольная положительная непрерывная функция, не возрастающая в промежутке $[0, 1]$, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty \quad (6)$$

где E — произвольная совокупность в промежутке $[0, 1]$.

Возьмем внутри круга непрерывную дугу L , соединяющую центр круга с окружностью. Для простоты будем считать пока, что окружности $|z| = \text{const}$ пересекают L в одной точке.

Спроектируем круговыми дугами точки совокупности E , лежащей на радиусе $0 \leq x < 1$, на дугу L . Получаемую таким образом совокупность на L обозначим через E^* .

Интеграл

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z|$$

будет некоторый криволинейный интеграл, распространенный по совокупности E^* . Под знаком интеграла z текущая координата точек из совокупности E^* на дуге L .

Помножим теперь обе части неравенства (5) на $\omega(|z|)$ и проинтегрируем по совокупности E^* .

Получим

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| &\geq \frac{1}{4\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \cdot \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} \cdot \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| + \\ &+ \lambda \int_E \omega(t) \lg t dt. \end{aligned}$$

Будем считать $\max \omega(t) = \omega(0) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| &\geq \frac{1}{4\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \cdot \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} \cdot \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| - \lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим теперь снизу интеграл

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \omega(|z|) \lg \left| \frac{z - a_k}{1 - \bar{z} a_k} \right| d|z|.$$

Из элементарных геометрических соображений следует, что

$$\left| \frac{z - a_k}{1 - \bar{z} a_k} \right| \geq \left| \frac{|z| - |a_k|}{1 - |z| |a_k|} \right|.$$

Поэтому

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t |a_k|} \right| dt, \quad (8)$$

где интегрирование производится по вещественному аргументу t на совокупности $E \subset [0, 1)$.

Приходим к оценке интеграла

$$\int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - a}{1 - ta} \right| dt,$$

где $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned} \int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - a}{1 - ta} \right| dt &= \int_{E(t < a)} \omega(t) \lg \frac{a - t}{1 - at} dt + \\ &+ \int_{E(t > a)} \omega(t) \lg \frac{t - a}{1 - ta} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где первый интеграл распространен на порцию совокупности E в промежутка $0 \leq t < a$, а второй интеграл на дополнительную часть E . Ради краткости обозначим

$$\int_{E(t < a)} \omega(t) \lg \frac{a-t}{1-at} dt = I_1$$

$$\int_{E(t > a)} \omega(t) \lg \frac{t-a}{1-at} dt = I_2.$$

Оценка I_1 .

Подставим

$$\frac{a-t}{1-at} = x, \quad (10)$$

следовательно

$$dt = -\frac{1-a^2}{(1-ax)^2} dx$$

$$I_1 = - \int_{E^*(x < a)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} \lg x dx,$$

где совокупность $E^*(x < a)$ получена из $E(t < a)$ преобразованием (8); и так как при этом dx и dt имеют обратные знаки, то снизу указано стрелкой направление интегрирования справа налево.

$$I_1 = -(1-a^2) \int_{E^*(x < a)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx.$$

Нам в дальнейшем достаточно будет пользоваться выводимыми оценками при

$$a \geq \frac{1}{2}.$$

Поэтому указанные интегралы будем оценивать при этом условии.

Разбиваем теперь I_1 на два интеграла

$$I_1 = -(1-a^2) \int_{E^*\left(x < \frac{1}{2}\right)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx -$$

$$-(1-a^2) \int_{E^*\left(\frac{1}{2} < x < a\right)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx < -$$

$$\begin{aligned}
 & - (1-a^2) \frac{\omega(0)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \int_0^1 \lg \frac{1}{x} dx - \\
 & - (1-a^2) \int_{E^*\left(\frac{1}{2} < x < a\right)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{\lg 2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-ax)} dx.
 \end{aligned}$$

Первый интеграл вычисляется, а в последнем перейдем опять к аргументу t посредством соотношения (8).

