ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 6, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. М. Аветисян

О приближении аналитических функций целыми функциями

В работе М. В. Келдыша [1] доказано, что если функция аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$, то ее можно приблизить равномерно целыми функциями в полосе $|\operatorname{Im} z| < a' < a$, причем рост приближающей целой функции ограничивается в зависимости от скорости возрастания аналитической функции, быстроты приближения и разности $\delta = a - a'$.

В настоящей заметке рассматривается аналитическая функция определенная в криволинейной неограниченной полосе. На основе метода М. В. Келдыша, доказывается возможность приближения этой функции целыми функциями на действительной оси и оценивается рост приближающей целой функции.

1. Пусть область D, содержащая действительную ось, ограничена кривыми $y = \pm \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ положительная, гладкая кривая и при $|x| \to \infty$, монотонно убывая, стремится к нулю. Через D_R обозначим множество точек области D, для которой $|z| \leqslant R$. В области D дана аналитическая функция $f(z)$, для которой

$$|f(z)| \leqslant M(R),\ z \in D_R,\ \text{где}\ M(R) = \max_{z \in D_R} |f(z)|.$$

Требуется приблизить функцию $f(z)$ целыми функциями $F(z)$ на действительной оси

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon, -\infty < x < \infty$$

и в области D_R оценить рост приближающей целой функции в зависимости от роста аналитической функции $f(z)$, от функции $\varphi(x)$ и от ε.

Рассмотрим кривую H, определяемую уравнением $l = \lambda(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющую условиям:

1) $\lambda(x)$ представляет гладкую линию, имеющую монотонно возрастающий наклон касательной и проходит через точку $z = -i$.

2) $\lambda(x) \leqslant C|x|^{1-\epsilon}$ при всех x.

Пусть H^* означает кривую, получаемую из H преобразованием $t = z - i$. Обозначим через D_λ область, которая содержит начало координат и ограничена кривой H снизу. Пусть функция $f_\lambda(z)$ осуществляет конформное отображение области расположенной над H, на полуплоскость $\operatorname{Re} f_\lambda(z) > 0$ так, что бесконечность переходит в начало координат.

Лемма 1. Для любого положительного числа A существует целая функция $F_{\lambda A}^{(+)}(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|F_{\lambda A}^{(+)}(z)| \leqslant Ce^{A\mu_\lambda(|z|+1)} \tag{1}$$

по всей плоскости, и неравенству

$$\left|\frac{1}{z} - F_{\lambda A}^{(+)}(z)\right| \leqslant Ce^{-Af_\lambda(0)} \tag{2}$$

в точках, расположенных ниже кривой H^*, где $\mu_\lambda(R) = \max\limits_{\substack{|z|=R \\ z \in D_\lambda}} |f_\lambda(z)|$, а постоянная C не зависит от A.

Доказательство. Пусть при конформном отображении области D_λ кривая H переходит в мнимую ось, т. е. кривая $l = \lambda(x)$ переходит в $\operatorname{Re} f_\lambda(z) = 0$, тогда часть мнимой оси, находящейся в D_λ, переходит в часть действительной оси. Введем вспомогательную функцию $\varphi_{\lambda A}(z) = e^{Af_\lambda(z)}$, где A—действительное число, отмеченное в лемме. На кривой H имеем: $|\varphi_{\lambda A}(z)| = 1$. Пусть z—произвольная точка плоскости, Γ_R—кривая, составленная из части H, расположенной вне круга $|\zeta| < R$, и части окружности $|\zeta| = R$, находящейся в области D_λ. Искомую функцию определим формулой

$$F_{\lambda A}^{(+)}(z) = \frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{Af_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \qquad R > |z|, \tag{3}$$

в которой правая часть не зависит от R, если $R > |z|$.

