ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 5, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Об асимптотических оценках производных спектральной функции оператора Шредингера на плоскости

Введение

Обозначим через D конечную односвязную область двухмерного эвклидова пространства E_2 и через Γ — границу D. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{0,1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{0,2}$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа), $q(x, y)$ — действительная непрерывная функция в $D + \Gamma$, а n — внешняя нормаль к D. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ собственные значения задачи (0.1)—(0.2), а через $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y), \cdots$ соответствующие собственные функции задачи (0.1)—0.2). Так как функция $q(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то значит она ограничена и поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что спектр задачи (0.1)—(0.2) неотрицателен. Пусть $\mu_n^2 = \lambda_n$, $(\lambda_n > 0)$.

Положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y)\, \varphi_n(u, v), \qquad \mu > 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \qquad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; -\mu) = -\theta(x, y, u, v; \mu), \qquad \mu < 0.$$

Функция $\theta(x, y, u, v; \mu)$ называется спектральной функцией задачи (0,1) — (0.2).

В настоящей работе дается асимптотическая оценка производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ при больших μ. Аналогичные вопросы в трехмерном эвклидовом пространстве E_3 для уравнения

(0.1) и для оператора Лапласа в пространстве любого измерения изучены Б. М. Левитаном [1]—[2]. Одномерный случай задачи (0.1)—(0.2) исследован нами в работах [3]—[4]. Сформулируем основные результаты настоящей работы*.

Обозначим через $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (0.1) во всем пространстве при $q(x, y) \equiv 0$ (оператора Лапласа) т. е. положим

$$\theta^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{r} I_1(\mu r),$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p, а r — расстояние точек (x, y) и (u, v).

Теорема 0.1. *Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D, расстояние которых до границы Γ области D не меньше, чем η. Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченную частную производную первого порядка, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ существует константа $C = C_\eta$ такая, что справедлива асимптотическая формула* $(a \to \infty)$

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{\frac{\partial^2}{\partial x \partial u} \theta(x, y, u, v; \mu)\right\} = \sum_{a < \mu_n < a+1} \left|\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \varphi_n(u, v)}{\partial u}\right| < C_\eta a^3.$$

В работе исследован также случай бесконечных областей.

§ 1. Вывод одной вспомогательной формулы

Пусть $q(x, y)$ означает действительную непрерывную функцию, определенную в некоторой конечной односвязной области D двухмерного эвклидова пространства E_2. Пусть Γ означает границу области D.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

где n — внешняя нормаль к области D. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y), \cdots$ соответствующие собственные функции задачи (1.1)—(1.2).

При тех же предположениях относительно функции $q(x, y)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

---

* Полученные асимптотические оценки для производных спектральной функции применены к изучению вопросов суммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям в другой работе, находящейся в печати.

$$\Delta u - q(x, y) u = u''_{tt}, \tag{1.3}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u'_t(x, y, 0) = f(x, y). \tag{1.4}$$

Если в уравнении (1.3) $q(x) \equiv 0$, то решение задачи (1.3)—(1.4), как известно, дается формулой (см. [5], стр. 158):

$$u_0(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r<t} \frac{f(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi d\eta, \tag{1.5}$$

где r — расстояние точки (ξ, η) от начала координат, т. е. $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Далее рассмотрим следующую неоднородную задачу:

$$u''_{tt} - \Delta u = g(x, y, t), \tag{1.6}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \ u'_t(x, y, 0) = 0. \tag{1.7}$$

Решение задачи (1.6)—(1.7) дается формулой (см. [5], стр. 159):

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{r<\tau} \frac{g(x+\xi, y+\eta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\xi d\eta, \tag{1.8}$$

где r имеет то же значение, что и в формуле (1.5).