Получим

$$I_1 > -8(1-a) - 4 \lg 2 (1-a) \int_{E\left(\frac{a-1/2}{1-a/2} < t < a\right)} \omega(t) \frac{dt}{1-at}.$$

Окончательно

$$I_1 > -4(1-a) \left\{ 2 + \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (11)$$

Оценка I_2 .

$$I_2 = \int_{E(t \geq a)} \omega(t) \lg \frac{t-a}{1-at} dt.$$

Подставляя

$$\frac{t-a}{1-at} = x, \quad dt = \frac{1-a^2}{(1+ax)^2} dx,$$

получим

$$I_2 = (1-a^2) \int_{E^*} \omega\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) \frac{\lg x}{(1+ax)^2} dx,$$

где E^* образ $E(t \geq a)$, при преобразовании $\frac{t-a}{1-at} = x$. Но здесь $\frac{a+x}{1+ax}$ возрастающая функция, поэтому

$$I_2 > -2\omega(a)(1-a) > -2\omega(0)(1-a).$$

В силу оценок для I_1 и I_2 , получаем

$$\int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t-a}{1-ta} \right| dt > -2(1-a) \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (12)$$

Представим теперь произведение Бляшке $B(z)$ в виде

$$B(z) = \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \frac{z - a_k}{1 - \bar{z}a_k} \prod_{|a_k| \geq \frac{1}{2}} \frac{z - a_k}{1 - \bar{z}a_k}.$$

Из (8) и (10) получим

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \int_E \omega(t) \lg \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t|a_k|} \right| dt -$$

$$- 2 \sum_{|a_k| \geq \frac{1}{2}} (1 - |a_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}$$

или

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \int_E \omega(t) \lg \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t|a_k|} \right| dt -$$

$$- 2 \sum_1^{\infty} (1 - |a_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (13)$$

Для оценки интеграла в правой части, воспользуемся известным неравенством Иенсена

$$\lg \prod_1^{\infty} |a_k| \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Обозначив число нулей a_k , удовлетворяющих неравенству

$$|a_k| < \frac{1}{2},$$

через $n\left(\frac{1}{2}\right)$, получим из предыдущего неравенства

$$\lg \left(\frac{1}{2} \right)^{n\left(\frac{1}{2}\right)} \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi,$$

или

$$n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi \lg 2} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (14)$$

Элементарно вычисляется интеграл

$$\int_0^1 \lg \left| \frac{x - \alpha}{1 - x\alpha} \right| dx = \alpha \lg \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \lg(1 - \alpha)$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\left| \int_0^1 \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx \right| = \alpha \lg \frac{1}{\alpha} + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \lg \frac{1}{1-\alpha}.$$

Первое слагаемого достигает наибольшего значения при $\alpha = \frac{1}{e}$, а второе достигает наибольшего значения при $\alpha = 0$. Поэтому

$$\left| \int_0^1 \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx \right| < \frac{1}{e} + 1 < 2.$$

В силу этих оценок

$$\begin{aligned} \int_E \omega(t) \lg \prod_{|\alpha_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |\alpha_k|}{1 - t|\alpha_k|} \right| dt &> -\omega(0) n\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 > - \\ &- 2 \left\{ \frac{1}{\lg 2} + \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi \lg 2} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Из (13) получается

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| &\geq - \\ &- \frac{2}{\lg 2} \left\{ 1 + \lg 2 \cdot \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi - \right. \\ &\left. - 2 \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из

$$\lg \left| \prod_1^{\infty} \alpha_k \right| \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi, \quad (16)$$

так как

$$1 - x \leq e^{-x} \quad \text{при } 0 < x < 1,$$

получаем

$$\prod_1^{\infty} |\alpha_k| \leq e^{-\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|)},$$

а отсюда

$$\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \leq -\lg \prod_1^{\infty} |\alpha_k|.$$

Тогда в силу неравенства (13) Иенсена

$$\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \leq \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi.$$

На основании этого неравенства перепишем (12) в виде

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| &\geq -3 \left\{ 1 + \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\} - \\ &- 2 \left\{ \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\} \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| &\geq - \\ &- \left(13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C, \end{aligned}$$

где постоянное

$$C = -3 - 13 \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} - 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt.$$

Сформулируем полученные оценки в виде следующей леммы.

