

В. В. Еганян

К плоской задаче теории упругости для полукруга

Статья посвящена исследованию плоского напряженного состояния в полукруговой области, нагруженной распределенными по произвольному закону нагрузками по прямолинейному и дуговому краям. Задача рассмотрена в криволинейных биполярных координатах. Решение представлено через интеграл Фурье.

§ 1. Общее решение задачи

Рассмотрим задачу в криволинейных биполярных координатах, которые связаны с прямоугольными координатами следующим образом [1]:

$$\alpha = \ln \frac{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \pi, \quad (1.1)$$

где $2a$ — расстояние между полюсами.

Решая (1.1) относительно x и y , находим:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (1.2)$$

Рассматриваемая нами область, ограниченная линиями $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, есть полукруг с радиусом a , к которому вдоль прямолинейного и дугового краев приложены нормальные и касательные напряжения (фиг. 1):

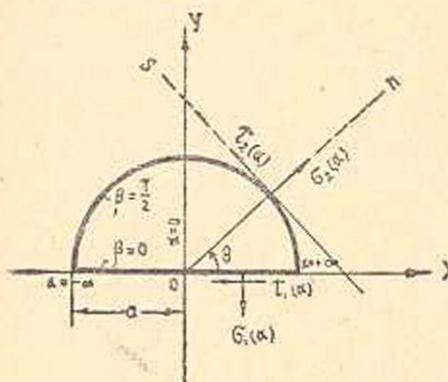
$$\begin{aligned} \sigma_{\beta} \Big|_{\beta=0} &= \sigma_1(\alpha), & \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\beta=0} &= \tau_1(\alpha), \\ \sigma_{\beta} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \sigma_2(\alpha), & \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \tau_2(\alpha). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предполагаем, что функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и производные $\sigma_1(\alpha)$ и $\sigma_2(\alpha)$ интегрируемы в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Общие формулы напряжений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [2]:

$$\sigma_{\alpha} = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\text{ch} \alpha}{a} \right] (g\Phi),$$

$$\sigma_{\beta} = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi),$$



Фиг. 1.

$$\tau_{\alpha\beta} = g \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi), \quad (1.4)$$

$$\text{где } g = \frac{\text{ch} \alpha + \cos \beta}{a}. \quad (1.5)$$

Нормальные напряжения σ_{α} и σ_{β} соответственно направлены по нормальям к линиям $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

Функция $\Phi(\alpha, \beta)$ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению $\Delta^2 \Phi = 0$, которое в биполярных координатах записывается так:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi) = 0. \quad (1.6)$$

Формулы упругих смещений имеют следующий вид [1]:

$$u = \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right],$$

$$v = \frac{g}{2\mu} \left[-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right], \quad (1.7)$$

где

$$g\Psi = -\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi) d\alpha d\beta. \quad (1.8)$$

Функция $\Psi(\alpha, \beta)$ также является бигармонической.

Решение уравнения (1.6), т. е. $g\Phi$, разыскиваем в таком виде:

$$g\Phi = g\Phi_0 - aC_0 \cdot \cos \beta, \quad (1.9)$$

где

$$g\Phi_0 = \int_0^{\infty} [f_1(m, \beta) \cos m\alpha + f_2(m, \beta) \sin m\alpha] dm. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.4), получим:

$$\sigma_{\alpha} = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\text{ch} \alpha}{a} \right] (g\Phi_0) + C_0,$$

$$\sigma_{\beta} = \left[g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi_0) + C_0,$$

$$\tau_{x\beta} = g \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0). \quad (1.11)$$

Граничные условия (1.3) с учетом (1.5) и (1.11) запишутся следующим образом:

$$\left[(\operatorname{ch} \alpha + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right] (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} + aC_0 = a\tau_1(\alpha),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1},$$

$$\left[\operatorname{ch} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right] (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} + aC_0 = a\tau_2(\alpha),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha}. \quad (1.12)$$

