ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 6, 1958 Физико-математические науки

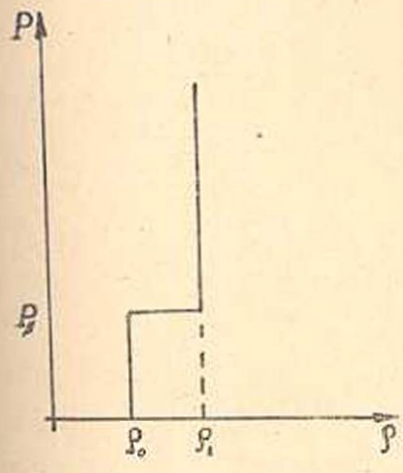
ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. Н. Кукуджанов

Ударные волны в уплотняющейся вязко-пластической среде

§ 1. В настоящей работе рассматривается распространение ударных волн вязко-пластической деформации в среде уплотняющейся следующим образом. В начальном недеформированном состоянии среда обладает плотностью ρ_0 и при этой плотности остается несжимаемой до некоторого значения давления P_s. При давлении равном P_s плотность среды скачком изменяется до плотности ρ_1 и в дальнейшем при увеличении давления остается постоянной.

Доведенная до плотности ρ_1 среда несжимаема и подчиняется законам вязко-пластического течения. Объемная деформация считается обратимой лишь в пределах изменения давления $P_s > P > 0$. При $P > P_s$ после разгрузки появляется остаточная объемная деформация. На фиг. 1 показана кривая изменения $P(\rho)$ при нагружении (сплошная линия) и при разгрузке (пунктир).



Фиг. 1. Ударные волны в уплотняющейся вязко-пластической среде.

Рассмотрим в бесконечной среде распространение ударной волны, возникающей под действием взрыва в некотором сферическом или цилиндрическом объеме радиуса a_0. Будем считать, что начальное давление взрыва P_0 значительно превосходит величину давления P_s. При таких условиях перемещения нельзя считать малыми и необходимо рассматривать конечную деформацию среды. Примем полярную систему координат, центр которой совместим с центром взрыва. Возникающее движение среды будем рассматривать в переменных Эйлера. Для случая сферического взрыва главными напряжениями будут σ_r, σ_θ и σ_φ, причем $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$. Для случая цилиндрической симметрии главными будут напряжения σ_r, σ_θ и σ_z.

Уравнения движения и неразрывности уплотненной среды в переменных Эйлера записываются так

$$\rho_1\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{k(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}\ ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^k v)=0; \tag{2}$$

$k=1$ для цилиндрического, $k=2$ для сферического случаев. В качестве уравнений, связывающих между собой напряжения и деформации за пределом текучести, возьмем дифференциальные зависимости для вязко-пластической среды, предложенные А. А. Ильюшиным.

$$D_\sigma\frac{S-\tau_s}{S}=2\mu D_i; \tag{3}$$

D_σ и D_i — девиаторы напряжения и скорости деформации.

$$S=\sqrt{\frac{1}{6}\left[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2\right]+\tau_{r\theta}^2+\tau_{rz}^2+\tau_{\theta z}^2}\ -$$

— интенсивность касательных напряжений.

τ_s — предел текучести на сдвиг, μ — коэффициент вязкости материала.

В случае сферической симметрии выражение для интенсивности касательных напряжений примет вид

$$S=\frac{|\sigma_r-\sigma_\theta|}{\sqrt{3}}.$$

При цилиндрической симметрии деформация будет плоской $\varepsilon_z=0$ и, используя условие несжимаемости, получим

$$S=\frac{|\sigma_r-\sigma_\theta|}{2}.$$

Тогда уравнения (3) совместно с уравнением (2) дадут, в рассматриваемом нами случае сжатия

$$|\sigma_r-\sigma_\theta|-m\sigma_S=2\mu(k+1)\frac{v}{r}, \tag{4}$$

$m=1$ для сферического и $m=\frac{2}{\sqrt{3}}$ для цилиндрического случаев.