Основная лемма. Если $B(z)$, $B(0) \neq 0$ есть произвольное сходящееся произведение Бляшке и $\omega(t)$ непрерывная, невозрастающая функция в промежутке $0 \leq t < 1$, удовлетворяющая условию

$$\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \infty, \quad \omega(0) = 1, \quad (18)$$

то

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| &\geq \int_E \omega(t) \lg \prod_{|\alpha_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - \alpha_k}{1 - t\alpha_k} \right| dt - \\ &- 2 \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если же B есть произведение Бляшке некоторой функции $f(z)$ из класса S , то

$$\int_E \omega(|z|) \lg B(z) |dz| > - \\ - \left(13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi - C$$

где

$$C = 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt + 13 \lg \frac{\lambda}{|f^{(\lambda)}(0)|} + 3. \quad (20)$$

Легко показать, что для произвольного произведения Бляшке, вообще говоря, возможны случаи, когда

$$\int_E \lg |B(z)| |dz| = -\infty.$$

В самом деле, из равенства

$$\int_E \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx = \alpha \lg \alpha + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \lg(1-\alpha),$$

следует, для произведения Бляшке с положительными нулями α_k , для сходимости интеграла

$$\int_0^1 \lg |B(x)| dx$$

необходимо и достаточно

$$и \left. \begin{aligned} \sum_1^\infty (1 - |\alpha_k|) < \infty \\ \sum_1^\infty (1 - |\alpha_k|) \lg \frac{1}{1 - |\alpha_k|} < \infty \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

В частности, если $\alpha_k > 0$

$$\sum_1^\infty (1 - \alpha_k) < \infty,$$

и однако

$$\sum_1^\infty (1 - \alpha_k) \lg \frac{1}{1 - \alpha_k} = \infty,$$

что имеет место, например, при

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{k(\lg k)^s},$$

где

$$1 < s < 2$$

получим

$$\int_0^1 \lg |B(x)| dx = -\infty,$$

однако $B(z)$ сходится.

Таким образом для неравенства типа

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| > -\infty$$

присутствие какого-то убывающего множителя типа $\omega(t)$ необходимо.

Докажем, что и порядок убывания $\omega(t)$, характеризуемый условием

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty,$$

также точный.

Для этого считая $\omega(t)$ опять же монотонно убывающей, исходя из соотношения

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty$$

оценим

$$\int_0^1 \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z|.$$

Предварительно оценим асимптотически интеграл

$$I = \int_0^1 \omega(t) \lg \left| \frac{t-a}{1-at} \right| dt$$

при $a \rightarrow 1$.

$$I < - \int_0^a \frac{\omega(t)}{1-t} dt \cdot (1-t) \lg \frac{1-at}{a-t} dt. \quad (22)$$

Функция $y = (1-t) \frac{1-at}{a-t}$ положительная в промежутке $0 < t < a$, причем $y(0) = \lg \frac{1}{a}$ и $y(a) = \infty$. Определим наименьшее значение функции $y(t)$ в промежутке $0 < t < a$.

$$y'(t) = \lg \frac{a-t}{1-at} + \frac{(1-t)(1-a^2)}{(a-t)(1-at)}.$$

Нетрудно видеть, что эта функция обращается в нуль в единственной точке t_0 , $0 < t_0 < a$ и при $a \rightarrow 1$ также $t_0 \rightarrow 1$.

