

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Модель нестационарной зональной муссонной
циркуляции атмосферы

В в е д е н и е

Муссонной циркуляции атмосферы посвящены работы [1—9]. Некоторые из них носят описательный характер, другие—теоретический. Так, например, в работе [6] рассмотрены две модели муссонной циркуляции при известных предположениях. Две модели—бесконечно длинные чередующиеся полосы моря и суши, и случай бесконечно простирающихся материка и океана рассмотрены Дмитриевым [7]. В работе [8] дана теория муссонной циркуляции над круглым островом, омываемом бесконечным океаном. В работе [9] рассмотрен случай бесконечно простирающихся материка и океана с прямолинейным берегом, получены интересные результаты, которые хорошо согласуются с наблюдениями, особенно в прибрежной зоне. В работе [10], посвященной изучению свободной тепловой конвекции большого масштаба, приводится решение нестационарной нелинейной незональной задачи о тепловой конвекции реальной бароклинной атмосферы на Земле, в поле сил тяжести и Кориолиса и при наличии основного зонального потока до начала тепловой конвекции.

В настоящей работе показывается, как применить указанное решение к построению нестационарной модели муссонной циркуляции в зональном случае и приводятся примеры расчета. Принимается следующая схема. Сферическая Земля одной параллелью разделена на сплошной однородный материк севернее этой параллели, и на океан—южнее ее. Тогда ясно, что все элементы движения не будут зависеть от долготы места. Кроме того, считается известным распределение температуры атмосферы по поверхности Земли.

§ 1. Постановка задачи и решение уравнений

При сделанных выше предположениях система уравнений гидротермодинамики примет следующий вид [10]

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta - 2\omega \cos \theta v_\lambda =$$

$$= \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_z^\infty T dz, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta + 2\omega \cos \theta v_\theta = \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z M \sin 2\theta + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (1.4)$$

Здесь принята сферическая система координат, z — высота над уровнем моря; θ — дополнение широты, возрастающее к югу; λ — долгота места, возрастающая к востоку; t — время; v_θ , v_λ , v_z — составляющие скорости; ω — угловая скорость вращения Земли; T — температура, M — перепад температуры от полюса к экватору, причем все величины безразмерные и все возмущения, налагающиеся на основной зональный поток, не считаются малыми (см. (6), (7) и (8) из [10]).

Число Прандтля принято равным единице, а для характерных величин получены следующие соотношения:

$$V = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{\bar{T}} \right)^{1/2}, \quad H = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{\bar{T}} \right)^{-1/2}, \quad (1.5)$$

где V , T_0 , a , H , t_0 — характерная скорость, температура, длина по горизонтали (принят радиус Земли), высота и время, ν — коэффициент вертикального турбулентного перемешивания, g — ускорение силы тяжести, \bar{T} — средняя температура по земному шару. (Числовые значения приводятся в [10]).

Полагая

$$T = \tau^2 \Theta(\theta, \zeta, \tau), \quad v_\theta = \tau^2 \varphi(\theta, \zeta, \tau), \quad (1.6)$$

$$v_z = \tau^2 \sigma(\theta, \zeta, \tau), \quad v_\lambda = \tau^2 \psi(\theta, \zeta, \tau),$$

где

$$\zeta = \frac{z}{2\sqrt{t}}, \quad \sqrt{t} = \tau, \quad (1.7)$$

получим следующую систему из четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций Θ , φ , ψ , σ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + 2\zeta \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} - 10\sigma - 2\tau \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + 8\tau^2 \omega \cos \theta \psi = \\ & = 4\tau^2 \left(\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} - \psi^2 \operatorname{ctg} \theta \right) + 8 \frac{\partial}{\partial \theta} \int_\infty^{\dot{\zeta}} \Theta d\zeta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 10\psi - 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 8\tau^2 \omega \cos \theta \varphi =$$

$$= 4\tau^7 \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \varphi \psi \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi \sin \theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - 4\theta - 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - 4M\tau^2 \sin 2\theta \varphi = 4\tau^7 \left(\varphi \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right). \quad (1.11)$$

Для решения этой системы положим:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\theta, \zeta) \tau^n, \quad \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\theta, \zeta) \tau^n,$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\theta, \zeta) \tau^n, \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\theta, \zeta) \tau^n. \quad (1.12)$$

Граничные условия будут иметь вид:

1. $\varphi_n = \psi_n = \sigma_n = 0, \quad \theta_n = f_n(\theta)$ при $\zeta = 0,$
2. $\varphi_n = \psi_n = \theta_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty.$

$$(1.13)$$

Подставляя ряды (1.12) в систему (1.8) — (1.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , мы получим бесконечную систему дифференциальных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Для $n < 5$ из (1.11) найдутся θ_n , затем по этим значениям из (1.8) и (1.9) найдутся φ_n и ψ_n , из (1.10) — σ_n . Далее, пользуясь этими решениями, легко найдем неизвестные последующих номеров. Начиная с $n = 7$ и больше, появляются нелинейные члены, как произведения уже найденных ранее линейных членов в виде известной правой части уравнений.

Однородные уравнения, получающиеся из (1.8), (1.9) и (1.11), можно представлять в следующем, общем виде для всех номеров.

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial U_n}{\partial \zeta} - 2(n+k) U_n = 0, \quad (1.14)$$

причем для φ_n и ψ_n $k = 5$, а для θ_n $k = 2$.

