ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 5, 1958 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян

Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов

Изгиб составных стержней в случае, когда изгибающая сила действует в одной из главных приведенных плоскостей изгибаемого стержня, через функции кручения и изгиба, исследован академиком Н. И. Мусхелишвили [1]. Эта же задача, в связи с задачей устойчивости плоской формы изгиба, была исследована через функцию напряжений в работе [2].

При решении задачи поперечного изгиба стержня в упруго пластической стадии, как приведенный центр тяжести сечения стержня, так и приведенные главные оси инерции зависят от внешней нагрузки и подлежат определению по ходу решения задачи. Поэтому, для определения касательных напряжений при изгибе стержня за пределами упругости, необходимо иметь решение задачи изгиба составных стержней в общей постановке, когда изгибающая сила имеет произвольное направление, а координатные оси не являются главными приведенными осями инерции сечения стержня. Эта задача для однородных стержней была решена в 1935 г. академиком Л. С. Лейбензоном [3].

Здесь мы решаем задачу изгиба составных стержней, при произвольном расположении поперечной изгибающей силы, через функцию напряжения, исходя из линейного представления осевой деформации ε_z через координаты точек поперечного сечения стержня.

Начало координат возьмем в произвольной точке сечения заделанного конца изгибаемого стержня. Ось z направим параллельно образующим поверхности призматического составного стержня, а оси x и y в плоскости поперечного сечения. К другому концу стержня приложим поперечную изгибающую силу P произвольного направления. Для осевой деформации ε_z принимаем следующее выражение:

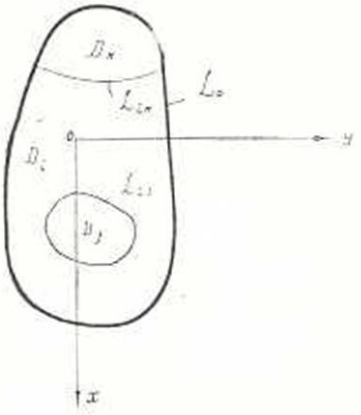
$$\varepsilon_z = (A_0 x + B_0 y + D_0)(l - z) \tag{1.1}$$

где l — длина стержня, а A_0, B_0 и D_0 — постоянные, подлежащие определению.

Область поперечного сечения составного стержня D_0 состоит из нескольких областей D_1, $D_2, \cdots$, соответствующих различным материалам, составляющим стержень. Контур поперечного сечения обоз-

начим через L_0, а линии раздела областей D_i и $D_j (i, j = 1, 2, \cdots)$ через L_{ij}.

Принимая во внимание, что боковая поверхность стержня свободна от внешних воздействий и поперечные размеры по сравнению с его длиной малы, для напряженного состояния изгибаемого стержня будем иметь



Фиг. 1.

$$\sigma_x^i = \sigma_y^i = 0$$
$$\sigma_z^i = E_i \varepsilon_z = E_i (A_0 x + B_0 y + D_0)(l - z). \tag{1.2}$$

Здесь через σ_x^i, σ_y^i, σ_z^i обозначены компоненты напряжений в соотвеаствующих областях D_i и использован закон Гука.

Из условий равновесия части стержня, расположенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $l = \text{const}$, будем иметь

$$\iint_{D_i} \sigma_z dx dy = 0$$
$$\iint_{D_i} \sigma_z^i y dx dy = -M_x, \qquad \iint_{D_0} \sigma_z^i x dx dy = -M_y \tag{1.3}$$

где M_x и M_y — моменты изгибающей силы относительно осей x и y.