Пусть $\mu_n^2 = \lambda_n$, $(\lambda_n > 0)$. Для произвольного действительного t легко убедиться, что функция $\Phi_n(x, y, t) = \varphi_n(x, y) \cos \mu_n t$ ($\varphi_n(x, y)$ — собственная функция задачи (1.1)—(1.2)), является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} - \Delta \Phi_n = -q(x, y) \Phi_n, \tag{1.9}$$

$$\Phi_n(x, y, 0) = \varphi_n(x, y); \quad \left.\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.10}$$

Известно, что если функция $u(x, y, t)$ есть решение задачи (1.3)—(1.4), то функция $u'_t(x, y, t)$ является решением уравнения (1.3) с начальными данными

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u'_t(x, y, 0) = 0.$$

Поэтому, рассматривая в уравнении (1.9) правую часть, как известную функцию и применяя формулы (1.5) и (1.8), нетрудно составить следующее интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1.9)—(1.10).

$$\varphi_n(x, y) \cos \mu_n t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{r<t} \frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi d\eta -$$

ՀՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ... ԳՐԱԴԱՐԱՆ

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2-r^2}} \cos\mu_n(t-\tau)\,d\xi d\eta. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) в дальнейшем будет играть фундаментальную роль.

§ 2. Асимптотические оценки для производных спектральной функции

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1°. $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$, т. е. четна;

2°. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$;

3°. $g_\varepsilon(t)$ имеет ограниченную производную достаточно высокого порядка p (порядок производной p в дальнейшем будет уточнен).

Обозначим через $\psi_\varepsilon(\mu)$ cos — преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt. \quad (2.2)$$

Интегрированием по частям p раз равенства (2.2) в силу условий 2° и 3°, которым удовлетворяет функция $g_\varepsilon(t)$, легко получить оценку

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^p}\right). \quad (2.3)$$

Пусть a — произвольное действительное число. Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at. \quad (2.4)$$

Тогда в силу (2.2) получим

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\mu t\,dt = \frac{1}{2}\{\psi_\varepsilon(\mu+a) + \psi_\varepsilon(\mu-a)\}. \quad (2.5)$$

Помножим обе части равенства (1.11) на $g_\varepsilon(t, a)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ε. Тогда в силу (2.5) получим

$$\varphi_n(x, y)\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a) + \psi_\varepsilon(\mu-a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\, a\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint_{r<t} \frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,d\xi d\eta\right\}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right.$$

$$\cos \mu_n (t-\tau)\, d\xi d\eta \Big\} dt. \tag{2.6}$$

Интегрируя первый интеграл правой части тождества (2.6) по частям, потом меняя порядок интегрирования в обоих интегралах, получим

$$\varphi_n(x, y)\,\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leq\varepsilon} \varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\left\{\int\limits_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt\right\} d\xi d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leq\varepsilon} q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\left\{\int\limits_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\,dt\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int\limits_r^t \frac{\cos\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau\right\} d\xi d\eta. \tag{2.7}$$

Введем обозначения

$$h_\varepsilon(r, a) = \int\limits_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \tag{2.8}$$

$$k_\varepsilon(r, a) = \int\limits_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\,dt \int\limits_r^t \frac{\cos\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau. \tag{2.9}$$

Тогда тождество (2.7) примет вид:

$$\varphi_n(x, y)\,\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leq\varepsilon} \varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\, h_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leq\varepsilon} q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\, k_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta. \tag{2.10}$$

Дифференцируя тождество (2.10) по x, заменяя под интегралами $\dfrac{\partial}{\partial x}$ на $\dfrac{\partial}{\partial \xi}$ и интегрируя по частям, получим

$$\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\,\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leq\varepsilon} \varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,h_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<\varepsilon} q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,a)\,d\xi d\eta\,. \tag{2.10}$$

В силу элементарного неравенства

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \tag{2.11}$$

из тождества (2.10) следует неравенство:

$$\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]^2\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon}\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r,a)\,d\xi d\eta\right]^2+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon} q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,a)\,d\xi d\eta\right]^2. \tag{2.12}$$