Так как $g\Phi_0$ представлено в виде интеграла Фурье, то левые части второго и четвертого условий (1.12) будут представлять собой некоторые интегралы Фурье. Однако первое и третье условия (1.12) непосредственно не дают интеграла Фурье, так как в них перед знаками интегралов имеются функции от переменной α . С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду [1], дифференцируем первое и третье условия (1.12) по α . С учетом четвертого условия (1.12) получим:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_1'(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1},$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a \operatorname{ch} \alpha \tau_2'(\alpha) - a\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha}. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.10) в (1.6), находим для $f_1(m, \beta)$ и $f_2(m, \beta)$ следующее выражение:

$$f_i(m, \beta) = A_i(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B_i(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta +$$

$$+ C_i(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D_i(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta. \quad (i = 1, 2) \quad (1.14)$$

Из второго и четвертого условий (1.12) и из (1.13) с учетом (1.10) и (1.14) находим:

$$A_1(m) K_{1,1}(m),$$

$$B_1(m) = L \left\{ m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{1,1}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - m K_{2,1}(m) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \left[K_{3,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m K_{4,i}(m) \right], \\
 C_i(m) = & -L \left\{ \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{1,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - m K_{2,i}(m) \right] + \right. \\
 & \left. + m K_{3,i}(m) + K_{4,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \right\}, \quad (1.15) \\
 D_i(m) = & -L \left\{ \left[m K_{1,i} \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2} - (m^2 + 1) K_{2,i} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \right] + \right. \\
 & \left. + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{3,i} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m K_{4,i} \right] \right\}. \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned}$$

Где обозначены:

$$L = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2},$$

$$K_{1,1}(m) = \frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1'(x) \sin mx \, dx}{\operatorname{ch} x + 1} = f_1(m, 0),$$

$$K_{1,2}(m) = -\frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1'(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f_2(m, 0),$$

$$K_{2,1}(m) = \frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sigma_2'(x) \operatorname{ch} x - \tau_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] \sin mx \, dx = f_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$K_{2,2}(m) = -\frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sigma_2'(x) \operatorname{ch} x - \tau_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] \cos mx \, dx = f_2\left(m, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$K_{3,1}(m) = -\frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(x) \sin mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f_1'(m, 0),$$

$$K_{3,2}(m) = \frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f_2'(m, 0),$$

$$K_{4,1}(m) = -\frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(x) \sin mx}{\operatorname{ch} x} \, dx = f_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$K_{4,2}(m) = \frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x} \, dx = f_2\left(m, \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя (1.15) в (1.14), находим выражение для $f_i(m, \beta)$, после чего из (1.10) находим $g\Phi_0$.

Найденное таким путем $g\Phi_0$ будет решением задачи, удовлетворяющим второму и четвертому условиям (1.12) и условию (1.13). Для того, чтобы полученное выше $g\Phi_0$ было бы решением задачи, удовлетворяющим всем условиям (1.12), подставим $g\Phi_0$ из (1.10) в (1.12) и определим постоянное C_0 так, чтобы первое и третье условия (1.12) также удовлетворялись.

Первое и третье условия (1.12) с учетом (1.10) и (1.16) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 & -(\operatorname{ch}x + 1) \int_0^{\infty} m^2 [K_{1,1} \cos mx + K_{1,2} \sin mx] dm + \\
 & + \operatorname{sh}x \int_0^{\infty} m [K_{1,2} \cos mx - K_{1,1} \sin mx] dm - \\
 & - \int_0^{\beta} [K_{1,1} \cos mx + K_{1,2} \sin mx] dm + a \cdot C_0 = a \cdot \sigma_1(x), \\
 & - \operatorname{ch}x \int_0^{\infty} m^2 [K_{2,1} \cos mx + K_{2,2} \sin mx] dm + \\
 & + \int_0^{\infty} [K_{4,1} \cos mx + K_{4,2} \sin mx] dm + aC_0 = a\sigma_2(x). \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

С целью нахождения простого выражения для C_0 , первое уравнение умножим на $\frac{dx}{\operatorname{ch}x + 1}$, а второе на $\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$ и, проинтегрировав в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая следующую известную теорему [4], по которой

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(m) \sin mx dm = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(m) \cos mx dm = 0,$$

когда функция $\varphi(m)$ абсолютно интегрируема в пределах от 0 до ∞ , получаем следующие уравнения:

$$2a \cdot C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\tau_1(x)}{\operatorname{ch}x + 1} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} dx \int_0^{\infty} m [K_{4,1} \sin mx - K_{4,2} \cos mx] dm + 2aC_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha. \quad (1.18)$$

Из (1.10), (1.12) и (1.16) находим:

$$\frac{d\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} = - \int_0^{\infty} m [K_{4,1} \sin m\alpha - K_{4,2} \cos m\alpha] dm.$$

Следовательно (1.18) можно переписать в таком виде:

$$2C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha,$$

$$2C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha. \quad (1.19)$$

С помощью условий равновесия можно показать, что правые части (1.19) равны между собой.