Оценим $F_{\lambda A}^{(+)}(z)$. Принимая $|z| = |\zeta| - 1$, имеем:

$$\left|F_{\lambda A}^{(+)}(z)\right| = \frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi} e^{A \max\limits_{|\zeta| - |z| + 1} |f_\lambda(\zeta)|} \cdot C \leqslant Ce^{A\mu_\lambda(R+1)}, \tag{4}$$

так как

$$\int\limits_{\Gamma_{R_1}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = \int\limits_{\Gamma_{R_2}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = C_1, \; R < R_1 < R_2.$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Оценим $\left|F_{\lambda A}^{(+)}(z) - \frac{1}{z}\right|$. Обозначим через γ_0—замкнутый контур, составленный из дуги окружности $|z| = R$, находящейся в области D_λ, и частью H, принадлежащей кругу $|z| < R$. Область, ограниченную кривой γ_0, обозначим через $D_\lambda^{(0)}$. Имея в виду, что обход по кривой H равносилен обходу по кривым Γ_R и γ_0 вместе (обозначим $H=\Gamma_R+\gamma_0$), из уравнения (3) можем написать

$$F_{\lambda A}^{(+)}(z)=\frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi i}\int\limits_{\zeta\in H}\frac{e^{Af_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta-\frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi i}\int\limits_{\zeta\in\gamma_0}\frac{e^{Af_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta,$$

причем интегрирование в обоих интегралах производится в направлении, соответствующем положительному обходу D_λ, и области $D_\lambda^{(0)}$, ограниченных соответственно кривыми H и γ_0. В точках, находящихся ниже H^*, имеем, очевидно

$$\frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{e\pi i}\int\limits_{\zeta\in H}\frac{e^{Af_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta=\frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi}\cdot C.$$

С другой стороны, имея в виду что ноль есть полюс, по известной теореме вычета имеем

$$\frac{e^{-Af_\lambda(0)}}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}\frac{e^{Af_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta=-\frac{1}{z}\cdot$$

Таким образом

$$\left|F_{\lambda A}^{(+)}(z)-\frac{1}{z}\right|\leqslant e^{-Af_\lambda(0)}\cdot C, \tag{5}$$

где C не зависит от A и z.

Аналогично, через $F_{\lambda A}^{(-)}(z)$ обозначим целую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$\left|F_{\lambda A}^{(-)}(z)\right|<Ce^{A\mu_\lambda(R+1)}$$

всюду, и неравенству

$$\left|F_{\lambda A}^{(-)}(z)-\frac{1}{z}\right|<Ce^{-Af_\lambda(0)}$$

над кривой $\widetilde{H}^*$, расположенной симметрично с H^*, относительно оси $0x$.

Лемма доказана.

2. Перейдем теперь к построению целой функции, приближающей аналитическую функцию $f(z)$, и оценим ее рост.

Введем некоторые обозначения.

1) Через H_δ (H_δ^*) мы обозначим кривую, в которую переходит $H(H^*)$ при преобразовании $z=\frac{t}{\delta}$, где $t=u+iv$.

Уравнения кривых H_δ и H_δ^*, соответственно, будут:

$$v = \delta\lambda\left(\frac{u}{\delta}\right) \text{ и } v = \delta\lambda\left(\frac{u}{\delta}\right) - \delta.$$

2) В области D, ограниченной кривыми $y = \pm\varphi(x)$, построим область $D_{\varphi/2}$, ограниченную кривыми

$$y = \pm\frac{1}{2}\varphi(x) \equiv \pm\varphi_1(x).$$

3) На кривой Γ_1: $y = \pm\varphi_1(x)$ отметим точку $\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi)$, принимая ее как начало новой системы декартовых координат. Обозначим через H_{ξ,φ_1} и H^*_{ξ,φ_1} те кривые, которые относительно точки ζ имеют такие расположения, какие имеют кривые H_δ и H^*_δ относительно начальной точки старой системы декартовых координат. Иначе говоря, кривые H_{ξ,φ_1} и H^*_{ξ,φ_1} получаются из кривых H_δ и H^*_δ при параллельном переносе, когда точка 0 совпадает с точкви ζ. Но величину δ мы заменяем функцией $\varphi_1(\xi)$.