На фронте ударной волны радиуса R должны выполняться уравнение сохранения массы вещества и теорема количества движения, которые дадут следующие соотношения:

$$\rho_0\frac{dR}{dt}=\rho_1\left[\frac{dR}{dt}-v(R)\right];$$

$$\rho_0\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\sigma_r(R+0)=\rho_1\left[\frac{dR}{dt}-v(R)\right]^2-\sigma_r(R-0). \tag{5}$$

Поскольку при давлениях меньших P_s среда несжимаема, то волны давления, не превышающие величины P_s, распространяются в ней с бесконечно большой скоростью, поэтому перед фронтом ударной волны, которая двигается с конечной скоростью $\sigma_r(R+0) = P_s$ всегда, когда давление в по. ости больше величины P_s. К такой же величине давления перед фронтом ударной во..ны приводит рассмотрение уравнения энергии [3].

Введем новые безразмерные переменные

$$\bar{v} = \frac{v}{c}\ ;\ \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{P_s}\ ;\ \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{P_s}\ ;\ \bar{r} = \beta\frac{r}{c}\ ;\ \bar{t} = \beta t, \tag{6}$$

где $$c^2 = \frac{P_s}{\rho_1}\ ;\quad \beta = \nu\sqrt{\frac{P_s}{2\mu(k+1)}}$$

ν — некоторое произвольное неравное нулю число, введенное для удобства.

Полная система уравнений (1), (2), (4) в безразмерных величинах примет следующий вид

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_r}{\partial\bar{r}} + k\frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{\bar{r}} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}\ ; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}} + k\frac{\bar{v}}{\bar{r}} = 0; \tag{8}$$

$$|\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta| - m = \nu\frac{\bar{v}}{\bar{r}}\ . \tag{9}$$

Условия на фронте ударной волны запишутся так

$$\frac{d\bar{R}}{d\bar{t}} = \bar{v}(R)\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}\ ; \tag{10}$$

$$\bar{P}(R-0) = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}\,v^2(R+1. \tag{11}$$

Так как в дальнейшем у нас будут встречаться лишь безразмерные величины, то, для удобства записи, знак черты над ними мы будем опускать и сохраним за ними названия соответствующих размерных величин.

Из уравнения (8) следует

$$v = \left(\frac{a}{r}\right)^k \frac{da}{dt}\ . \tag{12}$$

Здесь a — радиус полости.

Интегрируя уравнение (12) получаем

$$r^3 = a^3 + (r_0^3 - a_0^3) \tag{13}$$

где r_0 — начальная координата точки, а r — текущая коор..ината.

На основании (10) и (12) легко определить радиус фронта ударной волны

$$R^3 = \frac{\rho_1 a^3 - \rho_0 a_0^3}{\rho_1 - \rho_0}. \tag{14}$$

Подставляя (12) в уравнение (7) и исключая $\sigma_r - \sigma_\theta$ при помощи (9), получаем после интегрирования

$$P(a) - P(R) = -\frac{k}{k-1}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{k-1} - 1\right] -$$

$$-\frac{a}{(k-1)}\frac{d^2a}{dt^2}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{k-1} - 1\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{2k} - 1\right] +$$

$$+ km\ln\frac{R}{a} - \frac{\nu k}{k+1}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{k+1} - 1\right]. \tag{15}$$

Будем считать, что давление в полости возникает мгновенно, а затем изменяется по закону политропы степени γ

$$P(a) = P_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{(k+1)\gamma}. \tag{16}$$

Подставляя в (15) из (11) и (16) величины $P(R-0)$ и $P(a)$ получаем окончательное уравнение:

$$\frac{a(\alpha-1)}{2(k-1)}\frac{dx}{da} = \left[\frac{1}{2}(\alpha^{2k}-1) - 2(\alpha^{k-1}-1) + \frac{\rho_0}{\rho_1-\rho_0}\alpha^{2k}\right]x -$$

$$-\frac{\nu k}{k+1}\frac{1}{a}(\alpha^{k+1}-1)\sqrt{x} - km\ln\alpha - P_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\gamma(k+1)} + 1. \tag{17}$$

Здесь $$x = \left(\frac{da}{dt}\right)^2, \quad \alpha = \frac{a}{R}, \quad k \neq 1.$$

В случае цилиндрической симметрии, когда $k = 1$ получаем:

$$\frac{a}{2}\ln\alpha\frac{dx}{da} = \left[\frac{\rho_0}{\rho_1-\rho_0}\alpha^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2-1) - \ln\alpha\right]x -$$

$$-P(a) + 1 - m\ln\alpha - \frac{\nu}{2a}(\alpha^2-1)\sqrt{x}. \tag{18}$$

Если пренебречь касательными напряжениями, то два последних члена в уравнении (18) пропадут и оно перейдет в аналогичное уравнение полученное в работе [1].