Для этого, проектируя все силы на ось OX , OY и составляя моменты всех сил относительно начала координат, получим следующие три уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2} d\alpha = 0. \quad (1.20)$$

Из второго уравнения (1.20) видно, что правые части (1.19) действительно равны между собой.

С помощью (1.8), (1.9), (1.10), (1.14), (1.15), (1.16) и (1.19) из (1.11) и (1.7) можно определить соответствующие напряжения и перемещения в любой точке полукруга. С помощью граничных условий (1.3) легко вычисляются напряжения σ_2 на линиях $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Для их вычисления предварительно определим разность $(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$. Из (1.11) имеем:

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right] (g\Phi_0). \quad (1.21)$$

С помощью (1.3), (1.10), (1.14) и (1.16) из (1.21) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_0 \Big|_{\beta=0} &= \sigma_1(x) + \frac{2}{a} (\operatorname{ch} x + 1) \int_0^{\infty} m [(mK_{1,1} + D_1) \cos ma + \\ &\quad + (mK_{1,2} + D_2) \sin ma] dm, \\ \sigma_2 \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \sigma_2(x) + \frac{2}{a} \operatorname{ch} x \int_0^{\infty} m \left[\left(mK_{2,1} - A_1 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - C_1 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \right) \cos ma + \right. \\ &\quad \left. + \left(mK_{2,2} - A_2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - C_2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \right) \sin ma \right] dm. \end{aligned} \quad (1.22)$$

§ 2. Частные случаи

а) Случай, когда на дуговом крае действует постоянное давление, а на прямолинейной кромке приложены усилия, изменяющиеся по экспоненциальному закону, т. е.:

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4} e^{-nx} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & -\infty \leq x \leq 0 \\ \frac{Q_2}{4} e^{-nx} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & 0 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

$$\sigma_2(x) = q = \text{const}, \quad \tau_1(x) = \tau_2(x) = 0, \quad (2.1)$$

где n — постоянный параметр, а $Q_1 = \sigma_1(0)$. Такой выбор $\tau_1(x)$ облегчает вычисление первого интеграла (1.16) и переход к сосредоточенной силе (когда $n \rightarrow \infty$).

Подставляя (2.1) в (1.16) находим:

$$\begin{aligned} K_{1,1}(m) &= -\frac{aQ_1}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} + \frac{2n}{m^2+n^2} \right], \\ K_{1,2} &= 0, \quad K_{2,i} = K_{3,i} = K_{4,i} = 0, \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первое и третье условия равновесия (1.20) с помощью (2.1) удовлетворяются тождественно, а из второго условия получим:

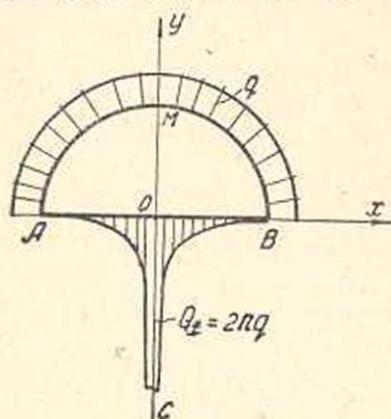
$$Q_1 = \frac{4n(n^2-1)}{2n^2-1} q. \quad (2.3)$$

Для больших n (2.2) и (2.3) можно переписать так:

$$K_{1,1} = -\frac{anQ_1}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)}, \quad K_{1,2} = K_{2,i} = K_{3,i} = K_{4,i} = 0, \quad (i=1,2). \quad (2.4)$$

$$Q_1 = 2nq. \quad (2.5)$$

Из (2.1) видно, что для больших n распределение $\sigma_1(x)$ на линии $\beta=0$ приближается к сосредоточенной силе (фиг. 2).