Уравнения H_{ξ,φ_1} и H^*_{ξ,φ_1} относительно старой системы $x0y$ имеют, соответственно, вид:

$$y = \varphi_1(\xi)\,\lambda\left(\frac{x-\xi}{\varphi_1(\xi)}\right) + \varphi_1(\xi);$$

$$y = \varphi_1(\xi)\,\lambda\left(\frac{x-\xi}{\varphi_1(\xi)}\right). \tag{6}$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Какова бы не была точка $\zeta \in \Gamma_1$, для любого числа A существует целая функция $F^{(+)}_{\lambda A\varphi_1}(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left|F^{(+)}_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z)\right| \leqslant \frac{C}{\varphi_1(\xi)}\, e^{A\mu_\lambda\left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\xi)}\right)} \tag{7}$$

во всей плоскости, и неравенству

$$\left|F^{(+)}_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)}\, e^{-Af_\lambda(0)} \tag{8}$$

в точках z, расположенных под кривой H^*_{ξ,φ_1}.

Доказательство. При помощи преобразования $z = \dfrac{t}{\delta}$ из неравенства (2) можем написать

$$\left|F^{(+)}_{\lambda A}\left(\frac{t}{\delta}\right) - \frac{\delta}{t}\right| < Ce^{-Af_\lambda(0)},$$

или, что тоже самое,

$$\left|\frac{1}{\delta}F^{(+)}_{\lambda A}\left(\frac{t}{\delta}\right) - \frac{1}{\delta}\right| < \frac{c}{\delta}\, e^{-Af_\lambda(0)};$$

t находится под H_δ^*. Обозначив через $F_{\lambda A\delta}^{(+)}(t) = \frac{1}{\delta} F_{\lambda A}^{(+)}\left(\frac{t}{\delta}\right)$ и заменяя t на z, получим

$$\left|F_{\lambda A\delta}^{(+)}(z) - \frac{1}{z}\right| < \frac{c}{\delta} e^{-Af_\lambda(0)}, \tag{9}$$

в точках z, расположенных под кривой H_δ. А во всей плоскости

$$\left|F_{\lambda A\delta}^{(+)}(z)\right| < \frac{1}{\delta} \frac{e^{Af_\lambda(0)}}{2\pi} Ce^{A \max_{\frac{|\zeta|}{\delta} - \frac{|z|+1}{\delta}} |f_\lambda(\zeta)|} < \frac{C}{\delta} e^{A\mu_\lambda\left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{\delta}\right)},$$

где
$$R = |z|. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь точку $\zeta \in \Gamma_1 (\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi))$, а взамен приближаемой функции $\frac{1}{z}$ будем рассматривать ядро Коши $\frac{1}{\zeta - z}$. Учитывая неравенства (9) и (10), можем написать

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - F_{\lambda A\varphi_1}^{(+)}(\zeta - z)\right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-Af_\lambda(0)}$$

в точках z, расположенных под кривой H_{ξ, φ_1};

$$\left|F_{\lambda A\varphi_1}^{(+)}(\zeta - z)\right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{A\mu_\lambda\left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\xi)}\right)}$$

во всей плоскости. Лемма доказана.

Аналогично можно доказать, что существует целая функция $F_{\lambda A\varphi_1}^{(-)}(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left|F_{\lambda A\varphi_1}^{(-)}(\zeta - z)\right| < \frac{C}{\varphi_1(\zeta)} e^{A\mu_\lambda\left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\zeta)}\right)} \tag{7$_1$}$$

во всей плоскости и неравенству

$$\left|F_{\lambda A\varphi_1}^{(-)}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < \frac{C}{\varphi_1(\zeta)} e^{-Af_\lambda(0)} \tag{8}$$

в точках, расположенных над кривой $\widetilde{H}_{\zeta\varphi_1}^*$, расположенной симметрично с H_{ζ,φ_1}^* относительно оси ox.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ аналитична в нашей области D, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Существует целая функция $F(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon \quad -\infty < x < \infty, \tag{11}$$

и такая, что

$$|F(z)| < \left[\frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)}\right]^{1 + C_1\varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{C_1\varphi(0)}. \tag{12}$$

