

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

Напряженное состояние в сжатых железобетонных
элементах в условиях неустановившейся ползучести
и усадки бетона

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния в сжатых железобетонных элементах в условиях неустановившейся ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации.

На основе нелинейных уравнений теории ползучести, развитой в работе [1], рассматриваемая задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. При решении последнего пользуемся методом, данным в работе [2].

Особенность этого метода решения заключается в том, что в качестве первого приближения берется не упругое решение задачи, [3, 4], а решение соответствующей задачи линейной ползучести. Именно благодаря этой особенности значительно усиливается быстрота сходимости последовательных приближений.

В качестве приложения этого метода здесь приводится решение следующих двух задач: 1) определение напряженного состояния в сжатых железобетонных элементах и 2) определение усадочных напряжений в симметрично армированных железобетонных элементах.

Решение этих задач в линейной постановке было дано в работе [1].

§ 1. Напряженное состояние в сжатых
железобетонных элементах

Рассмотрим железобетонный элемент, находящийся под действием постоянной центральной сжимающей силы N , приложенной в возрасте бетона $t = \tau_1$. Допустим, что рассматриваемый элемент армирован продольными стержнями и поперечными хомутами. Влияние усадки пока не будем учитывать.

Напряжение в бетоне, с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации, обозначим через $\sigma_b(t)$, а напряжение в арматуре — через $\sigma_a(t)$.

Эти напряжения в любой момент времени t должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\sigma_a(t) F_a + \sigma_b(t) F_b = N, \quad (1.1)$$

где F_a и F_b — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Как известно [1], между полной продольной деформацией $\varepsilon_b(t)$ и напряжением $\sigma_b(t)$, с учетом нелинейной ползучести материала, существует следующая зависимость:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.2)$$

где τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки,
 t — время,

$E(t)$ — модуль мгновенной деформации бетона, изменяющейся во времени,

$C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона при одноосном напряженном состоянии,

$F[\sigma_b(t)]$ — некоторая функция от $\sigma_b(t)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести бетона, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть, нормированная условием $F(1) = 1$.

Из условия совместной работы арматуры и бетона имеет место равенство их относительных продольных деформаций:

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_a(t). \quad (1.3)$$

С другой стороны, имеем:

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \quad (1.4)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Из соотношения (1.2), пользуясь равенствами (1.3), (1.4) и (1.1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_b(t) = & \frac{N}{F_b[1 + \mu m(t)]} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ & - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t F[\sigma_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\mu = \frac{F_a}{F_b}$ — процент армирования,

$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени.

Таким образом, задача определения напряжений в центрально-сжатых железобетонных элементах в условиях нелинейной ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации сводится к решению

нелинейного интегрального уравнения (1.5). Напряжения в арматуре определяются из уравнения равновесия (1.1).

Пусть $F[\sigma_s(t)]$ является степенной функцией вида

$$F[\sigma_s(t)] = \alpha \sigma_s(t) + \beta [\sigma_s(t)]^n, \quad (n > 0), \quad (1.6)$$

где α, β, n — постоянные параметры, определяемые из опыта и удовлетворяющие условиям

$$F(1) = \alpha + \beta = 1.$$

Как показывают экспериментальные исследования [5], степенным законом (1.6) достаточно хорошо описываются опытные кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений для бетона.

Очевидно, что если в зависимости (1.6) параметр β является малым, то функция $F[\sigma_s(t)]$ будет описывать кривые ползучести бетона со слабой нелинейностью.

Подставляя (1.6) в (1.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & \frac{N}{F_s[1 + \mu m(t)]} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \right. \\ & \left. + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если модуль мгновенной деформации бетона постоянен и равен E_0 , то соотношение (1.7) примет следующий вид

$$\sigma_s(t) = \frac{N}{F_s(1 + \mu m_0)} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \int_{\tau_1}^t (\alpha \sigma_s(\tau) + \beta [\sigma_s(\tau)]^n) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.8)$$

где $m_0 = \frac{E_a}{E_0}$.