Фиг. 2.

Из (1.19) с учетом (2.1) получим:

$$C_0 = q. \quad (2.6)$$

Из (1.22) с помощью (1.15), (2.4) и (2.5) имеем:

$$\sigma_a \Big|_{\beta=0} = \sigma_1(x) + \frac{4qn^2}{\pi} (\text{ch}x + 1) \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m \alpha dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)},$$

$$\sigma_a \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_2(x) - \frac{4qn^2}{\pi} \text{ch}x \int_0^{\infty} \frac{m \text{sh} \frac{m\pi}{2} \cos m \alpha dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)}. \quad (2.7)$$

По методу трапеции вычисляем интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 0,60291;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{m \text{sh} \frac{m\pi}{2} dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 1,33476. \quad (2.8)$$

Из (2.7) с помощью (2.1), (2.5) и (2.8) для точек O и M находим:

$$\sigma_a \Big|_{\substack{\beta=0 \\ \alpha=0}} = 2nq + 1,5360 \cdot q,$$

(2.9)

$$\sigma_a \Big|_{\substack{\beta=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=0}} = -0,7003 \cdot q.$$

Теперь, если на фиг. 2 подсчитать суммарную нагрузку, которая приложена на линии $\beta=0$ и приравнять ее при $n \rightarrow \infty$ заданной величине P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha + 1} = P, \quad (2.10)$$

получим случай действия сосредоточенной силы (фиг. 3).

Из (2.1) и (2.10) получим.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{n} = \frac{P}{a}. \quad (2.11)$$

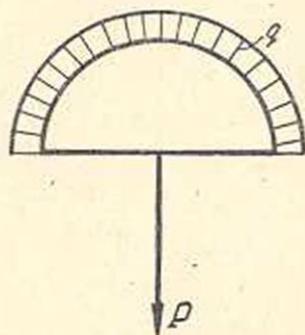
Из (1.19) с учетом (2.10) находим:

$$C_0 = \frac{P}{2a}. \quad (2.12)$$

Из (2.2) с учетом (2.11) при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$K_{1,1} = -\frac{P}{\pi(m^2 + 1)}, \quad K_{1,2} =$$

$$K_{2,1} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.13)$$



Фиг. 3.

б) Когда

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha) &= q = \text{const}, \\ \sigma_2(\alpha) &= \begin{cases} Q_2 e^{n\alpha} \operatorname{ch}^n \alpha & -\infty \leq \alpha \leq 0 \\ & (n \geq 2) \\ Q_2 e^{-n\alpha} \operatorname{ch}^n \alpha & 0 \leq \alpha \leq \infty \end{cases} \\ \tau_1(\alpha) &= \tau_2(\alpha) = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$Q_2 = \sigma_2(0).$$

Такой выбор $\sigma_2(\alpha)$ имеет те же преимущества, что и выбор $\sigma_1(\alpha)$ в случае а).

Подставляя (2.14) в (1.16) находим:

$$K_{2,1} = -\frac{aQ_2}{\pi(m^2 + 1)} \left[\frac{n-2}{m^2 + (n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2 + (n+1)^2} \right], \quad (2.15)$$

$$K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Из второго условия равновесия (1.20) и (2.14) получим:

$$Q_2 = nq. \quad (2.16)$$

Для больших n можно (2.15) переписать так:

$$K_{2,1} = -\frac{2anQ_2}{\pi(m^2 + 1)(m^2 + n^2)}, \quad K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0. \quad (2.17)$$

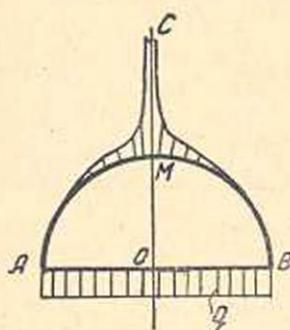
$(i = 1, 2)$

Из (2.14) видно, что для больших n распределение $\sigma_2(\alpha)$ на линии $\beta = \frac{\pi}{2}$ приближается к сосредоточенной силе (фиг. 4).