Подставим в равенстве

$$\lg \frac{a-t_0}{1-at_0} + \frac{(1-t_0)(1-a^2)}{(a-t_0)(1-at_0)} = 0$$

$$1-a = \delta_1, \quad 1-t_0 = \delta_2, \quad \delta_2 > \delta_1$$

получим

$$\lg \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2 + \delta_1} + \frac{\delta_2 \cdot \delta_1 (1+a)}{(\delta_2 - \delta_1)(\delta_2 + \delta_1)} = 0.$$

Переходя к пределу, когда $a \rightarrow 1$, получим для предела отношения $\frac{\delta_2}{\delta_1}$, т. е. для $\Delta = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\delta_2}{\delta_1}$ равенство

$$\lg \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} + \frac{2\Delta}{\Delta^2 - 1} = 0, \quad (23)$$

которое имеет единственный корень в промежутке $1 < \Delta < \infty$.

И так, для точки минимума имеем асимптотическую оценку

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \rightarrow \Delta > 1 \quad \text{т. е.} \quad 1-t_0 \sim \Delta(1-a).$$

Подставляя это значение в $y(t)$, получим оценку $\min y(t)$ ($0 < t < a$) при $a \rightarrow 1$

$$I_{\min} \simeq \Delta(1-a) \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1}, \quad (24)$$

где постоянное Δ есть корень уравнения (23).

Тогда из (22) получим

$$I < -y(t_0) \int_0^{t_0} \frac{\omega(t)}{1-t} dt,$$

или асимптотически

$$I < -\Delta \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1} (1-a) \int_0^{1-\Delta(1-a)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt. \quad (25)$$

Ради строгости рассуждений, изменив немного постоянное число Δ , можно считать

$$J^* < -\Delta \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1} \sum_{k=n_0}^{\infty} (1-a_k) \int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt, \quad (26)$$

где $a_k > 0$ нули исследуемого произведения Бляшке, а n_0 достаточно большое число, для которого выполняются (25), с несколько измененным по сравнению с корнем уравнения (23) значением Δ для всех a_k ($k = n_0, n_0 + 1, \dots$).

Из условия

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty \quad (27)$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty. \quad (28)$$

Покажем теперь, что сколь медленно при $x \rightarrow 1$ не расходился интеграл

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{1-t} dt$$

к бесконечности, всегда можно указать такое сходящееся произведение Бляшке, для которого

$$\int_0^1 \omega(t) \lg |B(t)| dt = -\infty.$$

В самом деле, пусть $\psi(x)$ монотонная, сколь угодно медленно возрастающая к бесконечности дифференцируемая функция в промежутке $[0; 1]$.

Выберем функцию $\omega(t)$ из соотношения

$$\int_0^{1-\Delta(1-x)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \psi(x).$$

Получаем

$$\psi'(x) = \frac{\omega[1-\Delta(1-x)]}{1-x},$$

а отсюда

$$\omega(t) = \frac{1-t}{\Delta} \psi' \left(1 - \frac{1-t}{\Delta} \right). \quad (29)$$

Тогда

$$\int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \psi(a_k), \quad (30)$$

где $\psi(a_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ с заданной сколь угодно медленной скоростью.

Для доказательства нашего утверждения остается определить числа

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \rightarrow 1$$

такие, что

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) < \infty$$

а

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) \psi(a_n) = \infty.$$

Возьмем функцию ψ из логарифмической шкалы $\psi(x) = \lg_p \frac{1}{1-x}$, где $\lg_p t$ есть p -кратный логарифм.

При больших значениях p , $\psi(x)$ будет сколь угодно медленно возрастающей в этой шкале. Возьмем тогда

$$1 - a_n = \frac{1}{n \lg n \dots (\lg_p n)^{1+\varepsilon}}$$

тогда

$$\psi(a_n) = \lg_p \{n \lg n \dots \lg_p n^{1+\varepsilon}\} > \lg_p n;$$

при $n > e^{\frac{p}{e \dots e}}$ или $1 - a_n < C$,

где C — некоторая постоянная, зависящая от p .

$$(1 - a_n) \psi(a_n) > \frac{1}{n \lg n \lg_2 n \dots (\lg_p n)^{\varepsilon}}.$$

Поэтому

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) < \infty$$

и

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) \psi(a_n) = \infty$$

тем самым наше утверждение доказано.

§ 2. Применим теперь доказанную лемму для вывода одного весьма полезного неравенства.