Пользуясь методом, развитым в работе [2], будем искать решение уравнения (1.7) в следующей форме:

$$\sigma_s(t) = \sigma_s^{(0)}(t) + \beta \sigma_s^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_s^{(2)}(t) + \dots \quad (1.9)$$

Подставляя это выражение в (1.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\begin{aligned} \sigma_s^{(0)}(t) = & \frac{N}{F_s[1 + \mu m(t)]} + \\ & + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(0)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\sigma_b^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(1)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_b^{(0)}(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.11)$$

$$\sigma_b^{(2)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(2)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{n \cdot \mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_b^{(0)}(\tau)]^{n-1} \sigma_b^{(1)}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.12)$$

Таким образом, решение нелинейного интегрального уравнения (1.7) сводится к решению некоторой совокупности рекуррентных линейных интегральных уравнений (1.10), (1.11), (1.12)...

Займемся решением этих уравнений. Предварительно запишем уравнения (1.10) в форме

$$\sigma_b^{(0)}(t) = \psi_0(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(0)}(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (1.13)$$

где положено

$$K(t, \tau) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right], \quad (1.14)$$

$$\psi_0(t) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m(t)]}. \quad (1.15)$$

Если принять, что мера ползучести бетона определяется зависимостью

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\eta(t-\tau)}], \quad (1.16)$$

то решение интегрального уравнения (1.13) можно представить в следующем виде

$$\sigma_b^{(0)}(t) = \sigma_b(\tau_1) \left[1 - \alpha \frac{\mu E_a \gamma}{1 + \mu m(\tau_1)} \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \right]. \quad (1.17)$$

Здесь:

$$\eta(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau} \left[\gamma \left[1 + \alpha \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(x)} \varphi(x) \right] + \frac{\mu m'(x)}{1 + \mu m(x)} \right] dx, \quad (1.18)$$

$\sigma_b(\tau_1) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m(\tau_1)]}$ — напряжения в бетоне в начальный момент приложения нагрузки $t = \tau_1$,

$\varphi(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция, характеризующая степень изменения меры ползучести $C(t, \tau)$ в зависимости от возраста материала τ ;

γ — постоянный параметр, определяемый из опыта.

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона постоянен, т. е. $E(t) = E_0$, а $\varphi(\tau)$ выражается зависимостью [1]

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0, \quad (1.19)$$

где A_1, C_0 — некоторые постоянные параметры, характеризующие интенсивность меры ползучести бетона соответственно в его молодом и старом возрасте.

Тогда решение уравнения (1.13) можно представить в форме

$$\sigma_k^{(0)}(t) = \sigma_k(\tau_1) H_0(t, \tau_1), \quad (1.20)$$

где положено

$$H_0(t, \tau_1) = 1 - \alpha \frac{\mu E_0 \gamma}{1 + \mu m_0} \varphi(\tau_1) \frac{e^{r\tau_1 p}}{r^{1-p}} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)], \quad (1.21)$$

причем

$$p = \alpha \frac{\mu E_0 \gamma A_1}{1 + \mu m_0}, \quad r = \gamma \left(1 + \alpha \frac{\mu E_0 C_0}{1 + \mu m_0} \right), \quad (1.22)$$

а

$$\Phi(\zeta, p) = \int_0^{\zeta} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau \quad (1.23)$$

представляет собой неполную гамма-функцию, которая табулирована.