где $|z| \leqslant R,\ k \geqslant 2.$

Доказательство. Пусть N некоторое положительное число. Через $K_1(N)$ обозначим часть кривых $y = \pm\varphi_1(x)$, расположенных в полосе $|\mathrm{Re}\zeta| < N$, через $K_2(N)$—часть, прямых $\mathrm{Re}\,\zeta = \pm N$, расположенных в области $D_{\varphi/2}$. D'_N — область ограниченная кривой $K(N) = K_1(N) + K_2(N)$. Очевидно, для аналитической функции $f(z)$ можем написать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad |z| \leqslant N\ z \in D_{\varphi/2}. \tag{13}$$

Через $F_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z)$ обозначим $F^{(+)}_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z)$ в случае $\mathrm{Im}\zeta > 0$ и $F^{(-)}_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z)$ в случае $\mathrm{Im}\zeta < 0$.

Искомую целую функцию $F(z)$ удовлетворяющую неравенствам (11) и (12), мы построим с помощью $F_N(z)$, определяемых равенством

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1(N)} f(\zeta)\,F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{14}$$

где интегрирование производится в направлении, соответствующем положительному обходу области $D_{\varphi/2}$, A_ξ зависит от ξ. Эта зависимость в явном виде будет написана далее. Докажем, что $F_N(z)$ в любой конечной части плоскости равномерно сходится к некоторой целой функции при $N \to \infty$. Для заданного наперед $R > 0$, число $R^* > R$ выберем так, чтобы при $\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi)$, $|\xi| > R^*$, неравенство(8) (или 8′) выполнялось в каждой точке круга $|z| \leqslant R$. Для этого поступим так. Пусть $|z| < R < R^* < R' < R'' < \xi$. В силу аналитичности функции $f(z)$ в области D имеем:

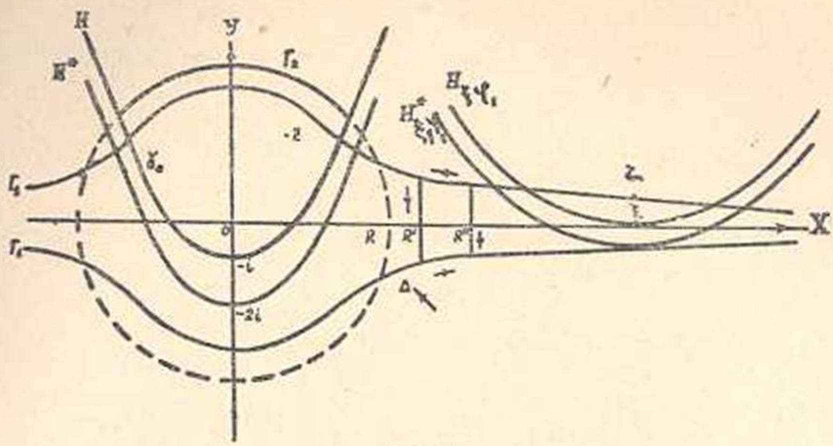
$$F_{R''}(z) - F_{R'}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta)\,F_{\lambda A\varphi_1}(\zeta - z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2(R'')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2(R')} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta)\left[F(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}\right] d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta)\left[F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}\right] d\zeta,$$

где через Δ_k обозначена замкнутая кривая $K_1(R'') - K_1(R') + K_2(R'') - K_2(R')$.



Фиг 1.

Из последнего равенства имеем

$$|F_{R'}(z) - F_{R''}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_1(R'')-K_1(R')} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_{\xi\varphi_1}}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \right| \cdot (15)$$

Возникает вопрос: каково должно быть ζ чтобы для модуля

$$\left| F_{\lambda A_{\xi\varphi_1}}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right|$$

можно было применить неравенство (8).

Для того, чтобы круг радиусом R находился ниже кривой*) H^*_{ξ,φ_1} переместим ζ по кривой $\varphi_1(x)$.