Начальное значение x_0 определяется на основании (11) при $t=0$.

$$P(a_0) = 1 + \frac{\rho_0}{\rho_1-\rho_0}x_0. \tag{19}$$

Для численного интегрирования полученных дифференциальных уравнений необходимо знать значение производной $\frac{dx}{da}$ в начальный момент

времени $t = 0$. Значение этой производной может быть определено, если раскрыть неопределенность в уравнении (17) для сферического и в уравнении (18) для цилиндрического случаев. В случае сферической симметрии имеем:

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{a}{2} \frac{dx}{da} = \lim_{\alpha \to 1} \left[x\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha - 1} - 2 \right) - \frac{2\nu}{3a} \frac{(\alpha^3 - 1)}{(\alpha - 1)} \sqrt{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \alpha^4 x - P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma} + 1}{\alpha - 1} - 2 \right].$$

В пределе

$$\left(\frac{dx}{da} \right)_{t=0} = \frac{2}{3a_0} \left[\frac{4\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x_0 - 3\gamma \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} P_0 - 2 - \frac{2\nu}{a_0} \sqrt{x_0} \right]. \qquad (20)$$

В случае цилиндрической симметрии на основании (18) находим

$$\left(\frac{dx}{da} \right)_{t=0} = \frac{2}{3a_0} \left[\frac{2\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x_0 - 2\gamma P_0 \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} - \left(m + \frac{\nu \sqrt{x_0}}{a_0} \right) \right]. \qquad (21)$$

На фиг. 2 приведены результаты численного интегрирования дифференциального уравнения (17) методом Адамса для следующего примера:

$$P_0 = 100\ P_s;\quad \gamma = 1;\quad \rho_0 = 2\ г/см^3;\quad \rho_1 = 2{,}5\ г/см^3;\quad a_0 = 0{,}04,$$

ν выбрано равным $\frac{k+1}{k}$.

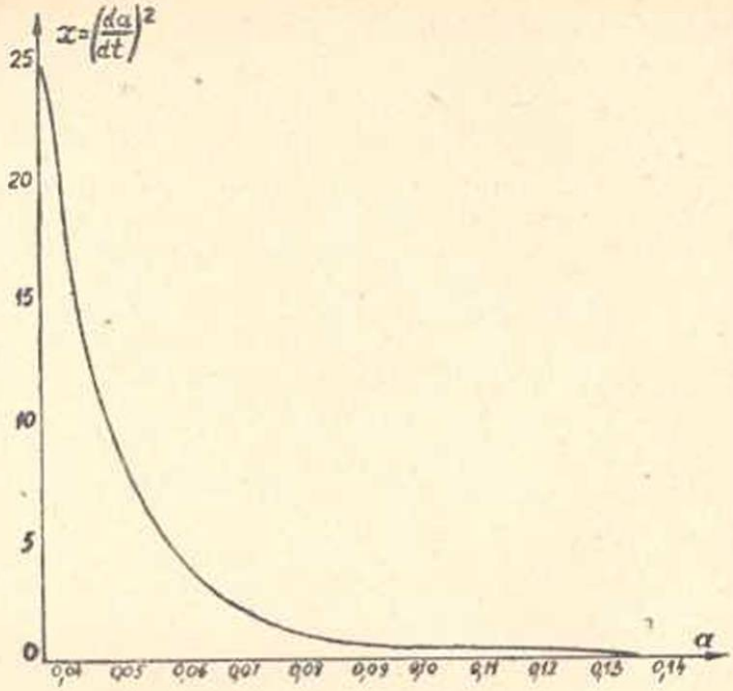
Качественное исследование интегральных кривых уравнения (17), в зависимости от величины коэффициента вязкости, показывает, что они меняются так, как это изображено на фиг. 3. При больших величинах коэффициента вязкости μ кривые не имеют участка, где скорость движения границы полости возрастала бы с увеличением радиуса полости a, затухание движения идет быстрее при больших значениях μ, и следовательно, конечный радиус полости уменьшается с возрастанием μ.

Движение среды полностью останавливается, когда $x = \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 0$.