$$M_x = P_y (l - z), \qquad M_y = P_x (l - z) \tag{1.4}$$

Используя (1.2) и (1.4), из (1.3) для постоянных A_0, B_0 и D_0 получим уравнения

$$A_0 \sum_{i=1}^{n} E_i S_{iy} + B_0 \sum_{i=1}^{n} E_i S_{ix} + D_0 \sum_{i=1}^{n} E_i S_i = 0$$
$$A_0 \sum_{i=1}^{n} E_i J_{ixy} + B_0 \sum_{i=1}^{n} E_i J_{iy} + D_0 \sum_{i=1}^{n} E_i S_{ix} = -P_y \tag{1.5}$$
$$A_0 \sum_{i=1}^{n} E_i J_{ix} + B_0 \sum_{i=1}^{n} E_i J_{ixy} + D_0 \sum_{i=1}^{n} E_i S_{iy} = -P_x$$

Здесь E_i — модуль упругости материала, соответствующего области D_i; S_i — площадь области D_i; S_{ix} и S_{iy} — статические моменты площади S_i относительно осей x и y, а J_{ix}, J_{iy} и J_{ixy} — моменты инерции и центробежный момент инерции площади S_i относительно осей x и y.

Системой уравнений (1.5) определяются постоянные A_0, B_0 и D_0, через которые в свою очередь определяются нормальная деформация ε_z и нормальное напряжение σ_z^i.

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz}^i и τ_{yz}^i в соответствующих областях $D_i\,(i=1, 2, \cdots)$, предполагая, что

$$\tau_{xy}^i = 0. \tag{1,6}$$

На основании уравнений упругого равновесия, принимая во внимание (1.2) и (1.6), находим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{yx}^i}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} - E_i (A_0 x + B_0 y + D_0) = 0. \tag{1.7}$$

Первые два уравнения (1.7) показывают, что напряжения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i не зависят от координаты z, а третье уравнение будет удовлетворено, если напряжения τ_{xz} и τ_{yz} через функцию $F(x, y)$ представить в следующем виде:

$$\tau_{xz}^i = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + \varphi_i(y)$$

$$\tau_{yz}^i = -\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + \psi_i(x). \tag{1.8}$$

Здесь через F_i обозначена функция $F(x, y)$ в области D_i, а $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции.

Для деформаций ε_x^i и ε_y^i на основании закона Гука будем иметь

$$\varepsilon_x^i = \varepsilon_y^i = -\frac{\nu}{E_i} \sigma_z^i = -\nu (A_0 x + B_0 y + D_0)(l - z). \tag{1.9}$$

Из условия совместности деформаций, принимая во внимание (1.9), находим

$$2\nu B_0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}^i}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^i}{\partial x}\right)$$

$$2\nu A_0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}^i}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}^i}{\partial y}\right) \tag{1.10}$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^i}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^i}{\partial x} = 2\nu (B_0 x - A_0 y) + c_i, \tag{1.11}$$

где c_i — произвольная постоянная интегрирования.

Подставляя выражения γ_{xz}^{i} и γ_{yz}^{i} через τ_{xz}^{i} и τ_{yz}^{i} согласно закону Гука и принимая во внимание (1.8), получаем

$$\Delta F_i = 2\nu G_i (B_0 x - A_0 y) - (\varphi_i' - \varphi_i') + G_i c_i. \tag{1.12}$$

Уравнению (1.12) должна удовлетворять функция напряжений в каждой из областей D_i.

Перейдем теперь к контурному условию на L_0 и к условиям, которым должна удовлетворять функция напряжений $F(x, y)$ на линиях раздела L_{ij}.

Условие, что боковая поверхность свободна от внешних сил, выражается следующим образом:

$$\tau_{xz}^{i} l + \tau_{yz}^{i} m = 0 \quad \text{на} \quad L_0,$$

где

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \qquad m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \tag{1.14}$$

Внеся (1.2) в (1.13) и используя (1.14), получаем:

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = \left[\frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + \psi_i'\right]\frac{dx}{ds} - \left[\frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + \varphi'\right]\frac{dy}{ds}. \tag{1.15}$$

Условию (1.15) должна удовлетворять функция напряжений $F(x, y)$ на контуре L_0.