Рассмотрим значение z, принадлежащее кругу $|z| \leq R$ достаточно большого радиуса. Учитывая, что в уравнении кривой H^*_{ξ,φ_1} участвует монотонно убывающая функция $\varphi_1(\xi)$, возможно, что при увеличении ξ, кривая $H^*_{\xi\varphi_1}$ пересечет любой круг сколь угодно малого радиуса. (Примером таких кривых является, например, кривая $H^*_{\xi\varphi_1}$, если она строится по $\lambda(x) = |x|^{\alpha} - 1$, $0 < \infty < 1$ вышеуказанным методом' а в качестве $\varphi(x)$ взято $\varphi(x) = e^{|x|^{\tau}}$). Предположим, что для любого наперед заданного круга сколь угодно большого радиуса $|z| = R$, кривые $\lambda(x)$ и $\varphi(x)$ такие, что для них существует такая точка ξ^*, чтобы для всех $\xi \geq \xi^*$ этот круг оказался ниже кривой $H^*_{\xi\varphi_1}$. Для этого достаточно требовать, чтобы при $\xi > \xi_*$ имело место неравенство

$$\varphi_1(\xi_*)\, \lambda\left(\frac{R - \xi_*}{\varphi_1(\xi_*)} \right) \geq R. \tag{16}$$

Решая это неравенство относительно, ξ_* найдем

$$\xi_* = \xi_{\lambda\varphi}(R). \tag{17}$$

---

*) В дальнейшем аналогичная оговорка о $\bar{H}^*_{\xi\varphi_1}$ подразумевается.

Обозначим абсолютную величину ζ_* через $\rho : \rho = |\xi_*|$.

Итак, если $\zeta = \xi_* + i\varphi(\xi_*)$, то все точки круга радиусом R расположены под $H^*_{\xi\varphi_1}$. Следовательно

$$\left| F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-A_\xi f_\lambda(0)}. \tag{18''}$$

Тогда мы имеем право к правой части уравнения (15) применить неравенство (8). Получим:

$$|F_{R'}(z) - F_{R''}(z)| \leqslant C_3 \int\limits_{R'}^{\infty} M(\xi) \frac{C}{\varphi(\xi)} e^{-A_\xi \varphi_\lambda(0)} d\xi,$$

$$|\xi| \geqslant |\xi_*| = R^*, \; R' > R^* = R^*(R).$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{F_N(z)\}$ в конечной плоскости требуем, чтобы

$$\int\limits_0^\infty M(\xi) \frac{1}{\varphi(\xi)} e^{-A_\xi f_\lambda(0)} d\xi < \infty. \tag{18}$$

Таким образом, последовательность $\{F_N(z)\}$ равномерно сходится в любом конечном круге при $N \to \infty$.

Предел последовательности $\{F_N(z)\}$, являющейся целой функцией, обозначим через $F(z)$

$$\lim_{N \to \infty} F_N(z) = F(z). \tag{19}$$

Теперь докажем, что на действительной оси

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad -\infty < x < \infty. \tag{20}$$

Для этой цели составим разность

$$F_N(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_1(N)} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\xi - z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \qquad |z| < N. \tag{21}$$

В конечной части плоскости, ограниченной кривой

$$K(N) = K_1(N) + K_2(N), \quad \text{имеем:}$$

$$\lim_{N \to \infty} |F_N(z) - f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N \to \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_1(N)} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{2\pi}\int_0^\infty M(\xi)\frac{c}{\varphi(\xi)}e^{-A_\xi f_\lambda(0)}\,d\xi \leqslant \varepsilon_* \int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \varepsilon. \tag{22}$$

Из последнего условия имеем

$$\frac{M(\xi)}{\varphi(\xi)}e^{-A_\xi f_\lambda(0)} = \frac{\varepsilon_*}{1+\xi^2}.$$

Отсюда найдем

$$A_\xi = \frac{1}{f_\lambda(0)}\left[\ln(1+\xi^2) + \ln M(\xi) + \ln\frac{1}{\delta_*} - \ln\varphi(\xi)\right]. \tag{23}$$

Из (19) и (22) вытекает

$$|F(z) - f(z)| = \lim_{N\to\infty}|F_N(z) - f(z)|$$

и окончательно получим требуемое неравенство (20).