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$U_n = c_1(\theta) L_{n+k}(\zeta) + c_2(\theta) P_{n+k}(\zeta), \quad (1.15)$$

где c_1 и c_2 постоянные интегрирования, зависящие от θ . Функции L_n введены в работе [11] и имеют вид:

$$L_n(\zeta) = A_n \int_0^{\zeta} \left[\int \int \int \dots \int e^{-x^2} (dx)^n \right] dx. \quad (1.16)$$

$$\text{В частности} \quad L_0 = A_0 \int_{\infty}^{\zeta} e^{-x^2} dx,$$

$$A_n = 2nA_{n-2}, \quad A_0 = -\frac{2}{\pi}, \quad A_1 = 2,$$

$$L_n(0) = 1, \quad L_n(\infty) = 0. \quad (1.16')$$

Между этими функциями существуют следующие соотношения:

$$\zeta L_n = \frac{A_n}{A_{n+1}} (n+1) (L_{n+1} - L_{n-1}),$$

$$L'_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} L_{n-1}, \quad \int_{\infty}^{\zeta} L_n d\zeta = \frac{A_n}{A_{n+1}} L_{n+1}. \quad (1.17)$$

Полиномы $P_n(\zeta)$ имеют следующий вид:

$$P_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\zeta^{n-2m}}{2^{2m} m! (n-2m)!}. \quad (1.18)$$

Для них легко получаем следующие соотношения:

$$\zeta P_n = (n+1) P_n - \frac{1}{2} P_{n-1}, \quad P'_n = P_{n-1}. \quad (1.19)$$

Используя решение (1.15) в последующих номерах для тех же функций φ_n , ψ_n и θ_n будем иметь неоднородное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial U_n}{\partial \zeta} - 2(n+k) U_n = R_n(\theta, \zeta) + \sum_{i=0}^n b_i L_i. \quad (1.20)$$

При граничных условиях: $U_n = f_n$ при $\zeta = 0$ и $U_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ (для φ_n и ψ_n имеем $f_n = 0$, а для θ_n имеем $f_n = f_n(\theta)$), получим решение (1.20) в виде:

$$\begin{aligned} U_n = & L_{n+k}^{(\zeta)} \left[f_n + P_{n+k}(0) \int_{\infty}^0 \frac{L_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\zeta} \frac{P_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} \right] - P_{n+k}(\zeta) \int_{\infty}^{\zeta} \frac{L_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} - \\ & - \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{2[i-(n+k)]} (L_{n+k} - L_i). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Легко убедиться, что $R_n = 0$ для всех $n < 7$ и только начиная с $n = 7$ появляются R_n — как известные функции.

Пользуясь решением для φ_n и граничным условием (1.13), легко находим:

$$\sigma_n = -\frac{2}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \int_0^{\zeta} \varphi_n d\zeta \right). \quad (1.22)$$

Остается теперь определить $f_n(\theta)$, $b_i(\theta)$ и $R_n(\theta, \zeta)$ для всех случаев, тогда задача решается до конца. Легко убедиться, что для этого необходимо определить все функции $f_n(\theta)$, т. е. определить распределение температуры по земной поверхности.

§ 2 Определение функций $f_n(\theta)$

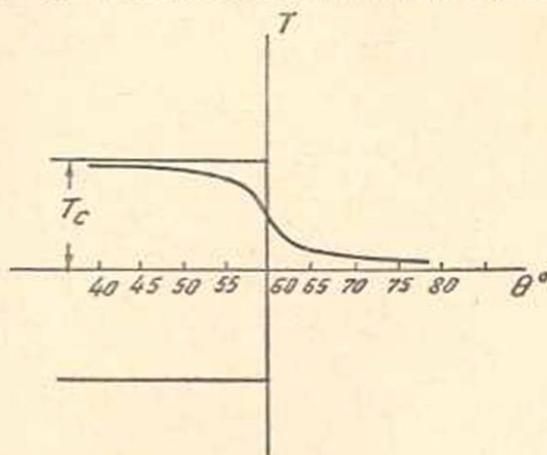
В работе [10] было показано, как, пользуясь условием теплового баланса на поверхности Земли, можно определить функции $f_n(\theta)$. В настоящей работе, в целях построения зональной муссонной циркуляции атмосферы и расчета примеров, будем считать, что распределение температуры по земной поверхности известно и имеет известный годовой ход.

Будем считать, что параллель $\theta = \theta_0$ отделяет материк от океана, кроме того, — отклонения температуры поверхности океана от зонального ее распределения равны нулю, а для материка имеют годовой ход с годовой амплитудой равной $\pm T_c^0$ C (точнее, считаем, что зональные отклонения температуры поверхности Земли над материком значительно больше таких над океаном, что достаточно хорошо согласуется с наблюдениями).

Схематически это представлено на фиг. 1.

Так как согласно (1.6) в момент $t = 0$ отклонения температуры равны нулю, то их можно представлять в следующем виде:

$$T(\theta, t) = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th}\epsilon(\theta - \theta_0)] \sin 2\Omega t. \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Зависимость наземной температуры от широты и времени.

Здесь T_c — температура суши, ϵ — безразмерное число, характеризующее контраст температуры. (2.1) показывает, что южнее береговой черты, когда $\epsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, а севернее, когда $\epsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow -\infty$, $T \rightarrow T_c$. Из этих условий может быть выбрано значение ϵ , чтобы добиться боль-

шего или меньшего температурного контраста летом и зимой. Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца.

В безразмерных величинах (см. (8) из [10]) выражение (2.1) будет иметь точно такой же вид.