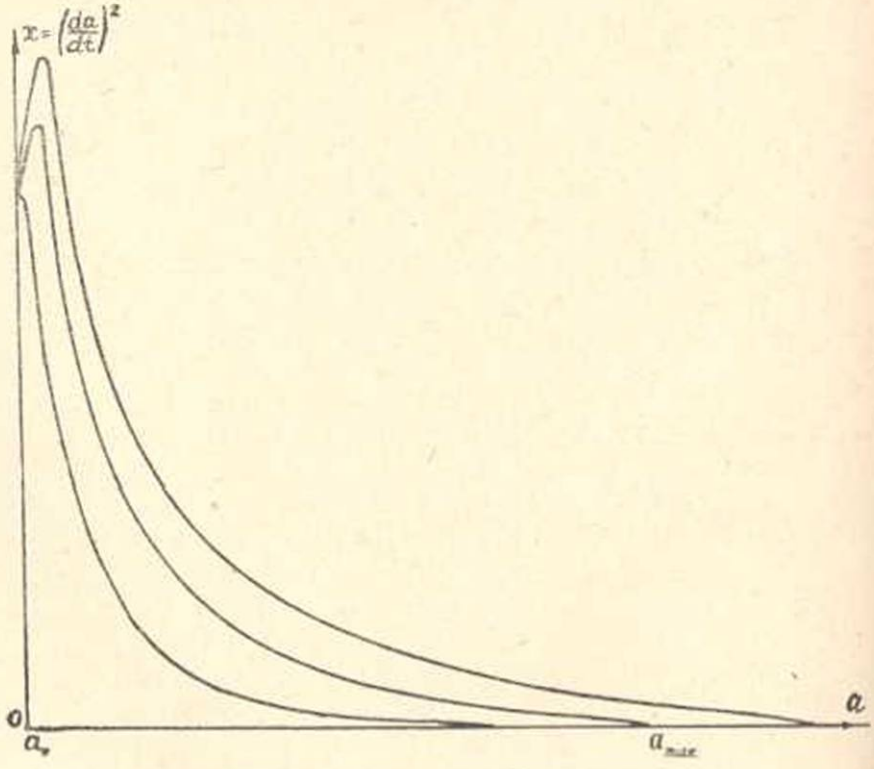
Полное время расширения отверстия может быть определено из следующего выражения

$$T = \int_{a_0}^{a_{max}} \frac{da}{\sqrt{x}}. \qquad (22)$$

Все величины, характеризующие движение и напряженное состояние среды, легко могут быть вычислены с помощью ранее полученных формул.



Фиг. 2. Кривая зависимости квадрата скорости границы сферической полости от величины радиуса a.



Фиг. 3. Интегральные кривые уравнения (23) при различных значениях коэффициента вязкости среды.

§ 2. В предыдущем параграфе мы численно интегрировали полученные уравнения. В этом параграфе рассмотрим способ приближенного аналитического решения уравнений (17) и (18). В выражении (14) величиной a_0^3 можно пренебречь по сравнению с a^3, даже если $1-\frac{\rho_0}{\rho_1}$ порядка нескольких процентов.

Тогда величина α будет постоянной

$$\alpha=\frac{a}{R}=\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}.$$

Уравнение (17) можно при этом записать так

$$(\alpha-1)\frac{a}{2}\frac{dx}{da}-\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^4+1)\right]x+$$

$$+\frac{2\nu}{3a}(\alpha^3-1)\sqrt{x}+P_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}+2\ln\alpha-1=0, \qquad (23)$$

В уравнении (18) α следует считать постоянной, само же уравнение останется без изменений.

Оба эти уравнения отличаются друг от друга лишь коэффициентами, поэтому в дальнейшем мы ограничимся сферическим случаем, а все проводимые рассуждения будут полностью применимы и к уравнению (18) с некоторыми несущественным изменениями в обозначениях.

Уравнение (23) относится к уравнениям Абеля не интегрируемым в квадратурах. При нелинейном члене, обусловленном наличием вязких сил трения, оно содержит некоторый параметр ν. Если $\nu=0$, то нелинейный член в уравнении пропадает и оно легко интегрируется, при этом уравнение (23) совпадает с уравнением (12), полученным в работе [2], если там m положить равным нулю. Поэтому все оценки и рассуждения, подтверждающие законность пренебрежения a_0^3 по сравнению с a^3 приведенные в работе [2], имеют место и для уравнения (23) при $\nu=0$.