Докажем вторую часть теоремы. Оценим рост построенной целой функции $F(z)$. Искомая оценка будет получена из соответствующей оценки для $F_N(z)$, справедливой при любом N. Для получения этой оценки запишем (14) в виде:

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(N)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(N)} f(\zeta)F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z)\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(N)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

и рассмотрим значения $|z| \leqslant R$, принадлежащие кругу достаточно большого радиуса R. Обозначим через $c(z)$ совокупность частей кривых $y = \pm\varphi(x)$, принадлежащих полосе $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < 1$, где z_0 — произвольная точка области D.

Имеем очевидно, при $N > \rho > R > 1$,

$$|F_N(z)| \leqslant M(R) + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(z)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{K_1(\rho)-C(z)}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(\infty)}\left|f(\zeta)\right|\cdot\left|F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}\right||d\zeta| +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(\rho)}|f(\zeta)||F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z)||d\zeta| = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5.$$

Оценим последние слогаемые.

1) $R_1 = M(R)$.

2) Для оценки R_2 оценим $f'(\xi)$ в точках $C(z)$.

Представляя $f(\xi)$ в виде интеграла Коши, по окружности радиуса $\varphi_1(\xi)$ с центром $\zeta \in C(z)$, получим

$$|f'(\zeta)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\varphi_1(\xi)}} \frac{f(t)\,dt}{(t-\zeta)^2} \right| < \frac{M(R+1)}{\varphi_1(R+1)} \quad |z| < R.$$

Интегрируя R_2 по частям, с помощью этого неравенства получим:

$$R_2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{C(z)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{C(z)} f(\zeta)\,d\ln(\zeta - z) \right| \leqslant$$

$$< \frac{4}{2\pi} M(R+1)\ln(R+1) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C(z)} |f'(\zeta)\ln(\zeta - z)|\,|d\zeta| <$$

$$< C_4 \frac{M(R+1)\ln(R+1)}{\varphi(R+1)}.$$

3) $$R_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_1(\rho) - C(z)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| < \frac{4}{\pi}(\rho + R)\,M(\rho).$$

4) $$R_4 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_1(\infty) - K_1(\rho)} |f(\zeta)| \left| F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{M(\xi)}{\varphi(\xi)} e^{-A_\xi \varphi_\lambda(0)}\,d\xi < \varepsilon.$$

5) Для оценки R_5 воспользуемся оценкой (7), заменяя A' через A_ξ.

$$R_5 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_1(\rho)} |F(\zeta)| \cdot |F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z)| \cdot |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant CM(\rho) \int\limits_0^\rho |F_{\lambda A_\xi \varphi_1}(\zeta - z)|\,|d\zeta| \leqslant$$

$$< \frac{CM(\rho)}{\varphi(\rho)} \int\limits_0^\rho e^{A_\rho \mu_\lambda \left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi(\xi)} \right)} d\xi. \tag{24}$$

Оценим последний интеграл. Для этого отобразим область D_1 в конечную область G при помощи преобразования $W_2 = (z + 2i)^{-1}$, тогда точки $z = \infty, 0, -i$ переходят, соответственно в $W_1 = 0, -\frac{i}{2}, -i$. Отобразим область G при помощи преобразования

$W_2 = \Psi(W_1)$ на круг $|W_2 + 1| < 1$ так, чтобы точки $W_1 = 0, -\frac{i}{2}$, $-i$ переходили, соотвественно в $W_2 = 0, -1, -2$. Тогда, по известной теореме Варшавского, для модуля отображающей функции при $|W_1| < \alpha$ получим

$$|\Psi(W_1)| \leqslant C_5 \exp\left\{-\pi \int\limits_{|W_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho\vartheta(\rho)}\right\} < C_5 e^{-\int\limits_{|W_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho}} < C_6 |W_1|,$$

так как $\vartheta(\rho) < \pi$.