Пусть опять $f(z)$ принадлежит классу C в круге $|z| < 1$.

Тогда из неравенства (5) при $\omega(t)$, удовлетворяющей условиям нашей леммы, получим

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| |dz| &\geq \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| |dz| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \int_E \omega(t) \lg t \, dt > \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi - \\
& - \left(13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt - \frac{1}{2} \int_E (1-t) \omega(t) \, dt \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi + \\
& + \lambda \int_E \omega(t) \lg t \, dt = C
\end{aligned}$$

а отсюда, учитывая неравенство

$$\lambda \int_E \omega(t) \lg t \, dt > \lambda \int_0^1 \lg t \, dt = \lambda,$$

получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi < \frac{\pi}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| \, d|z| + \\
& + \frac{13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt}{\frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi + C,
\end{aligned} \quad (31)$$

где

$$C = 3 + \lambda + 13 \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \, dt. \quad (32)$$

Применив теперь к $\lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right|$ формулу Пуассона, получим

$$\begin{aligned}
& \lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} \, d\varphi + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} \, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |\rho^\lambda B(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi,
\end{aligned} \quad (33)$$

так как $f(z)$ принадлежит классу C , то в неравенстве

$$|g|f(z)| \leq \frac{\rho}{\rho - |z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi + \frac{\rho - |z|}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi +$$

$$+ \frac{\rho - |z|}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg |\rho^\lambda B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi,$$

вытекающем из (32), перейдя к пределу, когда $\rho \rightarrow 1$; согласно (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ (1-|z|) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

В силу неравенства (31) отсюда получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ (1-|z|) \cdot \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\pi}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t}} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| + \right. \\ &\left. + \frac{13+4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Если $f(z)$ принадлежит к классу S функций, представимых в виде (3), и $\omega(t)$ непрерывная, невозрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty, \quad \omega(0) = 1$$

на произвольной совокупности E на отрезке $0 \leq t < 1$, то в любой точке круга $|z| < 1$ имеет место оценка

$$|f(z)| \leq A \exp \left\{ \frac{1-|z|}{4} \frac{\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z|}{\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t}} + \right.$$



$$\left. + \frac{1}{\pi(1-|z|)} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}$$

где

$$A = \exp \left\{ \frac{13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C \right\} \quad (36)$$

а C определяется соотношением (32).

В частном случае, когда $f(z)$ ограничена

$$|f(z)| < 1;$$

E — есть отрезок $0 \leq t < 1$ и равномерно на некоторой дуге, соединяющей начало координат с окружностью

$$|f(z)| < \varepsilon,$$

тогда будет

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi = 0$$

и

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| < C \lg \varepsilon.$$

Поэтому в этом частном случае получим

$$|f(z)| < \varepsilon^{c(1-|z|)}$$

т. е. неравенство Миллу ([2] либо [3]).

Так как в правой части неравенства (35) фигурирует значение $\lg |f(z)|$ по внутренней к кругу совокупности, то это неравенство имеет применения в такого же рода вопросах, что и неравенство Миллу, а также в вопросах более тонких, связанных с поведением аналитических функций у границы области их существования.

§ 3. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z| < 1$ и

$$|f(z)| < 1.$$

Относительно таких функций известно, что если

$$f(z) \neq 0$$

то существующие почти всюду, согласно Фату, граничные значения $f(e^{i\varphi})$ удовлетворяют неравенству

$$\int_0^{2\pi} \lg |f(e^{i\varphi})| d\varphi > -\infty$$

(Карлеман [4]).