С одной стороны, согласно (1.6), (1.12) и (1.13), имеем:

$$T(\theta, 0, \tau) = \tau^2 \Theta(\theta, 0, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, 0) \tau^n = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n. \quad (2.2)$$

С другой стороны, согласно (2.1) имеем:

$$T(\theta, 0, \tau) = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)] \sin(\Omega \tau^2). \quad (2.3)$$

Следовательно

$$\tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)] \sin(\Omega \tau^2)$$

или

$$\tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)] \left(\Omega \tau^2 - \frac{(\Omega \tau^2)^3}{3!} + \frac{(\Omega \tau^2)^5}{5!} - \dots \right).$$

Откуда

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{T_c}{2} \Omega [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)], \\ f_1 &= f_2 = f_3 = 0, \\ f_4 &= -\frac{T_c}{2} \frac{\Omega^3}{3!} [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)], \\ f_5 &= f_6 = f_7 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим:

$$F_0(\theta) = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th} \varepsilon (\theta - \theta_0)]. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_0 &= \Omega F_0, \quad f_4 = -\frac{\Omega^3}{3!} F_0, \quad f_8 = \frac{\Omega^5}{5!} F_0, \dots, \\ f_1 &= f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = f_7 = f_9 = \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

т. е. в конечном итоге все f_n , b_i и R_n будут выражены через одну функцию $F_0(\theta)$ и ее производные.

Прежде чем перейти к численным примерам, выпишем все результаты, которыми мы будем пользоваться, и численные величины всех введенных параметров.

§ 3. Решение для десяти первых номеров

Выпишем подробно все выражения для температуры и скоростей при $n \leq 9$.

Имеем:

$$\Theta_0 = f_0 L_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0, \quad \Theta_4 = f_4 L_6, \quad (3.1)$$

$$\Theta_5 = M \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \Theta_{5,2}, \quad \Theta_6 = 0,$$

$$\Theta_7 = \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \Theta_{7,5} + f_0 \Delta f_0 \Theta_{7,6}, \quad \Theta_8 = f_8 L_{10},$$

$$\Theta_9 = M \sin 2\theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \Theta_{9,2} - M \omega \cos^2 \theta \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \Theta_{9,7} \quad (3.1)$$

и т. д.

Далее;

$$\varphi_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{0,1}, \quad \psi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = \omega \cos \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{2,2}, \quad \varphi_3 = \psi_3 = 0,$$

$$\varphi_4 = \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \varphi_{4,1} - \omega^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{4,4}, \quad \psi_4 = 0, \quad (3.2)$$

$$\varphi_5 = M \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \varphi_{5,6}, \quad \psi_5 = 0,$$

$$\varphi_6 = 0, \quad \psi_6 = \omega \cos \theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \varphi_{6,2} - \omega^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{6,8},$$

$$\varphi_7 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \varphi_{7,12} + \frac{\partial}{\partial \theta} (f_0 \Delta f_0) \varphi_{7,13} - \Delta f_0 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{7,14},$$

$$\psi_7 = -M \omega \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \varphi_{7,10}, \quad \psi_8 = 0$$

и т. д.

И наконец

$$\sigma_0 = -\Delta f_0 \sigma_{0,1}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_4 = -\Delta f_4 \sigma_{4,1} + \omega^2 \left(\cos^2 \theta \Delta f_0 - \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \sigma_{4,4},$$

(3.3)

$$\sigma_5 = M \Delta \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \sigma_{5,6}, \quad \sigma_6 = 0,$$

$$\sigma_7 = -\Delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \sigma_{7,12} - (\Delta f_0)^2 \sigma_{7,13} - f_0 \Delta \Delta f_0 \sigma_{7,14} - \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta f_0}{\partial \theta} \sigma_{7,15},$$

$$\sigma_8 = -\Delta f_8 \sigma_{8,1} + \omega^2 \left(\cos^2 \theta \Delta f_4 - \sin 2\theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right) \sigma_{8,4} -$$

$$-\omega^4 \left(\cos^4 \theta \Delta f_0 - 2 \cos^2 \theta \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \sigma_{8,13}$$

и т. д.

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.4)$$

Имеем следующие значения для параметров [10]:

$$M = 8, \omega = 46,44, \Omega = 0,127, V = 10 \text{ м/сек}, H = 1,04 \cdot 10^3 \text{ м}, a = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$t_0 = 6,4 \cdot 10^5 \text{ сек.} \approx 7,5 \text{ суток}$; и так как $T_0 = 5^\circ \text{C}$, то $\frac{T_c}{2} = 1$ (если принять размерную температуру суши равной 10°C).

Далее принимаем $\varepsilon = 10$. Имеем:

$$F_0(\theta) = 1 - \text{th } 10(\theta - \theta_0). \quad (3.5)$$

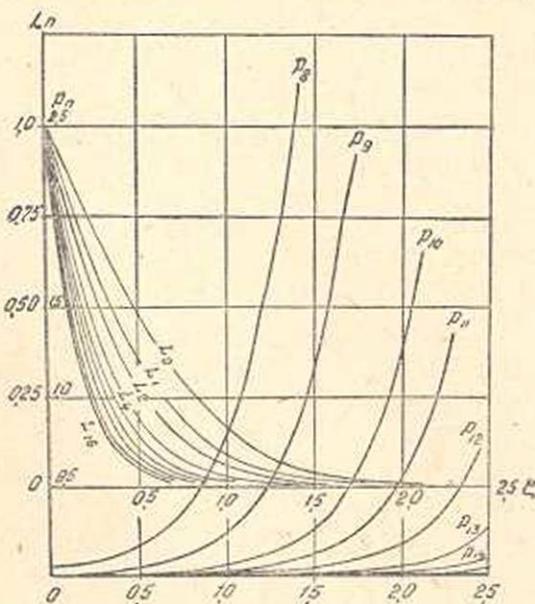
Причем $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ (т. е. 30° с. ш.).