Из условия равновесия элемента линии раздела L_{ij} имеем

$$\tau_{xz}^{i} l + \tau_{yz}^{i} m = \tau_{xz}^{j} l + \tau_{yz}^{j} m. \tag{1.16}$$

Подставляя выражения напряжений из (1.8) в (1.16) и принимая во внимание (1.14), находим

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} = \frac{1}{2}(E_j - E_i)\left[y(B_0 y + D_0)\frac{dx}{ds} - \right.$$

$$\left. - x(A_0 x + D_0)\frac{dy}{ds}\right] + (\psi_j - \psi_i)\frac{dx}{ds} - (\varphi_j - \varphi_i)\frac{dy}{ds}. \tag{1.17}$$

Воспользуемся условием непрерывности перемещений на линиях раздела L_{ij}. Имеем

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z} = \gamma_{xz}^{i} = \frac{1}{G_i}\tau_{xz}^{i}, \qquad \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial z} = \gamma_{yz}^{i} = \frac{1}{G_i}\tau_{yz}^{i}. \tag{1.18}$$

Внеся (1.8) в (1.18), находим

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{G_i}\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{E_i}{2G_i}(B_0 y^2 + D_0 y) + \frac{1}{G_i}\psi_i$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial y} = -\frac{1}{G_i}\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{E_i}{2G_i}(A_0 x^2 + D_0 x) + \frac{1}{G_i}\varphi_i \tag{1.19}$$

Помножив первое из соотношений (1.19) на $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$, а второе — на $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$, и складывая полученные результаты, находим:

$$\frac{1}{G_i}\frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{1}{G_j}\frac{\partial F_j}{\partial n} = \left(\frac{1}{G_i}\varphi_i - \frac{1}{G_j}\varphi_j\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{1}{G_i}\psi_i - \frac{1}{G_j}\psi_j\right)\frac{dy}{ds}. \tag{1.20}$$

Таким образом, при решении задачи косого изгиба составной консоли, функция напряжений $F(x, y)$ в каждой из областей D_i должна удовлетворять уравнению (1.12), контурному условию (1.15) и условиям (1.17) и (1.20) на линиях раздела L_{ij}.

Выясним смысл постоянных c_i в правых частях уравнений (1.12). С этой целью обратимся к понятию о среднем вращении элементов поперечного сечения изгибаемого стержня вокруг оси z.

Имеем:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{G_i}\tau_{xz}^i - \frac{\partial u_i}{\partial z}, \qquad \frac{\partial w_i}{\partial y} = \frac{1}{G_i}\tau_{yz}^i - \frac{\partial v_i}{\partial z}. \tag{1.21}$$

Используя (1.8), из (1.2) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{1}{2}A_i x^2 + \frac{1}{2}D_i x + \varphi_i\right) - \frac{\partial u_i}{\partial z},\\ \frac{\partial w_i}{\partial y} &= \frac{1}{G_i}\left(-\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{2}B_i y^2 + \frac{1}{2}D_i y + \psi_i\right) - \frac{\partial v_i}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Составляя смешанные вторые производные w_i при помощи (1.22) и приравнивая их, получаем

$$\Delta F_i = G_i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - \varphi_i - \psi_i. \tag{1.23}$$

Сравнивая (1.23) с (1.13), находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = 2\nu(B_0 x - A_0 y) + c_i. \tag{1.24}$$

Здесь выражение

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} = 2\Omega_i \tag{1.25}$$

представляет среднее вращение элементов поперечного сечения вокруг оси z.

На основании (1.24) и (1.25) находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega_i = -\nu(B_0 x - A_0 y) + c_i. \tag{1.26}$$

Соотношение (1.26) показывает, что изменение среднего вращения элементов поперечного сечения Ω_i по направлению оси z состоит из двух частей; первая часть, соответствующая последнему члену правой части (1.26), не зависит от координат x и y и обусловлена общим поворотом поперечного сечения вокруг оси z, как при чистом кручении. Вторая часть обусловлена искажением поперечного сечения вследствие изгиба и зависит от координат x и y линейно.