Суммируя неравенства (2.12) по n в пределах $a<\mu_n\leqslant a+1$, получим

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]^2\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2}\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon}\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r,a)\,d\xi d\eta\right]^2+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon} q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,a)\,d\xi d\eta\right]^2 = i_1+i_2. \tag{2.13}$$

В силу неравенства Бесселя и определения функции $h_\varepsilon(r,a)$, т. е. (2.8), получим

$$i_1 \leqslant \frac{2}{\pi^2}\iint\limits_{r<\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_r^\varepsilon\frac{g_\varepsilon'(t,a)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]^2 d\xi d\eta. \tag{2.14}$$

Пологая в оценке (3.3) работы [2] $N=2$ и $\alpha=1$, получим оценку

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\frac{a}{\partial\xi}\int\limits_r^\varepsilon\frac{g_\varepsilon'(t,a)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]^2 < Ca^3.$$

Поэтому из (2.14) для i_1 получим оценку $(a\to\infty)$:

$$i_1 < Ca^3. \tag{2.15}$$

Оценим теперь i_2. После несложных вычислений легко установить, что

$$\frac{\partial k_\varepsilon}{\partial \xi} = \frac{\xi}{r^2}\int_r^\varepsilon g_\varepsilon'(t, a)\sqrt{t^2-r^2}\,dt + \frac{\xi\mu_n}{r^2}\int_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\,dt\int_r^t \frac{\tau \sin\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau,$$

откуда, в силу определения функции $g_\varepsilon(t, a)$, т. е. (2.4), получим оценку при $a\to\infty$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a) < Ca. \tag{2.16}$$

Из оценки (2.16) и определения i_2 (см. неравенство (2.13)) следует оценка при $a\to\infty$:

$$i_2 < Ca^2. \tag{2.17}$$

Из неравенства (2.13) и оценок (2.15), (2.17) следует оценка $(a\to\infty)$

$$\sum_{a<\mu_n<a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2 < Ca^3. \tag{2.18}$$

Обозначим через $\theta(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (1.1) (при граничном условии (1.2)), т. е. положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n<\mu}\varphi_n(x, y)\varphi_n(u, v), \qquad \mu>0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \qquad \mu=0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu), \qquad \mu<0.$$

Теорема 2.1. Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D, расстояние которых до границы Γ области D не меньше, чем η. Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченную частную производную первого порядка, то при $(x, y), (u, v)\in D_\eta$ существует константа $C=C_\eta$ такая, что имеет место асимптотическая оценка $(a\to\infty)$

$$\overset{a+1}{\underset{a}{V}}\left\{\frac{\partial^2\theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x\partial u}\right\}_{\substack{x=u\\y=v}} = \sum_{a<\mu_n<a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 < C_\eta a^3. \tag{2.19}$$

Доказательство. В качестве функции $g_\varepsilon(t)$ возьмем функцию

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon-|t|), & |t|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |t|\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда

$$\psi_\varepsilon(\mu_n+a)=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\mu_n+a}{2}\varepsilon}{\left[\frac{\mu_n+a}{2}\varepsilon\right]^2};\qquad \psi_\varepsilon(\mu_n-a)=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\mu_n-a}{2}\varepsilon}{\left[\frac{\mu_n-a}{2}\varepsilon\right]^2}. \tag{2.20}$$

Из (2.20) видно, что функции $\psi_\varepsilon(\mu_n+a)$ и $\psi_\varepsilon(\mu_n-a)$ положительны, поэтому из оценки (2.18) следует оценка

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]^2\psi_\varepsilon^2(\mu_n-a)<Ca^3. \tag{2.21}$$

Подставляя значение функции $\psi_\varepsilon(\mu_n-a)$ из (2.20) в (2.21) и пологая $\varepsilon=1$ и $\mu_n-a=\nu_n$, получим

$$\sum_{0<\nu_n\leqslant 1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]_{\mu_n=a+\nu_n}\cdot\left[\frac{\sin\frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}}\right]^4<Ca^3. \tag{2.22}$$