Тогда

$$\begin{aligned} f_0 &= 0,127 F_0, \\ f_4 &= 0,34 \cdot 10^{-3} F_0, \\ f_8 &= 0,28 \cdot 10^{-6} F_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значения функций $L_n(\zeta)$ до $n=9$ приводятся в работе [11]. Для наших целей необходимо было иметь $L_n(\zeta)$ до $n=16$, поэтому, воспользуясь соотношением (1.17), мы подсчитали недостающие номера и представили эти функции на фиг. 2.

Далее, так как при $n \leq 7$ уравнение имеет решение $U_n = c_1 L_{n+k} + c_2 P_{n+k}$ частн. решение, а последнее при $\zeta \rightarrow \infty$ ограничено, то условие $U_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ требует, чтобы $c_2 = 0$. Следовательно, полиномы P_n при $n < 8$ в расчетах не участвуют, а P_n при $n > 8$ в пределах $\zeta = 0 - 2,5$ очень малы. Для удобства расчетов мы их определяем особым образом



Фиг. 2. Функции L_n и P_n в зависимости от ζ .

(1.18). Тогда между ними получаются очень простые соотношения (1.19), пользуясь которыми мы подсчитали эти полиномы и необходимые из них представили на той же фиг. 2.

Легко убедиться, что между полиномами $P_n(\zeta)$, определяемыми по (1.18), и полиномами Чебышева—Эрмита [12] существует следующая связь:

$$P_n(\zeta) = \frac{H_n(\zeta)}{i^n 2^n n!} \quad (3.7)$$

Выпишем некоторые из них:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= \zeta, \\ P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{\zeta^2}{2!}, \\ P_3 &= \frac{\zeta}{4} + \frac{\zeta^3}{3!}, \\ P_4 &= \frac{1}{4^2 2!} + \frac{\zeta^2}{4 \cdot 2!} + \frac{\zeta^4}{4!} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

В частности

$$P_{2n}(0) = \frac{2}{2^{2n} n!}, \quad P_{2n+1}(0) = 0. \quad (3.9)$$

Далее, в решении (3.1), (3.2) и (3.3) вошли величины $\Theta_{n,m}(\zeta)$, $\varphi_{n,m}(\zeta)$ и $\sigma_{n,m}(\zeta)$, которые являются комбинациями от функций $L_n(\zeta)$ и носят универсальный характер, так как они имеют один и тот же вид, независимо от распределения температуры по земной поверхности, и могут быть рассчитаны заранее. Для функций φ_n и ψ_n (горизонтальные составляющие скорости) они одинаковы.

В общем случае не зональной задачи все функции f_n зависят не только от θ , но и от λ , тогда решение может быть представлено в виде конечной суммы

$$U_n(\theta, \lambda, \zeta) = \sum_{m=0}^n K_m(\theta, \lambda) U_{n,m}(\zeta), \quad (3.10)$$

где K_m — выражаются через $f_n(\theta, \lambda)$ и их производные по θ и λ , а $U_{n,m}$ — как раз те $\Theta_{n,m}(\zeta)$, $\varphi_{n,m}(\zeta)$ и $\sigma_{n,m}(\zeta)$, о которых только что говорилось. Мы подсчитали все эти функции для общего случая, но так как в настоящей работе решается зональная задача, поэтому слагаемые в сумме с производными по λ обращаются в ноль, а в решении (3.1) — (3.3) мы сохранили нумерацию общей задачи. Выпишем некоторые из них.

$$\Theta_{n,2} = \frac{A_{n-3}}{A_{n-2}} (L_{n+2} - 2L_n + L_{n-2}), \quad (3.11)$$

$$\Theta_{n,4} = \frac{A_{n-5}}{A_{n-4}} \frac{4}{3} (L_{n+2} - 3L_n + 3L_{n-2} - L_{n-4})$$

и т. д.

$$\varphi_{n,1} = 2 \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}), \quad (3.12)$$

$$\varphi_{n,2} = 2 \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+5} - 2L_{n+3} - L_{n+1}),$$

$$\varphi_{n,3} = \frac{1}{2} \frac{A_{n-1}}{A_n} (L_{n+5} - 3L_{n+3} + 3L_{n+1} - L_{n-1}).$$

Для определения $\sigma_{n,m}$ приходится вычислять интеграл $\int_0^{\zeta} \varphi_{n,m} d\zeta$,

т. е. интеграл от L_n , который легко берется

$$\int_0^{\zeta} L_n d\zeta = \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+1} - 1). \quad (3.13)$$

Пользуясь этой формулой, легко получим

$$\sigma_{n,1} = 2 \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} \left[\frac{A_{n+5}}{A_{n+6}} (L_{n+6} - 1) - \frac{A_{n+3}}{A_{n+4}} (L_{n+4} - 1) \right],$$

или

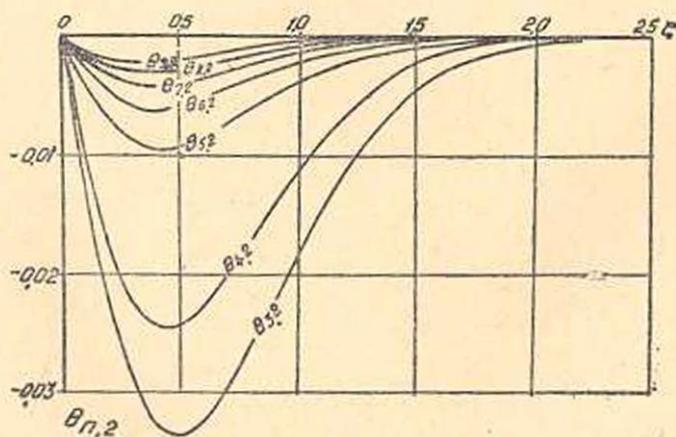
$$\sigma_{n,1} = \frac{2}{(n+4)(n+6)} [(n+5)L_{n+6} - (n+6)L_{n+4} + 1] \quad (3.14)$$

и т. д.