Для решения уравнения (23) применим метод малого параметра. Малость параметра ν следует рассматривать, как малость сил вязкости по сравнению с силами инерции. При этом ν уже не может быть выбрано произвольно. Так как ν должно содержаться только при нелинейном члене, то β следует выбрать независимо от ν, иначе ν войдет и в другие члены уравнения через β.

Из соображений размерности, β можно определить, как $\frac{c}{a_0}=\beta$, тогда на основании (6) $\nu=\frac{2(k+1)\mu c}{P_2 a_0}$.

Будем искать решение уравнения (23) в виде ряда по степеням ν

$$x=x_0+\nu x_1+\nu^2 x_2+\cdots \qquad (24)$$

Подставляя это выражение в уравнение (23) и приравнивая члены, содержащие одинаковые степени ν, получим следующие уравнения для определения функций x_0, x_1 и x_2.

$$(\alpha-1)\frac{a}{2}\frac{dx_0}{da}-\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^4+1)\right]x_0+2\ln\alpha+$$

$$+P_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}-1=0 \tag{25}$$

$$(\alpha-1)\frac{a}{2}\frac{dx_1}{da}-\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^4+1)\right]x_1=-$$

$$-\frac{2}{3a}(\alpha^3-1)x_0^{1/3} \tag{26}$$

$$(\alpha-1)\frac{a}{2}\frac{dx_2}{da}-\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^4+1)\right]x_2=-\frac{(\alpha^3-1)}{3a}\frac{x_1}{x_0^{1/3}}. \tag{27}$$

Аналогичным образом могут быть выписаны и все остальные уравнения для определения функций x_n, все они, как и уравнения (25)—(27), могут быть проинтегрированы в квадратурах. Сходимость ряда (24) вытекает из теоремы Пуанкаре, (смотри, например, [5]), условия которой в рассматриваемом нами случае выполняются.

Считая параметр ν малым, ограничимся членами порядка ν^2 пренебрегая более высокими степенями ν.

Начальные условия для определения функций x_n следует брать на основании (19) такими

$$a=a_0 \quad x_0=(P_0-1)\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3} \quad x_1=x_2=\cdots=x_n=\cdots=0. \tag{28}$$

Введем новую независимую переменную $\zeta=\dfrac{a}{a_0}$ и запишем уравнение (25) в более удобном виде

$$\frac{dx_0}{d\zeta}-\frac{n}{\zeta}x_0=A\left(\frac{1}{\zeta}-B\zeta^{-3\gamma-1}\right). \tag{29}$$

Решение его, удовлетворяющее начальному условию (28), записывается так:

$$x_0=\left[\frac{\alpha^3(P_0-1)}{1-\alpha^3}+\frac{A}{n}-\frac{AB}{3\gamma+n}\right]\zeta^n+\frac{AB}{3\gamma+n}\zeta^{-3\gamma}-\frac{A}{n}=$$

$$=M\zeta^n+N\zeta^{-3\gamma}-L. \tag{30}$$

Здесь

$$A=\frac{2(1-2\ln\alpha)}{\alpha-1}\ ;\quad B=\frac{P_0}{1-2\ln\alpha}\ ;\quad n=-(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1).$$

Заметим, что $A<0$, $B>0$, $-6\leqslant n\leqslant -3$.

Решения уравнений (26) и (27), удовлетворяющие условиям (28), будут иметь вид:

$$x_1 = -\frac{4}{3a_0}(\alpha^2+\alpha+1)\zeta^n \int_1^\zeta \sqrt{M\zeta^n + N\zeta^{-3\gamma} - L}\ \zeta^{-(n+2)}\,d\zeta; \qquad (31)$$

$$x_2 = \frac{8(\alpha^2+\alpha+1)^2}{9a_0^2}\zeta^n \int_1^\zeta \frac{\int_1^\zeta s^{-(n+2)}\sqrt{Ms^n + Ns^{-3\gamma} - L}\,ds}{\zeta^2\sqrt{M\zeta^n + N\zeta^{-3\gamma} - L}} - d\zeta. \qquad (32)$$

Интеграл в выражении (31) может быть сведен к эллиптическим интегралам, когда числитель выражения (30) представляет собой полином третьей или четвертой степени.