Отсюда следует, что для тождественного обращения в нуль ограниченной в круге функции $f(z)$ необходимо и достаточно условие

$$\int_0^{2\pi} \lg |f(e^{i\varphi})| d\varphi = -\infty. \quad (37)$$

В частности, если $f(z)$ ограничена в $|z| < 1$ и удовлетворяет на границе $|z|=1$ неравенству

$$|f(z)| < e^{-\frac{1}{1-|z|}}, \quad (38)$$

то, как легко проверить, выполняется условие (37) и, следовательно,

$$f(z) \equiv 0.$$

Однако пример функции

$$f_0(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{1-z} \right\}$$

показывает, что существует ограниченная в $|z| < 1$ функция, которая при приближении к границе по внутренней кривой, например по положительной оси, стремится к нулю с такой же скоростью (38), однако $f_0(z) \not\equiv 0$. Это показывает, что для тождественного обращения $f(z)$ в нуль нужно будет потребовать, чтобы $f(z)$ на внутренней дуге убывал быстрее, чем это дается неравенством (38). Для определения этой предельной скорости применим неравенство (36), которое в нашем случае примет вид

$$|f(z)| < A \exp \left\{ \frac{1-|z|}{4} \cdot \frac{\int_0^1 \omega(x) \lg |f(x)| dx}{\int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x} dx} \right\}.$$

Отсюда видно, что при

$$\int_0^1 \omega(x) \lg |f(x)| dx = -\infty \quad (39)$$

$$f(z) \equiv 0.$$

Если охарактеризовать скорость убывания $f(z)$ на оси OX неравенством типа

$$|f(x)| < e^{-\frac{p(x)}{1-x}} \quad (40)$$

где $p(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1-0$, то (39) будет выполнено при

$$\int_0^1 \frac{\omega(x) dx}{1-x} < \infty \quad (41)$$

и

$$\int_0^1 \frac{\omega(x) p(x)}{1-x} dx = \infty. \quad (42)$$

Условием (42) определяется рост $p(x)$, гарантирующий согласно неравенству (40) тождественное обращение $f(z)$ в нуль.

Например, если брать

$$\omega(x) = \frac{1}{\lg \frac{1}{1-x} \lg_2 \frac{1}{1-x} \cdots \lg_p^{l+\varepsilon} \frac{1}{1-x}}$$

$\varepsilon > 0$, где $\lg_p t$ есть p -кратный логарифм, то условие (41) будет выполнено. Тогда неравенство (39) примет вид

$$\int_0^1 \frac{p(x) dx}{(1-x) \lg \frac{1}{1-x} \cdots \lg_p^{l+\varepsilon} \frac{1}{1-x}} = \infty$$

что будет иметь место, например, при

$$p(x) = \left(\lg_p \frac{1}{1-x} \right)^{\varepsilon}.$$

Таким образом для ограниченной в круге $|z| < 1$ функции неравенство

$$|f(z)| < e^{-\frac{\left(\lg_p \frac{1}{1-|z|} \right)^{\varepsilon}}{1-|z|}}$$

при сколь угодно малом ε и любом p гарантирует равенство

$$f(z) \equiv 0.$$

Пусть теперь $p(x)$ дифференцируема и, сколь угодно медленно возрастаая, стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow 1-0$.

Возьмем за $\omega(x)$ функцию

$$\omega(x) = \frac{(1-x) p'(x)}{[p(x)]^{1+\varepsilon}}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое фиксированное число. Легко проверить, что для этой функции $\omega(x)$ выполняется условие (41) и одновременно (42). Отсюда следует:

Теорема 2. Если $f(z)$ голоморфна в $|z| < 1$ и $f(z) \in C$, то из

$$|f(z)| < e^{-\frac{p(|z|)}{1-|z|}}$$

следует $f(z) \equiv 0$, если только $p(|z|)$ при $|z| \rightarrow 1$ стремится к $+\infty$, хотя бы сколь угодно медленно. Что условие (41) относительно $\omega(x)$, следовательно и относительно $p(x)$, ослабить нельзя, следует из того, что при $\omega(x)$, удовлетворяющем условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x} dx = \infty, \quad (43)$$

теорема 2, вообще говоря, не верна.

Это следует из следующего примера.

Пусть

$$f_0(z) = e^{-\frac{1}{1-z}}.$$

Эта функция ограничена в $|z| < 1$ и при $\omega(x)$, удовлетворяющем условию (43).

$$\int_0^1 \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| = -\infty,$$

где интеграл берется по любой внутренней дуге, исходящей из точки $z=1$ внутри угла $|\arg(1-z)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Однако $f_0(z) \neq 0$.