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Только для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $E(t) = E_0 = \text{const}$. Тогда интегральное уравнение (1.11) можно переписать в следующем виде

$$\sigma_k^{(1)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_k^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = \frac{\mu E_0}{1 + \mu m_0} [\sigma_k(\tau_1)]^n H_1(t, \tau_1), \quad (1.24)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\mu E_0}{1 + \mu m_0} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau},$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.25)$$

Решение уравнения (1.24) будет

$$\sigma_0^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_0(\tau_1)]^n \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right]. \quad (1.26)$$

Здесь $R(t, \tau, \alpha)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$, которая при (1.16), как известно, определяется формулой

$$R(t, \tau, \alpha) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta'^2(\tau) + \eta''(\tau) - \gamma\eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\eta(x)} dx, \quad (1.27)$$

где

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \left(\frac{A_1}{x} + C_0 \right) \right] dx. \quad (1.28)$$

Если удовлетвориться только вторым приближением, то из (1.9) следует, что решение основного нелинейного интегрального уравнения (1.7), при постоянном модуле мгновенной деформации, можно представить в следующем виде

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(\tau_1) \left\{ H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_1(\tau_1)]^{n-1} \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] \right\}. \quad (1.29)$$

Аналогичным образом можно получить остальные приближения. Например, если модуль мгновенной деформации постоянен, то третье приближение будет иметь вид

$$\sigma_0^{(2)}(t) = n \left[\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right]^2 [\sigma_0(\tau_1)]^{2n-1} \left[H_2(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right], \quad (1.30)$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^{n-1} \left[H_1(\tau, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x, \alpha) H_1(x, \tau_1) dx \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.31)$$

Таким образом, если удовлетвориться третьим приближением, то решение уравнения (1.9) будет иметь вид

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(\tau_1) \left\{ H_0(t, \tau_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_b(\tau_1)]^{n-1} \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \\
& + \beta^2 n \left[\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right]^2 [\sigma_b(\tau_1)]^{2(n-1)} \left[H_2(t, \tau_1) + \right. \\
& \left. + \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] \Big\} + O(\beta^3). \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Если известно напряжение в бетоне в сжатых железобетонных элементах, то напряжение в арматуре определяется из уравнения равновесия

$$F_b \sigma_b(t) + F_a \sigma_a(t) = N. \quad (1.33)$$

В качестве приложения вышеизложенного метода рассмотрим численный пример.

Как будут изменяться во времени напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ в сжатом железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести бетона, если за меру ползучести бетона принято следующее выражение:

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{-0,026(t-\tau)}] 10^{-5} \text{ кг/см}^2,$$

причем $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 1\%$, $\tau_1 = 28 \text{ дням}$, $\sigma_b(\tau_1) = 40 \text{ кг/см}^2$, $F[\sigma_b(t)] = \sigma_b(t) + \beta [\sigma_b(t)]^2$.

Ниже приводятся две таблицы. В этих таблицах даются численные значения коэффициента затухания бетона и арматуры

$$H_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}, \quad H_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$$

в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях.

Очевидно, что значению $\beta = 0$ соответствует задача определения напряжений в центрально-сжатых железобетонных элементах в условиях линейной ползучести, рассмотренная в работе [1], а остальным значениям β соответствует задача определения напряжений в условиях нелинейной ползучести квадратичным законом нелинейности.

Из данных, приведенных в табл. 1 и 2, следует, что 1) начальные напряжения в бетоне $\sigma_b(\tau_1)$ с течением времени быстро затухают, а в арматуре $\sigma_a(\tau_1)$ быстро возрастают, причем эти изменения существенно зависят от меры нелинейности β : чем больше β , тем быстрее происходит затухание напряжения в бетоне и возрастание напряжения в арматуре и тем значительнее разница между решением

Таблица 1

Численные значения коэффициента $H_b(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях

t	Первое приближение	Второе приближение				Третье приближение		
	$\beta=0,00$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	
45	0,93	0,9275	0,905	0,681	0,9275	0,9052	0,697	
90	0,86	0,8554	0,814	0,398	0,8554	0,8142	0,443	
180	0,84	0,835	0,792	0,365	0,835	0,793	0,418	
360	0,83	0,825	0,783	0,355	0,825	0,784	0,408	
1080	0,83	0,825	0,783	0,355	0,825	0,784	0,408	