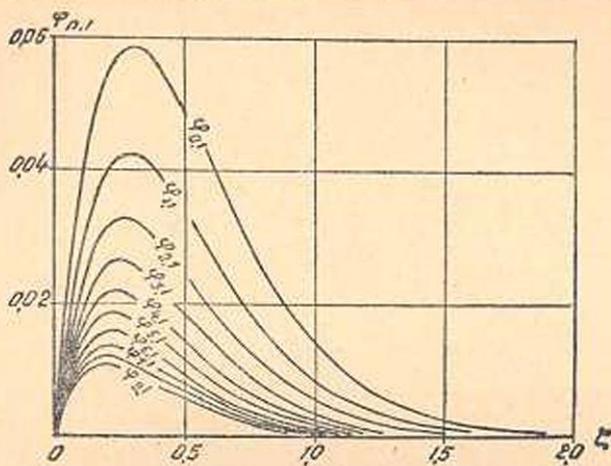
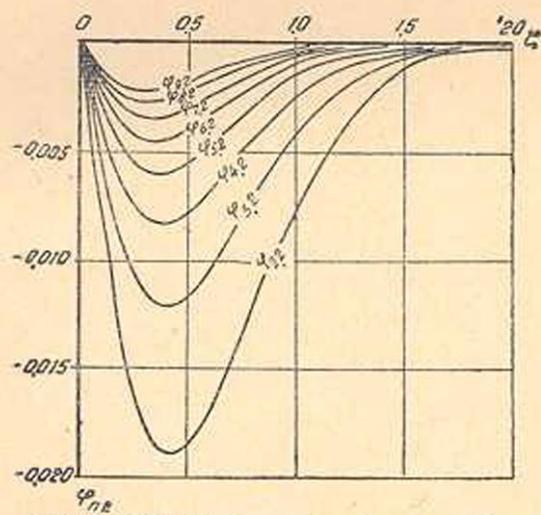
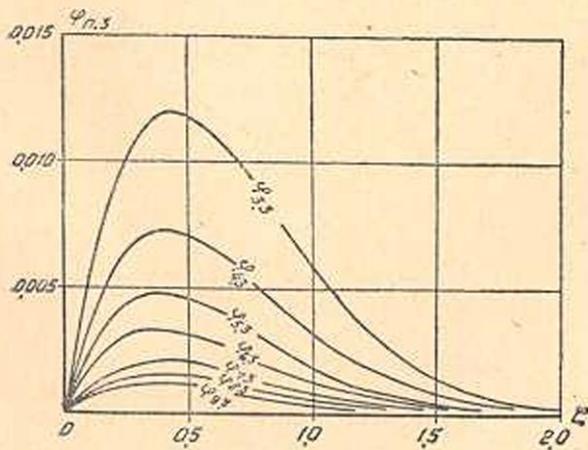
Коэффициенты A_n берутся согласно (1.16').

Заметим, что все $\theta_{n,m}$ и $\varphi_{n,m}$ обращаются в ноль как при $\zeta=0$, при котором все $L_n = 1$, так и при $\zeta \rightarrow \infty$, при котором $L_n = 0$. Для $\sigma_{n,m}$ имеем $\sigma_{n,m} = 0$ при $\zeta=0$, а при $\zeta \rightarrow \infty$ все $\sigma_{n,m}$ принимают различные постоянные значения, что вытекает из условий нашей задачи.

$\theta_{n,2}$ приводится на фиг. 3. На фиг. 4, 5, 6, приводятся соответ-



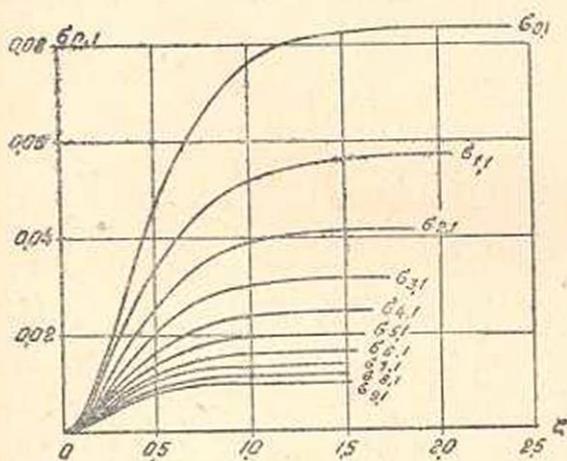
Фиг. 3. Функции $\theta_{n,2}$ в зависимости от ζ .


 Фиг. 4. Функции $\varphi_{n,1}$ в зависимости от ζ .

 Фиг. 5. Функции $\varphi_{n,2}$ в зависимости от ζ .

 Фиг. 6. Функции $\varphi_{n,3}$ в зависимости от ζ .

ственно $\varphi_{n,1}$, $\varphi_{n,2}$ и $\varphi_{n,3}$, на фиг. 7, 8, 9, — $\sigma_{n,1}$, $\sigma_{n,2}$ и $\sigma_{n,3}$.