Как известно, для $0\leqslant\nu\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin\nu}{\nu}\geqslant\frac{2}{\pi}$. Поэтому из (2.22) и из определения спектральной функции $\theta(x,y,u,v;\mu)$ следует

$$\sum_{0\leqslant\nu_n<1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]^2_{\mu_n=a+\nu_n}\cdot\left[\frac{\sin\frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}}\right]^4\geqslant\frac{16}{\pi^4}\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]^2=$$

$$=\frac{16}{\pi^4}\bigvee_a^{a+1}\left\{\frac{\partial^2\theta(x,y,u,v;\mu)}{\partial x\partial u}\right\}_{\substack{x=u\\ y=v}}. \tag{2.23}$$

Теорема следует из неравенства (2.23) в силу оценки (2.22). Из теоремы 2.1 и неравенства Коши-Буняковского следует.

Теорема 2.2. Пусть η, D_η, C_η и $q(x,y)$ *имеют то же значение, что и в теореме 2.1. При* (x,y), $(u,v)\in D_\eta$ *и при* $a\to\infty$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\bigvee_a^{a+1}\left\{\frac{\partial^2\theta(x,y,u,v;\mu)}{\partial x\partial u}\right\}=\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}\left|\frac{\partial\varphi_n(x,y)}{\partial x}\right|\cdot\left|\frac{\partial\varphi_n(u,v)}{\partial u}\right|<C_\eta a^3. \tag{2.24}$$

Известна следующая

Теорема 2.3. (Б. М. Левитан, [6], лемма 2.5.1). *Пусть* η, D_η *и* C_η *имеют то же значение, что и в теореме 2.1. Если* $(x,y)\in D_\eta$, *то имеет место асимптотическая оценка*

$$\sum_{a<\mu_n<a+1} |\varphi_n(x, y)|^2 < C_\eta a. \qquad (2.25)$$

Из теорем 2.1, 2.3 и неравенства Коши-Буняковского следует.

Теорема 2.4. *При тех же предположениях, что и в теореме 2.1 справедлива асимптотическая оценка* $(a \to \infty)$

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\left\{\frac{\partial\theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x}\right\} = \sum_{a<\mu_n<a+1} \left|\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right| \cdot |\varphi_n(u, v)| < C_\eta a^2. \qquad (2.26)$$

Теперь оценим старшие производные спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$. Через D^α_{xy} обозначим следующий оператор дифференцирования:

$$D^\alpha_{xy} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}, \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Применяя к тождеству (2.7) оператор D^α_{xy}, затем заменяя под интегралами D^α_{xy} на $D^\alpha_{\xi\eta}$, получим

$$D^\alpha_{xy}\{\varphi_n(x, y)\}\cdot[\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)] =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<\varepsilon} D^\alpha_{\xi\eta}\{\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\}\cdot h_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta -$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<\varepsilon} D^\alpha_{\xi\eta}\{q\,(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\}\, k_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta. \qquad (2.27)$$

Предполагая, что функция $g_\varepsilon(t)$ дифференцируема α раз и интегрируя первый интеграл правой части (2.27) по частям α раз, а второй интеграл только один раз, получим

$$D^\alpha_{xy}\{\varphi_n(x, y)\}\cdot[\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)] =$$
$$= \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\pi}\iint\limits_{r<\varepsilon} \varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\, D^\alpha_{\xi\eta}\{h_\varepsilon(r, a)\}\, d\xi d\eta +$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<\varepsilon} D^{\alpha-1}_{\xi\eta}\{q\,(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\}\,\frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta. \qquad (2.27')$$

В силу неравенства (2.11) из (2.27′) следует

$$\{D^\alpha_{xy}\varphi_n(x, y)\}^2\,[\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon} \varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\, D^\alpha_{\xi\eta}\{h_\varepsilon(r, a)\}\, d\xi d\eta\right]^2 +$$
$$+\frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r<\varepsilon} D^{\alpha-1}_{\xi\eta}\{q\,(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi,\ y+\eta)\}\,\frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta\right]^2. \qquad (2.28)$$