Таблица 2

Численные значения коэффициента $H_a(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях

t	Первое приближение	Второе приближение				Третье приближение		
	$\beta=0,00$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	
45	1,65	1,652	1,672	2,07	1,652	1,672	2,112	
90	2,40	2,402	2,431	3,102	2,402	2,431	3,172	
180	2,63	2,633	2,659	3,38	2,633	2,659	3,455	
360	2,66	2,663	2,690	3,41	2,663	2,690	3,485	
1080	2,66	2,663	2,690	3,41	2,663	2,690	3,485	

нелинейной и линейной задачи теории ползучести для сжатого железобетонного элемента. При $\beta = 0,1$ численное значение $\varepsilon_s(t)$ получается почти в 2 раза меньше, а $\sigma_a(t)$ в 1,5 раза больше чем соответствующие значения $\varepsilon_s(t)$ и $\sigma_a(t)$ при линейной ползучести; 2) при малых β , то-есть: $\beta \leq 0,01$, можно ограничиваться только вторым приближением, так как оно дает достаточно хорошие результаты.

§ 2. Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах

Рассмотрим симметрично армированный железобетонный элемент. Обозначим усадочные напряжения в бетоне $\varepsilon_b(t)$, а в арматуре $\sigma_a(t)$. Эти напряжения при любом t , в силу отсутствия внешних сил, должны удовлетворять следующему уравнению равновесия

$$F_a \sigma_a(t) + F_b \varepsilon_b(t) = 0, \quad (2.1)$$

где F_a и F_b — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Функцию $S_a(t)$, характеризующую закон изменения процесса усадки, примем в следующей форме [1]:

$$S_a(t) = S_0 \cdot (e^{-\alpha_0 t_1} - e^{-\alpha_0 t}), \quad (2.2)$$

где S_0 — наибольшее значение усадки, величина которой устанавливается для данного бетона на основании опытных данных;

α_0 — показатель, характеризующий скорость нарастания усадки данного бетона во времени;

t_1 — возраст бетона, рассчитываемый от момента его усадки.

Полная продольная деформация бетона $\varepsilon_b(t)$ с учетом его ползучести согласно [1] будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(t) = S_a(t) + \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} - \int_{t_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ - \int_{t_1}^t F[\varepsilon_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней бетона следует

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_a(t). \quad (2.4)$$

Пользуясь этим соотношением и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a} \quad (2.5)$$

приведем выражение (2.3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_b(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{t_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{t_1}^t F[\varepsilon_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где E_a — модуль деформации арматуры;

μ — процент армирования;

$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени.

Таким образом, задача определения усадочных напряжений бетона в симметрично армированных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона и изменяемости его модуля мгновенной деформации сводится к решению интегрального уравнения (2.6). Напряжения в арматуре определяются условием равновесия (2.1).

Примем, что $F[z_0(t)]$ является степенной функцией вида (1.6). Тогда, подставив (1.6) в (2.6), получим

$$\sigma_2(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t z_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [z_0(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.7)$$

Если модуль мгновенной деформации постоянен и равен E_0 , то соотношение (2.7) примет следующий вид

$$\sigma_2(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \int_{\tau_1}^t [\alpha z_0(\tau) + \beta [z_0(\tau)]^n] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.8)$$

Для решения уравнения (2.7) положим, как и в § 1,

$$\sigma_2(t) = \sigma_2^{(0)}(t) + \beta \sigma_2^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_2^{(2)}(t) + \dots \quad (2.9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\sigma_2^{(0)}(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(0)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau, \quad (2.10)$$

$$\sigma_2^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(1)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_2^{(0)}(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.11)$$

$$\sigma_2^{(2)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(2)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + n \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_2^{(0)}(\tau)]^{n-1} \sigma_2^{(1)}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.12)$$

Применяя вышеизложенный метод, аналогичным образом получим решения интегральных уравнений (2.10), (2.11), (2.12). Так, например, решение уравнения (2.10) будет

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(0)}(t) = & - \frac{\mu E_a \alpha_0}{1 + \mu m(\tau_1)} S_0 e^{-\tau_1 t} \int_{\tau_1}^t e^{-\tau_1 \tau} d\tau - \\ & - \int_{\tau_1}^t e^{-\tau_1 \tau} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} [S_n(z) + \gamma S_n'(z)] \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(z)} e^{\tau_1(z)} dz, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\tau_1(\tau)$ и $S_n(t)$ заданные функции, определяемые соответственно формулами (1.18) и (2.2).