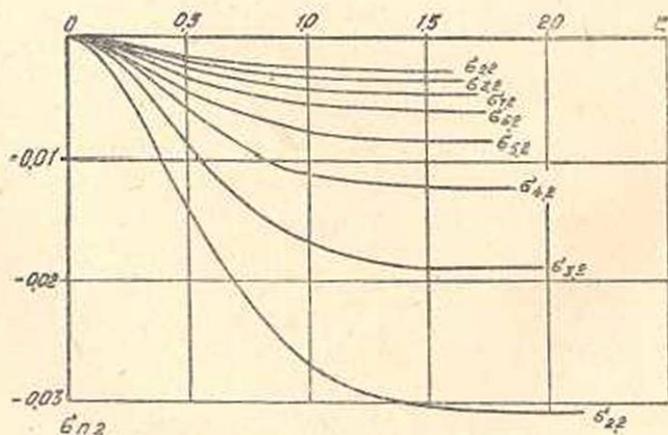
Приведем еще одну из этих функций при нелинейном члене.

$$\begin{aligned} \theta_{8,6} = & -4L_{10}(\zeta) P_{10}(0) \int_0^{\infty} \frac{L_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta + \\ & + 4L_{10}(\zeta) \int_0^{\zeta} \frac{P_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta + \\ & + 4P_{10}(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{L_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

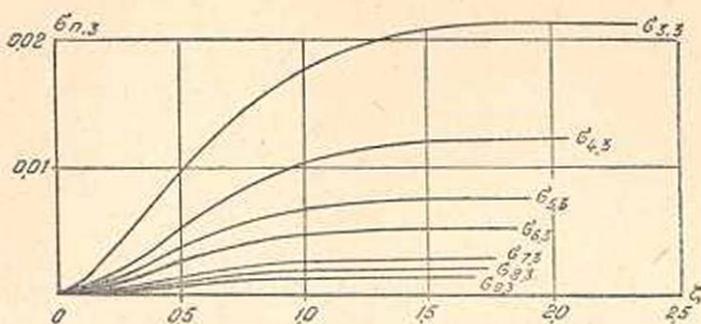


Фиг. 7. Функции $\sigma_{n,1}$ в зависимости от ζ .

Интегралы подсчитаны нами численным путем, пользуясь методом трапеций. Все эти функции нами протабулированы, таблицами можно пользоваться также при решении нелинейной задачи. Мы здесь их не приводим за недостатком места. Имея все эти выражения, мы теперь можем подсчитывать примеры.



Фиг. 8. Функции $\sigma_{n,2}$ в зависимости от ζ .

Фиг. 9. Функции $\sigma_{n,z}$ в зависимости от ζ .

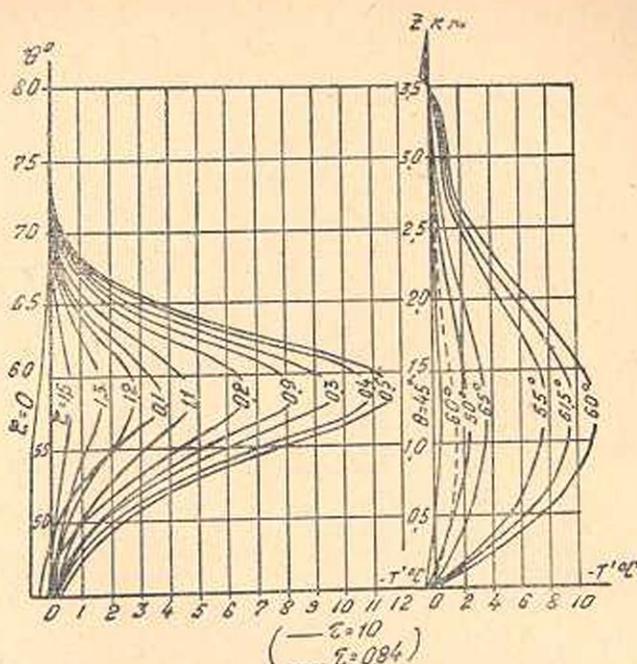
§ 4. Примеры расчетов

Пользуясь вышеприведенными формулами, мы рассчитали распределение зональной температуры и скоростей в муссонной циркуляции для материка и океана, согласно принятой схеме. Расчет проводился для морского (летнего) муссона следующим образом.

Для дополнения широты взяты следующие значения:

$\theta = 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 57,5^\circ, 58,75^\circ, 60^\circ, 61,25^\circ, 62,5^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ$, причем, как говорилось выше, параллель, отделяющая материк от океана, проходит по $\theta = 60^\circ$, поэтому значения θ в ее окрестности взяты чаще. Далее, по формуле (3.5) для указанных значений θ вычислены $F_0(\theta)$, по (3.6) — f_0, f_4, f_8 и их первые четыре производные, а также Лапласиан по формуле (3.4). Результаты сведены в таблицы, которые здесь не приводятся. Имея $\Theta_{n,m}, \varphi_{n,m}$ и $\sigma_{n,m}$, легко подсчитать Θ_n по (3.1), φ_n и ψ_n — по (3.2) и τ_n — по (3.3). Далее восстанавливаются ряды (1.12), а по (1.6) рассчитываются безразмерные температура и скорости. Результаты всех этих подсчетов для некоторых значений τ представлены на фиг. 10–14. На фиг. 10, слева, показано распределение температурных отклонений (T') в зависимости от широты на различных высотах (ζ по (1.7)) через 7,5 суток после начала возникновения летнего (морского муссона). На правой фигуре приводятся вертикальные профили этих температур на различных широтах. Как видно из фиг. 10, T' положительны на поверхности Земли, на высотах — отрицательны, достигают наибольших значений на высоте порядка 1,2–1,3 км, разных для разных широт. На высотах 3–3,5 км эти отклонения снова меняют знак, а на больших высотах затухают. Хорошо видно также, что высота обращения T' зависит от широты.