Если применить все предыдущее к функции

$$\varphi(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

то получим условие

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f_1(z) - f_2(z)| d|z| = -\infty$$

из которого следует $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Замечание. Изложенное в § 2 мы сформулировали для ограниченной функции, но все это верно и для функций из класса C .

В частности для двух таких функций условие единственности (или их совпадения) будет то же самое, что и предыдущее, причем совокупность E и кривая по которой берется интеграл, достаточно произвольны.

При частных предположениях относительно функции $f(z)$, конечно, можно будет получить изложенное в параграфе 2 и без помощи неравенства (35).

Наконец заметим, по поводу неравенства (35) и известного неравенства Миллу, что вначале Миллу вывел свое неравенство, имея

оценку функции во всей области и вторую оценку на внутренней дуге. В дальнейшем начали рассматривать совсем другую задачу. Брали некоторую область Ω внутри круга и функцию $f(z)$, голоморфную внутри Ω , причем в области Ω

$$|f(z)| < M,$$

а в граничных точках Ω , лежащих внутри $|z| < 1$, считали

$$|f(z)| < \varepsilon \quad (44)$$

и давали оценку для $|f(z)|$ во внутренних точках Ω на окружности $|z| = \text{const} < 1$. Из оценки $|f(z)|$ в этой постановке следует результат в первоначальной постановке и конечно это является, более общей задачей, чем то, что имеется в первой работе Миллу. Но когда от равномерно заданных оценок переходим к интегральным данным, то эти две постановки становятся совершенно различными задачами. Это видно хотя бы из того, что в случае первой задачи существует функция, на-

пример, $f_0(z) = e^{-\frac{1}{1-z}}$, для которой интеграл распространенный по радиусу

$$\int_0^1 \lg |f_0(x)| dx = -\infty$$

в то время как такое же условие по контуру приведет к тождественному нулю.

В настоящей заметке мы занимались задачей в духе первоначальной постановки Миллу.

§ 4. Из (36) можно извлечь одно интересное следствие, полезное для приложений.

Пусть E некоторая измеримая совокупность внутри круга $|z| < 1$. Обозначим через E_α совокупность точек из E , лежащих на радиусе $\arg z = \alpha$.

Применим к E_α неравенство (35) и проинтегрируем в пределах $(0, 2\pi)$, получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| \leq & \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ & + \frac{(1-|z|)}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\int_{E_\alpha} \omega(\rho) \lg |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi}{\int_{E_\alpha} \frac{\omega(t)}{1-t} dt} d\alpha + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{13 + 4 \int_{E_\alpha} \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\int_{E_\alpha} \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \text{const}, \quad (45)$$

где const определяется равенством (32).

И в частности, когда $|f(z)| < 1$ и

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \text{const}$$

получим простое неравенство

$$|f(z)| < \exp \left\{ \frac{1-|z|}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \int \int \frac{\omega(\rho)}{\rho} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi + C \right\}, \quad (46)$$

где в показателе фигурирует двойной интеграл по совокупности.

Если

$$\int \int \frac{\omega(\rho)}{\rho} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$, это будет условие единственности, выраженное посредством среднего значения функции $\lg |f(z)|$ по двумерной совокупности E .

Теорема 2. Если в $|z| < 1$ задано счетное множество областей $\{z_k\}$, причем, в z_k , $|f(z)| < m_k$, то в любой точке круга получим оценку (при $|f(z)| < 1$)

$$|f(z)| < A \cdot \exp \left\{ \frac{1-|z|}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \sum_1^\infty \lg m_k \int \int \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma \right\}. \quad (47)$$

И это вытекает из (46).

Существование неравенства типа (47) в случае, когда из внутренних областей z_k имеется одна, можно получить, пользуясь неравенством Надамард'а о трех кругах. Случай счетного числа таких областей с оценкой коэффициентов при $\lg m_k$ дается неравенством (47).