Из (1.19) с учетом (1.14) получим:

$$C_0 = q. \quad (2.18)$$

Из (1.22) с помощью (1.15), (2.16) и (2.17) будем иметь:



Фиг. 4.

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} = \sigma_1(x) - \frac{4qn^2}{\pi} (\text{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \text{sh} \frac{m\pi}{2} \cos m x \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)},$$

$$\sigma_x \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_2(x) +$$

$$+ \frac{4qn^2}{\pi} \text{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m x \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)}. \quad (2.19)$$

С помощью (2.8), (2.14) и (2.16) из (2.19) для точек O и M (фиг. 4) находим:

$$\sigma_x \Big|_{\substack{\beta=0 \\ \alpha=0}} = -2,4 \cdot q, \quad \sigma_x \Big|_{\substack{\beta=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=0}} = nq + 0,768q. \quad (2.20)$$

Теперь, если на фиг. 4 подсчитать суммарную нагрузку, которая приложена на линии $\beta = \frac{\pi}{2}$, и приравнять ее при $n \rightarrow \infty$ к заданной величине P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha z_2(\alpha) \, d\alpha}{\text{ch}^2 \alpha} = P, \quad (2.21)$$

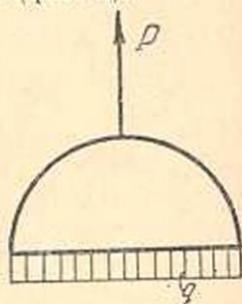
то получим случай действия сосредоточенной силы (фиг. 5).

Из (2.14) и (2.21) получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_2}{n} = \frac{P}{2a}. \quad (2.22)$$

Из (1.19) с учетом (2.21) находим:

$$C_0 = \frac{P}{2a}. \quad (2.23)$$



Фиг. 5.

Из (2.15) с учетом (2.22) при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$K_{2,1} = -\frac{P}{\pi(m^2 + 1)}, \quad K_{1,i} = K_{2,2} = K_{3,i} = K_{4,i} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.24)$$

в) Случай, когда на линии $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ приложены экспоненциально изменяющиеся нагрузки, т. е.

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4} e^{\alpha x} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & -\infty \leq x \leq 0 \\ \frac{Q_1}{4} e^{-\alpha x} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & 0 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad (n > 2)$$

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} Q_2 e^{\alpha x} \operatorname{ch}^2 x & -\infty \leq x \leq 0 \\ Q_2 e^{-\alpha x} \operatorname{ch}^2 x & 0 \leq x \leq \infty \end{cases}$$

$$\tau_1(x) = \tau_2(x) = 0. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.25) в (1.16), находим:

$$K_{1,1} = -\frac{aQ_1}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} + \frac{2n}{m^2+n^2} \right],$$

$$K_{2,1} = -\frac{aQ_2}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} \right], \quad (2.26)$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0.$$

Из второго условия равновесия (1.20) и (2.25) получаем:

$$Q_1 = \frac{4(n^2-1)}{2n^2-1} Q_2. \quad (2.27)$$

Для больших n можно (2.26) и (2.27) переписать так (фиг. 6):

$$K_{1,1} = -\frac{aQ_1 n}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)},$$

$$K_{2,1} = -\frac{2aQ_2 n}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)},$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0. \quad (2.28)$$

$$Q_1 = 2Q_2 \quad (2.29)$$

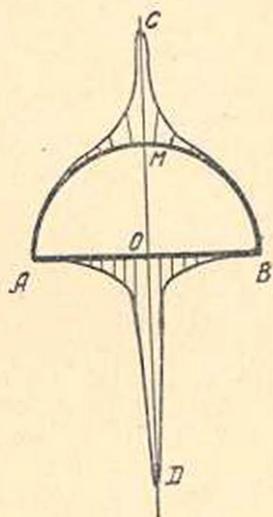
С помощью (2.29) из (2.28) получим:

$$K_{1,1} = K_{2,1}. \quad (2.30)$$

Из (1.19) с учетом (2.25) получим:

$$C_0 = \frac{Q_2}{n} = \frac{Q_1}{2n}. \quad (2.31)$$

Из (1.22) с помощью (1.15), (2.28) и (2.30) будем иметь:



Фиг. 6.