Суммируя неравенства (2.28) по n в пределах $a < \mu_n \leqslant a+1$, получим

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} \{D^{\alpha}_{xy}\varphi_n(x, y)\}^2 \cdot [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2} \sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} \left[\iint\limits_{r<\varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta) D^{\alpha}_{\xi\eta}\{h_\varepsilon(r, a)\} d\xi d\eta\right]^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} \left[\iint\limits_{r<\varepsilon} D^{\alpha-1}_{\xi\eta}\{q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\right.$$

$$\left. +\eta)\} \frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a)\, d\xi d\eta\right]^2 = i_1 + i_2. \tag{2.29}$$

Из леммы 1 работы [2] и неравенства Бесселя следует оценка ($a\to\infty$):

$$i_1 \leqslant \frac{2}{\pi^2} \iint\limits_{r<\varepsilon} [D^{\alpha}_{\xi\eta} h_\varepsilon(r, a)]^2 d\xi d\eta < Ca^{2\alpha+1}. \tag{2.30}$$

Для оценки i_2 поступим следующим образом. Предположим, что для $\nu = 1, 2, \cdots, \alpha-1$ и $a\to\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} \{D^{\nu}_{xy}\varphi_n(x, y)\}^2 < Ca^{2\nu+1}. \tag{2.31}$$

При $\nu = 1$ такая оценка имеет место (см. теорему 2.1). Тогда, предполагая, что функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha - 1$ включительно, в силу оценки (2.31) и неравенства Коши-Буняковского получим

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} |D^{\alpha-1}_{\xi\eta}\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\, q(x+\xi, y+\eta)| \cdot$$

$$\cdot |D^{\alpha}_{\delta\sigma}\varphi_n(x+\delta, y+\sigma)\, q(x+\delta, y+\sigma)| < Ca^{2\alpha-1}. \tag{2.32}$$

Из оценок (2.16), (2.32) и неравенства Коши-Бузновского получим

$$i_2 \leqslant C \sum_{a<\mu_n\leqslant a+1} \iint\limits_{r<\varepsilon} d\xi d\eta \iint\limits_{\rho<\varepsilon} d\delta d\sigma\, |D^{\alpha}_{\xi\eta}\varphi_n(x+\xi, y+$$

$$+\eta)\, q(x+\xi, y+\eta)| \cdot \left|\frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a)\right| \cdot$$

$$\cdot |D^{\alpha}_{\delta\sigma}\varphi_n(x+\delta, y+\sigma)\, q(x+\delta, y+\sigma)| \cdot \left|\frac{\partial}{\partial\delta} k_\varepsilon(\rho, a)\right| < Ca^{2\alpha+1}. \tag{2.33}$$

Комбинируя оценки (2.30) и (2.33), из неравенства (2.29) получим оценку при $a\to\infty$

$$\sum_{a<\mu_n<a+1} [D^{\alpha}_{xy}\varphi_n(x, y)]^2 [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)] < Ca^{2\alpha+1} \qquad (2.34)$$

Теорема 2.5. Пусть η, D_η и C_η имеют то же значение, что и в теореме 2.1. Если функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные порядка $\alpha + \beta - 1$ включительно, то при (x, y), $(u, v) \in D_\eta$ и $a \to \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\bigvee_a^{a+1} \{D^{\alpha}_{xy} D^{\beta}_{uv} \theta(x, y, u, v; \mu)\} =$$

$$= \sum_{a<\mu_n<a+1} |D^{\alpha}_{xy}\varphi_n(x, y)| \cdot |D^{\beta}_{uv}\varphi_n(u, v)| < C_3 a^{\alpha+\beta+1}. \qquad (2.35)$$

Доказательство теоремы получается из оценки (2.34) в точности так же, как теоремы 2.2 из оценки (2.18).