В частности, если применить (47) в точке z_0 одной из областей z_k , где $|f(z)|$ достигает максимума в этой части, то получим

$$\lg m_k < \text{const} + \sum_{p \neq k} \frac{\int_{\sigma_p} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \lg m_p, \quad (48)$$

где суммирование распространено по всем значениям индекса p кроме значения $p = k$.

Случай, когда сравниваются максимумы $|f'(z)|$ лишь в двух подобластях, был указан А. Островским [5]. Неравенство (48) дает такую оценку в случае счетного числа подобластей. Этот случай интересен тем, что дает асимптотическую оценку, связанную с поведением функции у границы и, кроме того, указаны значения коэффициентов.

Отметим одно интересное следствие неравенства (47) либо (48). Если

$$\sum_1^\infty \frac{\int_{\sigma_p} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \lg m_p = -\infty$$

то $f(z) \equiv 0$. Применение (48) к функции $f(z) = \varphi_{n+m}(z) - \varphi_n(z)$ дает связь между скоростями сходимости в подобластях внутри круга для сходящейся последовательности аналитических функций.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 25 XII 1959

Յ. Լ. Շահինյան

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՄԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հ. Միլու-ն (2) իր աշխատանքում ավել է հոլոմորֆ ֆունկցիայի մոդուլի գնահատականը, երբ ավել շրջանի մեջ տրված է նրա մոդուլի մաքսիմումը և մի ներքին աղեղի վրա նրա մոդուլի համար մի ավ գնահատականը Այսպես, եթե $|z| > 1$ շրջանում

$$\sup |f(z)| = M,$$

և կենտրոնը $|z| = 1$ եզրի հեռ միացնող L կորի վրա

$$|f(z)| < \varepsilon \quad (1)$$

ապա, որի է ներքին կետում

$$|f(z)| < M \cdot \varepsilon^{c(1-|z|)} \quad (2)$$

որ c -ն բացարձակ հաստատուն է:

Միլու-ի այս անհավասարության մեջ ենթադրվում է $|f(z)|$ -ի հավասարաչափ կերպով փոքր լինելը L աղեղի վրա, համաձայն (1) անհավասարության:

Ներկա հոդվածում մենք հրաժարվում ենք այդ խիստ սահմանափակումից և ստանում ենք հետևյալ զնահատականը:

Պարզության համար ենթադրենք, որ L ղիծը լուրաքանչյուր $|z| = \text{const}$ շրջանագծի հետ հասնում է մեկ կետում: Նշանակենք $\omega(t)$ -ով մի գրական ֆունկցիա, որը նվազում է $0 \leq t < 1$ միջակայքում և

$$\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \infty,$$

որ E -ն որի է չափելի բազմություն է այդ միջակայքում:

Դիցուք $|z| < 1$ շրջանում

$$|f(z)| < 1$$

այդ դեպքում

$$|f(z)| < \frac{1-|z|}{4} \cdot \frac{\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z|}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}, \quad (3)$$

որ համարիչում գրված է L զծով տարածված մի կորագիծ ինտեգրալ, E -ին կոնցենտրիկ շրջանագծերով համապատասխանեցրած բազմության վրա:

Հոդվածում բերված են ավելի ընդհանուր արդյունքներ ևս: Մասնավորաբար (3)-ը անհավասարությունը կիրառված է տիրույթի եզրում հոլոմորֆ ֆունկցիայի վարքը ուսումնասիրելու համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций. (Изд. МГУ, 1941).
2. Milloux H., Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières. (J. Math. pures et appl. IX S. 3 (1924).
3. Nevanlinna R., Eindeutige Analytische Funktionen. (Berlin, Verlag, Julius Springer, 1936).
4. Carleman T., Les fonctions quasi-analytiques, (Paris, Gauthier-Villars), 1926.
5. Ostrowski A., Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen (Abhandl. aus dem Math. Seminar der Hamburg. Univ., T. I. S. 329, 1922).