Рассмотрим случай, когда на границе полости в начальный момент времени мгновенно приложено давление $P_0 > P_s$, которое остается постоянным до некоторого момента времени t_1, при котором оно скачком падает до величины P_s. Отношение плотностей возьмем $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 0{,}83$, тогда $n = -4$.

Подставляя эти значения в выражение (30) получим

$$\frac{0{,}905P_0 - 2{,}237}{\zeta^4}\left[\frac{1{,}11(P_0 - 2{,}2)\zeta^4}{0{,}905P_0 - 2{,}237} - 1\right] = \frac{\gamma^2}{\zeta^4}(k^2\zeta^4 - 1), \qquad (33)$$

причем важно, чтобы $0{,}905P_0 - 2{,}237 > 0$, тогда $k > 1$.
Выражение (31) будет записываться так:

$$x_1 = -\frac{4\gamma}{3a_0}(\alpha^2\alpha+1)\zeta^{-4}\int_1^\zeta \sqrt{k^2\zeta^4 - 1}\,d\zeta. \qquad (34)$$

После некоторых преобразований интеграл в выражении (34) может быть приведен к эллиптическому интегралу:

$$\int_1^\zeta \sqrt{k^2\zeta^4 - 1}\,d\zeta = \frac{\zeta}{3}\sqrt{k^2\zeta^4 - 1} - \frac{1}{3}\sqrt{k^2 - 1} - \frac{2}{3}\int_1^\zeta \frac{ds}{\sqrt{k^2s^4 - 1}}.$$

Сделаем замену в подинтегральном выражении $s\sqrt{k} = \xi$. Тогда окончательно получим следующее выражение для x_1

$$x_1 = -\frac{4\gamma}{9a_0^2}(\alpha^2+\alpha+1)\zeta^{-4}\left[\zeta\sqrt{k^2\zeta^4 - 1} - \sqrt{k^2 - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{k}}\left(\int_1^{\zeta\sqrt{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - \int_1^{\sqrt{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}\right)\right] =$$

$$= \frac{-4\gamma}{9a_0}(\alpha^2+\alpha+1)\zeta^{-4}\left[\zeta\sqrt{k^2\zeta^4 - 1} - \sqrt{k^2 - 1} - \right.$$

$$-\sqrt{\frac{2}{k}}\left[F\left(\arccos\frac{1}{\zeta\sqrt{k}},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-F\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{k}},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\Bigg\}, \qquad (35)$$

где $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода в нормальной тригонометрической форме.

Выражение для x_2 может быть приведено к следующему виду

$$x_2=\frac{8(\alpha^2+\alpha+1)^2}{9a_0^{\frac{n}{2}}\zeta^4}\int_1^{\zeta}\frac{\int_1^{\zeta}\sqrt{k^2s^4-1}\,ds}{\sqrt{k^2\zeta^4-1}}\,d\zeta. \qquad (36)$$

Подставляя полученные выражения x_0, x_1, x_2 в (24), найдем решение уравнения (23), в котором сохранены члены, содержащие ν в степени не выше второй. Это решение будет справедливо лишь до момента времени t_1, когда давление в полости резко уменьшается до значения P_s. Начиная с этого момента времени в уравнении (23) следует положить $\gamma=0$ $P_0=1$.

Радиус полости a_1 в момент времени t_1 определяется из следующего уравнения

$$t_1=\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{\sqrt{x}}.$$

Уравнение (23) перепишем в следующем виде, введя новую независимую переменную $\eta=\frac{a}{a_1}$,

$$\frac{dz}{a\eta}-\frac{n}{\eta}z+\nu\frac{4}{3}\,\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\eta^2a_1}\sqrt{z}=\frac{4}{1-\alpha}\ln\alpha\,\frac{1}{\eta}. \qquad (37)$$

Решение, как и раньше, ищем в виде ряда по степеням ν

$$z=z_0+\nu z_1+\nu^2z_2+\cdots \qquad (38)$$

Уравнение для определения z_0 будет следующим

$$\frac{dz_0}{d\eta}-\frac{n}{\eta}z_0=\frac{4}{1-\alpha}\ln\alpha\,\frac{1}{\eta}. \qquad (39)$$

Уравнения (26) и (27) останутся без изменений, только в них x_0 надо заменить на z_0, x_1 на z_1 и x_2 на z_2.