На фиг. 11 представлены: слева — профили скоростей на различных широтах, в зависимости от высоты, также для $\tau = 1$ (7,5 суток), а справа — изменение v_0 по широте на различных высотах. Эти кривые показывают, что v_0 направлена с моря на материк и значительно превосходит v_x в деятельном слое, имеющем толщину порядка 1,5–2,0 км. Наибольшее значение v_0 достигает на высоте 600–800 м., почти для всех широт, причем, как показывают кривые справа, v_0 на всех вы-



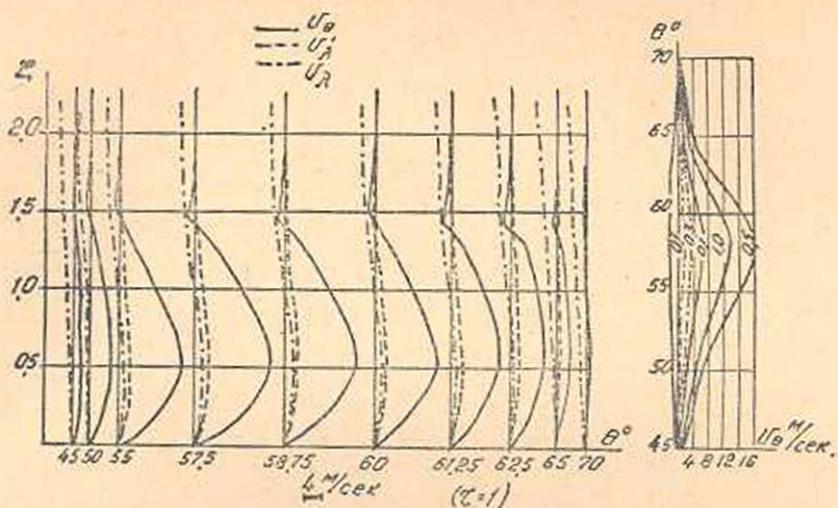
Фиг. 10. Зависимость температурных отклонений от высоты, широты и времени.

сотах растет с увеличением θ , достигая максимального значения еще до береговой линии, и далее постепенно затухает над материком. Высота обращения равна примерно 2,0–2,5 км, выше имеется слабое обратное течение. Эта высота также зависит от широты. На больших высотах устанавливается западный поток. В деятельном слое v_z направлена на запад и, в зависимости от широты, быстро меняет знак на противоположный, т. е. ветер на малых высотах дует под некоторым углом к берегу на СЗ, с увеличением высоты угол уменьшается; на некоторой высоте, зависящей от широты, ветер дует на С (высоты, где $v_z = 0$), затем на еще больших высотах ветер дует на СВ, постепенно приближаясь к западному потоку. Значительный интерес представляют профили в зависимости от высоты для трех значений $\theta = 50^\circ$, 60° , 65° в различные моменты времени, представленные на фиг. 12. Эти кривые показывают развитие муссона во времени.

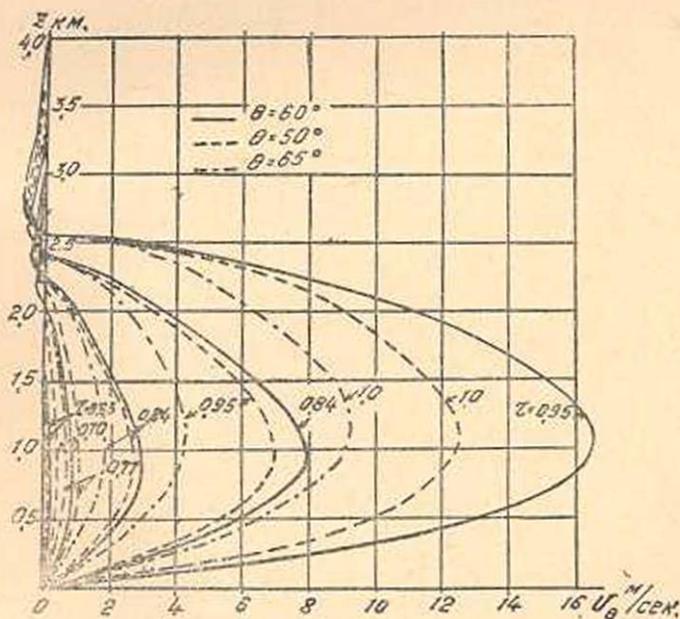
По времени взяты значения $\tau = 0,63; 0,70; 0,77; 0,84; 0,95; 1,0$, что соответствует времени в сутках 4,6; 5,2; 5,8; 6,4; 7,0; 7,5 после начала возникновения муссона.

Как видно из графика, скорость v_z довольно быстро растет с увеличением времени, причем этот рост зависит от широты. Увеличиваются также высота обращения v_z , а также высота, где достигается максимальное значение и само максимальное значение.

На фиг. 13 представлены вертикальные скорости в зависимости от широты на различных высотах при $\tau = 1$. Максимальное значение вертикальной составляющей скорости над материком оказывается по-



Фиг. 11. Зависимость горизонтальных составляющих скорости от высоты, широты и времени.

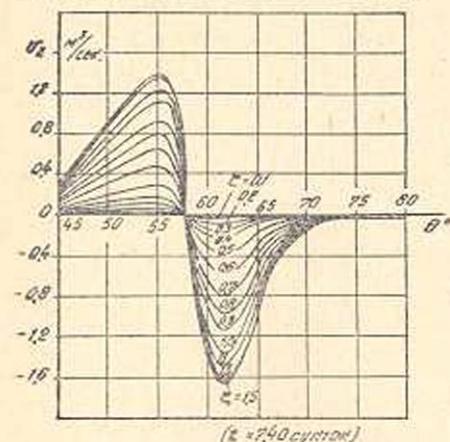


Фиг. 12. Развитие муссона во времени и по высоте, на различных широтах.

рядка 1,2 м/сек в пяти градусах широты севернее от береговой черты на высоте около 2,1 км. Вертикальная скорость на всех высотах меняет знак не над самой береговой чертой ($\theta_0 = 60^\circ$), где она еще отрицательна (направлена вниз), а несколько севернее. Максимальные отрицательные скорости получаются над океаном, несколько южнее береговой черты.