§ 3. Асимптотическая оценка для производных спектральной функции в случае бесконечной области

Предварительные оценки, полученные в предыдущем параграфе для производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$, показывают, что они от размеров области не зависят. Поэтому легко предвидеть, что они верны и для бесконечных областей. В настоящем параграфе мы покажем, что это предвидение верно. Для простоты изложения, мы будем предполагать, что область D совпадает со всем пространством E_2.

Обозначим через D_N последовательность областей, расширяющихся до всего пространства E_2, т. е. $D_N \to E_2$ при $N \to \infty$ и через Γ_N границы D_N.

Для каждой области D_N рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \qquad (3.1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = 0. \qquad (3.2)$$

Предполагается, что функция $q(x, y)$ действительна и непрерывна в каждой конечной области $\overline{D}_N$.

1. Предположим вначале, что при любом $N = 1, 2, \cdots$ спектр задачи (3.1)—(3.2) неотрицателен. Обозначим через $\mu^2_{N,1}, \mu^2_{N,2}, \cdots, \mu^2_{N,n}, \cdots$ собственные значения задачи (3.1)—(3.2), а через $\varphi_{N,1}(x, y)$, $\varphi_{N,2}(x, y), \cdots, \varphi_{N,n}(x, y), \cdots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (3.1)—(3.2).

Положим

$$\theta_N(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_{N,n} < \mu} \varphi_{Nn}(x, y)\, \varphi_{Nn}(u, v). \tag{3.3}$$

Функция $\theta_N(x, y, u, v; \mu)$ называется спектральной функцией задачи (3.1)—(3.2). Как показано Б. М. Левитаном (см. [6], гл. III, леммы 3.1.3 и (3.1.4), в каждой конечной области пространства $E_2 \times E_2 \times E_1$ семейство функций $\{\theta_N(x, y, u, v; \mu)\}$ равномерно ограничено и по (x, y) и (u, v) равностепенно непрерывно. Рассмотрим семейство функций

$$\frac{\partial\theta_N(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} = \sum_{\mu_{N,n} < \mu} \frac{\partial\varphi_{Nn}(x, y)}{\partial x} \varphi_{Nn}(u, v), \quad (N = 1, 2, \cdots). \tag{3.4}$$

Так как в оценке (2.26) постоянная C_η от размеров области не зависит, то семейство функций (3.4) имеет равномерно ограниченную вариацию в каждой конечной части пространства $E_2 \times E_2 \times E_1$. Поэтому, если мы покажем и равностепенную непрерывность этого семейства по (x, y), то в оценке (2.26) можно будет перейти к пределу в силу теоремы Арцелля-Хелли. Тогда получим оценку

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial\theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right\} < Ca^2, \tag{3.5}$$

где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3.1) для всего пространства E_2.

Для доказательства равностепенной непрерывности положим в тождестве (2.10) $a = 0$, а x, y заменим соответственно на $x + u$, $y + v$. Тогда тождество (2.10) примет вид:

$$\frac{\partial\varphi_{N,n}(x + u, y + v)}{\partial x} \psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{r<\varepsilon} \varphi_{N,n}(x + u + \xi, y + v + \eta) \frac{\partial}{d\xi} h_\varepsilon(r, 0)\, d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{r<\varepsilon} q(x + u + \xi, y + v + \eta)\, \varphi_{N,n}(x + u + \xi, y + v +$$

$$+ \eta) \frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, 0)\, d\xi d\eta. \tag{3.6}$$

Вычитая из тождества (3.6) тождество (2.10) при $a = 0$, находим

$$\left[\frac{\partial\varphi_{N,n}(x + u, y + v)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right] \psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{E_\varepsilon} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r, 0)\right]d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\varepsilon}[q(x+u+\xi, y+v+\eta)\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) -$$

$$- q(x+\xi, y+\eta)\varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)]\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r, 0)\, d\xi d\eta, \qquad (3.7)$$

где ρ — расстояние точки (ξ, η) до точки (u, v).