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} = \sigma_1(x) - \frac{2nQ_1}{\pi} (\operatorname{ch}x + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos mx \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)},$$

$$\sigma_x \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_2(x) - \frac{4nQ_2}{\pi} \operatorname{ch}x \int_0^{\infty} \frac{m \cos mx \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)}. \quad (2.32)$$

По методу трапеции вычисляем

$$\int_0^{\infty} \frac{m \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 0,73185. \quad (2.33)$$

С помощью (2.25) и (2.33) из (2.32) для точек О и М (фиг. 6) находим:

$$\sigma_x \Big|_{\substack{\beta=0 \\ x=0}} = Q_1 \left[1 - \frac{1}{n} \cdot 0,964 \right],$$

$$\sigma_x \Big|_{\substack{\beta=\frac{\pi}{2} \\ x=0}} = Q_2 \left[1 - \frac{1}{n} \cdot 0,964 \right] \quad (2.34)$$

Теперь, если на фиг. 6 подсчитать суммарные нагрузки, которые приложены на линиях $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, и каждую из них приравнять

при $n \rightarrow \infty$ к заданной величине P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{a \sigma_1(x)}{\operatorname{ch}x + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{a \sigma_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} dx = P, \quad (2.35)$$

то получим случай двух осевых, сосредоточенных сил (фиг. 7).

Из (2.25) и (2.35) получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2Q_2}{n} = \frac{P}{a}. \quad (2.36)$$

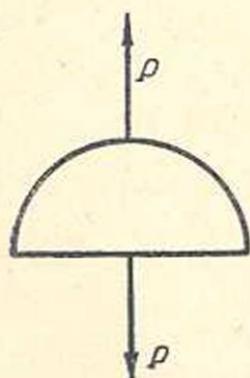
Из (1.19) с учетом (2.35) находим:

$$C_0 = \frac{P}{2a}. \quad (2.37)$$

Из (2.26) с учетом (2.36) при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$K_{1,1} = K_{2,1} = -\frac{P}{\pi(m^2 + 1)},$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0. \quad (2.38)$$



Фиг. 7.

Для соответствующих случаев $g\Phi_0$ можно найти с помощью (1.10), (1.14) и (1.15). После этого с помощью (1.4), (1.5), (1.8) (1.9) и (1.19) из (1.4) и (1.7) можно определить соответствующие напряжения и перемещения в любой точке полукруга.

г) Пусть
$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= \sigma_2(x) = q = \text{const}, \\ \tau_1(x) &= \tau_2(x) = 0.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (1.16) находим: $K_{1,i} = K_{2,i} = K_{3,i} = K_{4,i} = 0$ ($i = 1, 2$).

И получаем: $g\Phi_0 = 0$.

Из (1.19) находим: $C_0 = q$.

Тогда из (1.11) получается, что во всех точках полукруга

$$\sigma_x = \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = 0$$

Как и следовало ожидать.

Ереванский политехнический институт
им. Карла Маркса

Поступило 20 III 58 г.

Վ. Վ. Եզանյան

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԿԻՍԱՇՐՋԱՆԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողիմանում արվում է կիսաշրջանի հարթ խնդրի լուծումը, երբ հզրում կիրառված է կամայականորեն բաշխված բեռ:

Խնդիրը դիտարկվում է երկրենու կորագիծ կոորդինատներով: Խնդրի լուծումը՝ լարումների ֆունկցիան, պատկերված է Ֆուրիեյի ինտեգրալի տեսքով:

$\sigma_1(x)$ և $\sigma_2(x)$ ֆունկցիաների (2.1), (2.14) և (2.25) տեսքով ընարութունը հնարավորություն է ապրիս՝ 1) հեշտաթվամբ գանել Ֆուրիեյի ինտեգրալի գործակիցները և 2) անցնել կենտրոնացված ուժին:

Դիտարկված բոլոր դեպքերի համար մեծ n -ի դեպքում հաշված է σ_x լարման թվալին արժեքը $x = 0$ գծի ծայրակետերում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
2. Кокер Э. и Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, Л.—М., 1937.
3. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. Джеффери (Phil Trans. of the Roy. Soc of London, ser. A, vol. 221, 1921).