Так как на поверхностях раздела имеем условие непрерывности перемещений, среднее вращение, следовательно и его изменение по направлению оси z, должны быть непрерывны на линиях раздела L_{ij}. Поэтому имеем

$$c_i = c_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots).$$

Если изгибающая поперечная сила приложена к концу составной консоли так, что изгиб не сопровождается кручением, то мы должны положить

$$c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots). \tag{1.27}$$

Это положение изгибающей силы P, при котором изгиб не сопровождается кручением, можно определить после решения задачи изгиба в предположении (1.27).

Из условия, что равнодействующая касательных усилий в данном поперечном сечении должна уравновешиваться изгибающей силой P, находим положение линии раздела.

Действительно, обозначим через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ координаты некоторой точки линии действия силы P. Сумма моментов всех касательных усилий относительно этой точки должна быть равна нулю:

$$\iint_{D_0} [(x - \bar{x})\tau^i_{yz} - (y - \bar{y})\tau^i_{xz}]\, dxdy = 0. \tag{1.28}$$

Принимая во внимание, что

$$P_x = \iint_{D_0} \tau^i_{xz} dxdy, \qquad P_y = \iint_{D_0} \tau^i_{yz} dxdy$$

Вместо (1.28) будем иметь

$$\bar{y}P_x - \bar{x}P_y + M_0 = 0 \tag{1.29}$$

где $M_0 = \iint_{D_0} (x\tau^i_{yz} - y\tau^i_{xz})\, dxdy$ — крутящий момент касательных напряжений относительно начала координат.

На основании линейного характера рассматриваемой задачи зависимость касательных напряжений τ^i_{xz} и τ^i_{yz} от P_x и P_y должна быть линейной и однородной. Поэтому, если будем изменять P_x и P_y независимо друг от друга, (1.29) будет представлять уравнение пучка

прямых, проходящих через одну точку, в котором параметром будет служить отношение $\frac{P_x}{P_y}$. Таким образом, чтобы поперечный изгиб составного стержня не сопровождался кручением, линия действия изгибающей поперечной силы P должна проходить через определенную точку сечения, называемую центром изгиба [3].

Согласно (1.29) координаты центра изгиба должны быть определены при помощи следующих формул:

$$\bar{x} = \frac{M_0(P_y)}{P_y}, \qquad \bar{y} = \frac{M_0(P_x)}{P_x}. \tag{1.30}$$

Здесь $M_0(P_x)$ и $M_0(P_y)$ — моменты касательных напряжений изгиба относительно начала координат с условием, что при вычислении $M_0(P_x)$ принимается $P_y = 0$ и, наоборот, при вычислении $M_0(P_y)$ принимается $P_x = 0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 24.IV.1958

Կ. Ս. Չոբանյան

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՁՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է մի ծայրով ամրակցված այն բաղադրյալ ձողի ծռման խնդիրը, որի մյուս ծայրում ազդում է P լայնական ուժը, երբ կորդինատային առանցքները չեն համընկնում ձողի կտրվածքի իներցիայի բնորոշ գլխավոր առանցքների հետ, իսկ P ուժն ունի կամայական ուղղություն։

Խնդրի լուծումը բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը։ Այդ ֆունկցիան ձողի տարբեր նյութերին համապատասխանող լայնական հատվածքի տիրույթներից յուրաքանչյուրում պետք է բավարարի համապատասխան աջ մասով (1.12) Պուասոնի հավասարմանը, իսկ եզրում ու բաժանման գծի վրա (1.15), (1.17) և (1.18) պայմաններին։

Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի ծռման կենտրոն, որի կոորդինատների որոշման համար ստացված են (1.30) բանաձևերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. *Чобанян К. С.* Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм. ССР, т. XXII, № 3, 1956.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.