Круг $|W_2 + 1| < 1$ отобразим на полуплоскость $Re\,W > 0$ так, чтобы точки $W_2 = 0, -1, -2$ переходили в $W = 0, 1, \infty$, пользуясь отображением

$$W = -\frac{W_2}{W_2 + 2}.$$

Отсюда для достаточно малых $|W_2|$ имеем:

$$|W| \leqslant \frac{|W_2|}{|W_2| - 2|} < |W_2| = |\Psi(W_1)| =$$

$$= \left|\Psi\left(\frac{1}{z + 2i}\right)\right| < C_6 \left|\frac{1}{z + 2i}\right|.$$

Таким образом, для функции, отображающей область D_λ на полуплоскость $\operatorname{Re} W > 0$, получим:

$$\mu_\lambda(z) = \max_{|z| = R} |f_\lambda(z)| < C_6 \left|\frac{1}{z}\right|, \text{ причем } f_\lambda(0) = 1.$$

Поэтому из (24) получим:

$$R_5 < \frac{CM(\rho)}{\varphi(\rho)} \int\limits_0^{\rho} e^{C_6 A_\rho \left(\frac{\varphi_r(\xi)}{|\xi - x| + 1}\right)} d\xi < \left[\frac{C\rho M(\rho)}{\varphi(\rho)}\right]^{1 + C_\lambda \varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_*}\right)^{C_\lambda \varphi(0)}.$$

Учитывая полученные оценки R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, получим

$$|F(z)| < \left[\frac{C_* \rho M(\rho)}{\varphi(\rho)}\right]^{1 + C_\lambda \varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{C_\lambda(\varphi 0)}. \tag{25}$$

В полученную оценку входит вспомогательная функция $\lambda(x)$, так как $\rho = |\xi_*|$, $\xi_* = \xi_{\lambda\varphi}(R)$. Правая часть неравенства (25) для данного $\varphi(x)$ растет медленно, тогда как $\rho = kR$, $k \geqslant 2$.

А ρ принимает такое значение при $\lambda(x) = cx$, $c < 1$.

Таким образом, для модуля аппроксимирующей целой функции, окончательно получим

$$|F(z)| < \left[\frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)}\right]^{1+C_\varepsilon\varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{C_\varepsilon\varphi(0)},$$

где $|z| \leq R$, или

$$|F(z)| < \frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)} e^{C_\varepsilon\varphi(0)\ln\frac{M(kR)(1+kR^2)}{\varepsilon\varphi(kR)}}.$$

Ленинаканский педагогический
институт им. М. Налбандяна

Поступило 10 XII 1967

Գ. Մ. Ավետիսյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է D տիրույթը՝ սահմանափակված $y = \mp\varphi(x)$ *կորով, որտեղ* $\varphi(x)$ *դրական, զույգ և* $|x|$*-ը անվերջ անելիս մոնոտոն նվազելով 0-ի ձգտող ֆունկցիա է։ Դիտարկվում է D կորագիծ անվերջ շերտում անալիտիկ* $f(z)$ *ֆունկցիան, որի համար*

$$|f(z)| \leq M(R) \quad z \in D, \ |z| \leq R, \text{ որտեղ } M(R) = \max_{\substack{z \in D \\ |z| \leq R}} |f(z)|։$$

Ապացուցված է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ *համար գոյություն ունի ամբողջ ֆունկցիա, որը դիտարկվող տիրույթի ներսում գտնվող կորագիծ շերտում և, մասնավորապես, իրական առանցքի վրա, բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon$$

Միաժամանակ գնահատված է մոտարկող ամբողջ ֆունկցիայի աճը՝ կախված $f(z)$ *ֆունկցիայի աճից,* $\varphi(x)$ *ֆունկցիայից և* ε *շեղումից։*

$$|F(z)| < C\left[\frac{RM(kR)}{\varphi(kR)}\right]^{1+C_\varepsilon\varphi(0)} \text{ որտեղ, } |z| \leq R, \ k \geq 2։$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* ДАН СССР, 47, № 4 (1945).
2. *Мергелян С. Н.* Успехи мат. наук, т. 7, вып. 2 (1951), 31—122.
3. *Мергелян С. Н.* Труды мат. института им. В. А. Стеклова АН СССР, 37 (1951).