Пусть $\mu_0 > 0$ произвольное конечное число. Применяя к равенству (3.7) неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, а затем суммируя по n в пределах $1 \leqslant n \leqslant \mu_0$, получим

$$\sum_{\mu_{N,n}<\mu_0}\left[\frac{\partial\varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x}\right]^2 \psi_\varepsilon^2(\mu_{N,n}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{\mu_{N,n}<\mu_0}\left\{\iint_{E_\varepsilon}\varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(\rho, 0) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r, 0)\right]d\xi d\eta\right\}^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu_{N,n}<\mu_0}\left\{\iint_{r<\varepsilon}[q(x+u+\xi, y+\right.$$

$$+ v+\eta)\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - q(x+\xi, y+\eta)\varphi_{N,n}(x+$$

$$+ \xi, y+\eta)]\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r, 0)\, d\xi d\eta = i_1 + i_2. \qquad (3.8)$$

В силу неравенства Бесселя

$$i_1 \leqslant \iint_{E_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r, 0)\right]^2 d\xi d\eta.$$

Очевидно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать столь малое $\delta_1 > 0$, что если $|(u, v)| = \sqrt{u^2+v^2} < \delta_1$, то

$$i_1 < \frac{\varepsilon}{\eta}. \qquad (3.9)$$

Теперь оценим i_2. Заметим, что

$$q(x+u+\xi, y+v+\eta)\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) -$$

$$- q(x+\xi, y+\eta)\varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) =$$

$$= q(x+u+\xi, y+v+\eta)[\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) -$$

$$- \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] + \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)\cdot$$

$$\cdot[q(x+u+\xi, y+v+\eta) - q(x+\xi, y+\eta)]. \qquad (3.10)$$

Тогда в силу неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ и равенства (3.10)

$$\Big\{\iint\limits_{r<\varepsilon}\Big[q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+u+\xi,\ y+v+\eta)-$$

$$-q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)\Big]\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,0)\,d\xi d\eta\Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\Big\{\iint\limits_{r<\varepsilon}q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)\,[\varphi_{N,n}(x+u+\xi,\ y+v+\eta)-$$

$$-\varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)]\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,0)\,d\xi d\eta\Big\}^2+$$

$$+2\Big\{\iint\limits_{r<\varepsilon}\varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)[q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)-$$

$$-q(x+\xi,\ y+\eta)]\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r,0)\,d\xi d\eta\Big\}^2 = i_2'+i_2''.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского и леммы 3.1.4 работы [6] для произвольного сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ можно подобрать такое $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$, не зависящее от N, что при $|(u,v)|<\delta_2$.

$$i_2'<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.11}$$

Наконец, из равномерной непрерывности функции $q(x,y)$ легко следует, что при $|(u,v)|<\delta_3$ и δ_3 достаточно малом выполняется неравенство

$$i_2''<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Обозначая через $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, из оценок (3.9), (3.11), (3.12) и неравенства (3.8) следует оценка

$$\sum_{\mu_{N,n}<\mu_0}\left[\frac{\partial\varphi_{N,n}(x+u,\ y+v)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{N,n}(x,y)}{\partial x}\right]^2\psi_\varepsilon^2(\mu_{N,n})<\varepsilon.$$

Из этого неравенства так же, как в доказательстве леммы 3.1.4 работы [6], следует равностепенная непрерывность семейства (3.4).

Итак, нами доказано, что семейство функций

$$\left\{\frac{\partial\theta_N(x,y,u,v;\mu)}{\partial x}\right\} \tag{3.13}$$

равномерно сходится и тем самым доказано, что оценка (3.5) верна.

Итак, справедлива

Теорема 3.1. Если функция $q(x, y)$ непрерывна в каждой конечной области изменения (x, y), то при $a \to \infty$ имеет место оценка $(a \to \infty)$

$$\bigvee_{a}^{a+1} \left\{ \frac{\partial \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right\} = O(a^2). \tag{3.14}$$

Равенство (3.14) *имеет место равномерно в каждой конечной области изменения* (x, y) *и* (u, v).