Вдали от берега эти скорости затухают над океаном быстрее, чем над материком.

На фиг. 14 представлены профили v_z в зависимости от высоты для различных широт в два момента времени при $\tau = 0,84$ и $\tau = 1,0$.

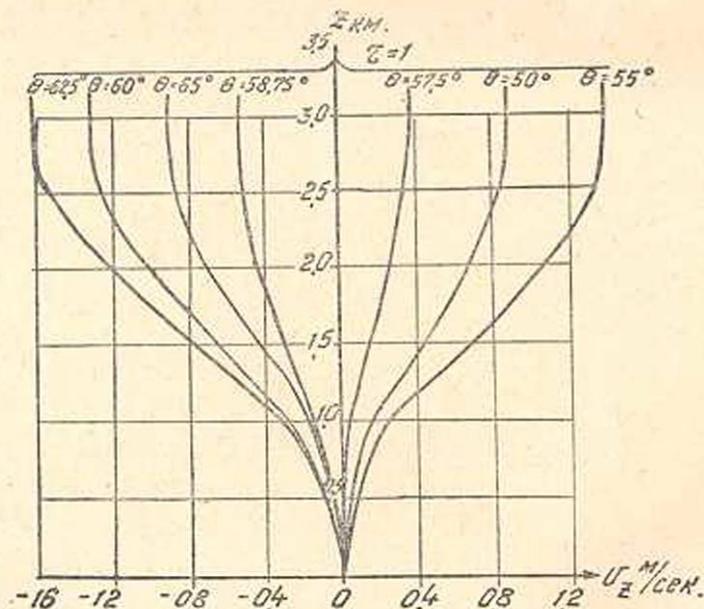


Фиг. 13. Зависимость вертикальной скорости от высоты, широты и времени.

Кривые показывают развитие вертикальных скоростей по времени.

Полученные результаты показывают достаточно хорошее согласие теории с наблюдениями. Следует отметить, что принятая зональная схема не отвечает действительности и, кроме того, значительное влияние оказывают горы.

Решение незональной задачи не встречает принципиальных затруднений, следует только при определении f_n считать $\theta_0 \neq \text{const}$. $\theta_0 = \theta_0(\lambda)$, где λ — долгота места. Расчету примеров по этой схеме будет посвящена наша следующая статья.



Фиг. 14. Развитие вертикальной скорости во времени и по высоте, на различных широтах.

Ա. Մ. Մխիթարյան

ՄՔՆՈԼՈՐՏԻ ՈՉ-ՍՏՍՑԻՈՆԱՐ ԶՈՆԱԼ ՄՈՒՍՍՈՆԱՅԻՆ
ՑԻՐԿՈՒԼԱՑԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիմնվելով [10] աշխատության վրա, այստեղ առաջարկվում է մթնոլորտի ոչ-ստացիոնար զոնալ ցիրկուլացիայի մոդել: Երկրագունդը դիտվում է որպես սֆերա, որը մի զուգահեռականով բաժանված է ցամաքի (Հյուսիսում) և օվկիանոսի (Հարավում): Պարզ է, որ այս դեպքում, ցիրկուլացիայի էլեմենտները կախված չեն լինի աշխարհագրական երկարությունից: Ընդունվում է, որ ցիրկուլացիան սկսվելուց առաջ գոյություն ունի հիմնական զոնալ հոսանք: Հաշվի է առնվում կորիոլիսի ուժի ազդեցությունը: Մուսսոնային ցիրկուլացիան դիտվում է որպես հիմնական զոնալ հոսանքի զրգուռմաներ, բնդ որում վերջիններս վերջավոր մեծություններ են և համեմատելի հիմնական զոնալ հոսանքի հետ, որի պատճառով ոչ-զծային անդամներն արհամարհել չի կարելի: Հախասարմանների (1.1)–(1.4) սխեմներ (1.7) ձևափոխությունից հետո բերվում է (1.8)–(1.11) տեսքին, լուծումը որոնվում է (1.12) տեսքով: Ընդունելով երկրի վրա ջերմաստիճանի բաշխումը (2.1) տեսքով, ստացվում են (3.1)–(3.4) արդյունքները: Այնուհետև բերվում են տեսական հաշվումների օրինակներ, որոնց արդյունքները ներկայացված են նկարներ 1–14-ի վրա: Այդ արդյունքները բավականաչափ լավ համընկնում են դիտումների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner. Zur Aeorologie des Indischen monsons. Gerlands Beitr., 1931.
2. Воейков А. И. Климаты земного шара. 1884.
3. Алисов Б. П. и др. Курс климатологии под редакцией Рубинштейна Е. С. ГИМИЗ. 1940.
4. Шулейкин В. В. Физика моря. 1953.
5. Гусев А. М. К теории муссонов. Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.), 4, 1938.
6. Jeffreys H. On the Dynamics of Winds. Quart. Journ., v. 52, 1926.
7. Дмитриев А. А. Влияние материков и океанов на общую циркуляцию атмосферы. 1946.
8. Линейкин П. С. Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом. Изв. АН СССР, (сер. геогр. и геофиз.), 2, 1947.
9. Гутман Л. И. и Монин А. С. О вертикальной структуре муссонов. Метеор. и гидр. 6, 1947.
10. Мхитарян А. М. К теории конвекции большого масштаба. Изв. АН АрмССР, (сер. ф.-м. н.), 1, 1955.
11. Гутман Л. Н. К вопросу о расчете теплового состояния твердых тел. Инж. сборник, т. 15, 1953.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, 1953.