Если модуль мгновенной деформации постоянен, то, пользуясь функцией влияния $\Phi(\xi, \rho)$, можно решению уравнения (2.10) придать следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(0)}(t) = & - \frac{\mu E_a \alpha_0 S_0}{1 + \mu m_0} \frac{e^{(\tau_1 - \alpha_0)t}}{r^{1-\rho}} \left[\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho) \right] - \\ & - \frac{\mu E_a \alpha_0 (\gamma - \alpha_0)}{1 + \mu m_0} S_0 \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\tau_1 \tau} d\tau}{\tau^\rho} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(\tau_1 - \alpha_0)x} x^\rho dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда решение уравнения (2.11) будет

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(1)}(t) = & \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\psi_1(t)] + \int_{\tau_1}^t \psi_1(\tau) \left[\gamma - \tau_1'(\tau) + \right. \\ & \left. + [\tau_1''(\tau) + \tau_1'''(\tau) - \gamma \tau_1'(\tau)] e^{\tau_1(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\tau_1 x} dx \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\tau_1(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha \tau(\tau) \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right] d\tau, \quad (2.16)$$

$$\psi_1(t) = \int_{\tau_1}^t [\sigma_a^{(0)}(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.17)$$

Если ограничиваться только вторым приближением, то решение основного нелинейного интегрального уравнения (2.7) можно представить в следующем виде

$$\sigma_a(t) = \sigma_a^{(0)}(t) + \beta \sigma_a^{(1)}(t) + O(\beta^2), \quad (2.18)$$

где $\sigma_a^{(0)}(t)$ и $\sigma_a^{(1)}(t)$ при постоянном модуле мгновенной деформации определяются формулами (2.14) и (2.15).

Аналогичным образом можно получить и остальные приближения.

В качестве приложения рассмотрим численный пример.

Определить значения усадочных напряжений бетона и арматуры, если функции $C(t, \tau)$ и $S_a(t)$ даны в следующем виде

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{0,023(t-\tau)}] 10^{-5} \text{ кг/см}^2,$$

$$S_a(t) = S_0 (e^{-0,011t_1} - e^{-0,011t}),$$

$$S_0 = 2 \cdot 10^{-4}$$

причем $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$, $\tau_1 = 1$ дню,

$$F[z_b(t)] = \alpha z_b(t) + \beta [z_b(t)]^2.$$

Предварительно запишем выражения для усадочных напряжений без учета ползучести бетона. Согласно (2.8) и (2.1) они будут иметь следующий вид

$$\sigma_{bs}(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t)$$

$$\sigma_{as}(t) = - \frac{E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t).$$

Вычислим сначала численные значения усадочных напряжений в бетоне $\sigma_{bs}(t)$ и арматуре $\sigma_{as}(t)$ без учета ползучести бетона, а затем соответствующие значения этих напряжений с учетом ползучести. На основании этих значений вычислим коэффициенты затухания усадочных напряжений в бетоне и арматуре для различных моментов времени, пользуясь формулами

$$H_b(t) = \frac{\sigma_b^*(t)}{\sigma_b(t)}, \quad H_a(t) = \frac{\sigma_a^*(t)}{\sigma_a(t)},$$

где $\sigma_b^*(t)$ и $\sigma_a^*(t)$ — представляют собой усадочные напряжения бетона и арматуры с учетом линейной ползучести, а $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ — соответственно усадочные напряжения при нелинейной ползучести бетона.

В табл. 3 и 4 приводятся численные значения усадочных напряжений в бетоне и арматуре без учета ползучести бетона и с учетом ползучести бетона в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях.