Аналогичные теоремы можно доказать и для старших производных спектральной функции.

2. Предположим теперь, что уравнение (3.1) во всем пространстве E_2 имеет неограниченный снизу отрицательный спектр.

Аналогично тому, как при доказательстве леммы 3.1 работы [1], можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. Если функция $q(x, y)$ непрерывна в каждой конечной области изменения (x, y), то при каждом фиксированном (x, y), существует константа $C = C(\varepsilon)$, зависящая от ε и не зависящая от N, такая что

$$\sum_{\lambda_{N,n} < 0} \left[\frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right]^2 e^{\sqrt{|\lambda_{N,n}|^{\varepsilon}}} < C, \tag{3.15}$$

где $\varphi_{N,n}(x, y)$ — собственная функция задачи (3.1)—(3.2).

Переходя к пределу $(N \to \infty)$ в неравенстве (3.15), получим

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|^{\varepsilon}}} d_{\lambda} \frac{\partial \theta(x, y, \xi, \eta; \lambda)}{\partial x} < +\infty,$$

где $\theta(x, y, \xi, \eta; \lambda)$ — любая спектральная функция уравнения (3.1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 4 XII 1957

Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք D-ն էվկլիդյան երկչափ տարածության վերջավոր միակապ տիրույթ է, իսկ Γ-ն նրա եզրագիծն է։

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

որտեղ $q(x, y)$-ն իրական անընդհատ ֆունկցիա է $D+\Gamma$-ում, իսկ n-ը՝ D տիրույթի արտաքին նորմալն է։ Նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$-ով (1) ( ) խնդրի սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y), \cdots$-ով՝ համապատասխան սեփական ֆունկցիաները։ Քանի որ $q(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $D+\Gamma$-ում, հետևաբար նա սահմանափակ է ներքևից, և այդ պատճառով առանց ընդհանրության խախտման կարելի է ենթադրել, որ (1)—(2) խնդրի սպեկտրը ոչ բացասական է։ Դիցուք $\mu_n^2 = \lambda_n$, $(\lambda_n > 0)$։ Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y)\,\varphi_n(u, v); \qquad \mu > 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \qquad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; -\mu) = -\theta(x, y, u, v; \mu): \qquad \mu < 0.$$

$\theta(x, y, u, v; \mu)$ ֆունկցիան կոչվում է (1)—(2) խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիա։

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $\theta(x, y, u, v; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների ասիմպտոտիկ վարքը μ-ի մեծ արժեքների համար։ Նույն հարցը էվկլիդյան եռաչափ տարածության մեջ (1) հավասարման համար, ինչպես նաև Լապլասի հավասարման համար ցանկացած չափի տարածության մեջ ուսումնասիրվել է Բ. Մ. Լևիտանի կողմից [1], [2], իսկ միաչափ տարածության մեջ ուսումնասիրվել է մեր կողմից [3], [4]։

Հոդվածում ուսումնասիրվում է նաև անվերջ տիրույթների դեպքը։ Շարադրման պարզության համար ենթադրված է, որ D տիրույթը համընկնում է ամբողջ հարթության հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б. М.* О дифференцировании разложений по собственным функциям уравнения Шредингера. Труды Московского математического общества, том 7 (1958).
2. *Левитан Б. М.* О дифференцировании спектральной функции оператора Лапласа. Мат. сборник, т 39 (81):1 (1956).
3. *Саргсян И. С.* О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля. Известия АН СССР, сер. мат., том 21 (1957).
4. *Саргсян И. С.* Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля. Известия АН АрмССР, т. X, № 3 (1957).
5. *Курант Р.* и *Гильберт Д.* Методы математической физики, том II, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + [\lambda - q(x_1, x_2, x_3)]\,u = 0$. Труды Московского математического общества, т. 4 (1955).