Начальные условия для уравнения (37) следует взять следующими

при $$a=a_1 \quad z=x_0(a_1)+\nu x_1(a_1)+\nu^2x_2(a_1). \qquad (40)$$

Тогда начальные условия для определения z_0, z_1 и z_2 будут такими

при $\eta = 1 \quad z_0 = x_0(a_1) + \nu x_1(a_1) + \nu^2 x_2(a_1); \quad z_1 = z_2 = 0.$ (41)

Решение уравнения (39), удовлетворяющее условию (41), будет иметь следующий вид

$$z_0 = \left[x(a_1) - \frac{\ln\alpha}{(1-\alpha)}\right]\eta^{-4} + \frac{\ln\alpha}{(1-\alpha)}. \tag{42}$$

Учитывая величины и знаки коэффициентов в этом выражении, перепишем его так

$$z_0 = (1 - k_1^2\eta^4)\frac{\gamma_1^2}{\eta^4},$$

$$\gamma_1^2 = x(a_1) - \frac{\ln\alpha}{1-\alpha}; \qquad 0 < k_1^2 = \frac{\ln\alpha}{(1-\alpha)\gamma_1^2} < 1.$$

Выражение для z, будет таким

$$z_1 = -\frac{4\gamma_1}{3a_1}(\alpha^2 + \alpha + 1)\frac{1}{\eta^4}\int_1^\eta \sqrt{1 - k_1^2\eta^4}\, d\eta. \tag{43}$$

Интеграл в выражении (43) преобразуется к эллиптическим, и тогда получаем

$$z_1 = -\frac{4\gamma_1}{9a_1}(\alpha^2 + \alpha + 1)\frac{1}{\eta^3}\left\{\sqrt{1-k_1^2} - \eta\sqrt{1 - k_1^2\eta^4} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{k_1}}\left[F\left(\arccos\sqrt{k_1};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arccos\eta\sqrt{k_1};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}. \tag{44}$$

Выражение для z_2 будет иметь следующий вид:

$$z_2 = \frac{8}{9a_1^2}(\alpha^2 + \alpha + 1)^2\frac{1}{\eta^4}\int_1^\eta \frac{\int_1^\eta \sqrt{1 - k_1^2 s^4}\, ds}{\sqrt{1 - k_1^2\eta^4}}\, d\eta. \tag{45}$$

Полученное решение будет справедливо до некоторого момента t_2, когда за фронтом волны радиальное напряжение станет равным P_2—величине напряжения перед фронтом. В этот момент ударная волна уплотнения перестанет существовать и движение среды остановится.

Московский
физико-технический институт

Поступило 6 VI 1958

Վ. Ն. Կուկուջանով

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԽՏԱՑՎՈՂ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱ-ՊԼԱՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հոդվածում լուծվում է հարվածային ալիքների տարածման խնդիրը պլաստիկ միջավայրում, որի խտությունը որոշակի ճնշման դեպքում փոխվում է թռիչքով։ Ենթադրվում է, որ միջավայրը խտացումից հետո դառնում է անսեղմելի և ենթարկվում է մածուցիկա-պլաստիկ հոսքի օրենքներին։

Արտածված են դիտարկվող միջավայրի շարժման հավասարումները գնդային և գլանային սիմետրիայի դեպքում։ Այդ հավասարումներն ինտեգրվում են թվային եղանակով։ Ստացված արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների ձևով։

Ուսումնասիրված է մածուցիկության գործակցի ազդեցությունը միջավայրի շարժման բնույթի վրա։

Արտածված հավասարումները լուծված են, ենթադրելով, որ մածուցիկության ուժերը, իներցիոն ուժերի հետ համեմատած, փոքր են։ Լուծումը որոնված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի աստիճաններին։ Ցույց է տրված, որ այդ շարքի բոլոր գործակիցները կարող են հաշվվել կվադրատուրաներով։ Բերված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. В.* и *Степаненко И. З.* К динамике грунтовых масс, ДАН СССР т. XCV, № 4, 1954 г.
2. *Компанеец А. С.* Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. ДАН СССР т. 109, № 1, 1956 г.
3. *Григорян С. С.* О постановке динамических задач для идеальных пластических сред. ПММ т. XIX, в. 6, 1955 г.
4. *Кукуджанов В. Н.* Распространение сферических волн в упруго-вязко-пластической среде. Изв. Высшей школы 1958 г., № 2. Машиностроение.
5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Госиздат. Тех-теор. лит. 1950 г.