Таблица 3

Численные значения усадочных напряжений в бетоне и коэффициента затухания при $\beta = 0,1$

t	$\sigma_{sh}(t)$	$\gamma_b(t)$			$H_b(t)$		
		первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.	первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.
7	-0,58311	-0,54350	-0,54552	-0,54554	1	1,00372	1,00375
14	-1,21652	-1,08130	-1,09182	-1,09197	1	1,00972	1,00986
28	-2,34590	-1,94675	-1,99108	-1,99279	1	1,02277	1,02365
90	-5,69981	-4,16999	-4,59374	-4,66864	1	1,10162	1,11958
360	-8,95383	-6,13370	-7,33110	-7,78243	1	1,19522	1,26879

Таблица 4

Численные значения усадочных напряжений в арматуре и коэффициента затухания при $\beta = 0,1$

t	$\sigma_{as}(t)$	$\sigma_a(t)$			$H_a(t)$		
		первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.	первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.
7	19,437	18,1167	18,184	18,1845	1	1,00372	1,00375
14	40,5507	36,0435	36,394	36,39903	1	1,00972	1,00986
28	78,1967	64,8917	66,3693	66,4364	1	1,02277	1,02365
90	189,9937	138,999	153,125	155,6215	1	1,10162	1,11958
360	298,461	204,457	244,37	259,4145	1	1,19522	1,26879

Из данных, приведенных в табл. 3 и 4, следует, что при $\beta = 0,1$ можно ограничиваться только первым приближением, так как оно дает достаточно хорошие результаты. Исследование показывает, что при $\beta < 0,01$ численные значения первых и вторых приближений почти совпадают.

Ереванский государственный
университет

Поступило 15 VI 1953

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Մանուկյան

ՍԵՂՄՎԱԾ ԵՐԿԱՅԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԼՍՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ
ԲԵՏՈՆԻ ՈՉ ՀԱՍՏԱՏՎԼԾ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԿԾԿՍԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը նվիրված է սեղմված երկաթբետոն էլեմենտների լարվածային վիճակի հետազոտությանը, երբ բետոնը զանրվում է ոչ հաստատված սողքի պայմաններում և բետոնի ակնթարթային զեֆորմացիայի մոդուլը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է:

Սողքի ոչ զծալին տեսության հիման վրա, որը զարգացված է [1] աշխատության մեջ, քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է վերաբերյալ ոչ-զծալին ինտեգրալ համաարմանը, որի լուծման համար օգտագործվում է [2] աշխատության մեջ շարադրված մեթոդը:

Այս մեթոդի առանձնահատկությունն այն է, որ որպես առաջին մոտավորության վերցվում է ոչ խնդրի առաջական լուծումը, ինչպես աղբյուրվում է կատարել, սողքի ոչ-զծալին տեսության խնդրի Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով լուծելիս, այլ որպես առաջին մոտավորություն վերցվում է զծալին սողքի համապատասխան խնդրի լուծումը: Այս առանձնահատկության շնորհիվ զգալիորեն ուժեղանում է հաջորդական մոտավորությունների դոգամիտության արագացումը:

Որպես այս մեթոդի կիրառություն այստեղ բերվում է հետևյալ երկու խնդիրների լուծումը՝

1, Սկզբված երկաթբետոն էլեմենտների լարվածալին փրճակը, 2. Համաչափ երկաթապատված երկաթբետոն էլեմենտի կծկման լարումները՝ քիտոնի ոչ-զծալին սողքի և ակնթարթալին դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման հաշվառումով:

Այս խնդրի լուծումը քիտոնի զծալին սողքի հաշվառումով արված է [1] աշխատության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1957.
2. Александриян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ том XXII, вып. 5, 1958.
3. Розовский М. И. Полуснигматический способ решения некоторых задач теории ползучести. Известия АН Армянской ССР*, серия физ.-мат. наук, № 5, 1956.
4. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть составных цилиндрических труб. Известия АН Армянской ССР*, серия физ.-мат. наук, том X, № 6, 1957.
5. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ*, том 49, 1933.