

М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсисян

Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квази-аналитические классы функций

В нашей предыдущей статье [1] задача о разложимости функций в ряд Дирихле с данной последовательностью экспонентов $\{\lambda_n\}$ была решена введением особых интегро-дифференциальных операций, являющихся естественными обобщениями операций последовательного дифференцирования. Эти операции определялись с помощью интегралов дробного порядка.

В настоящей статье, при помощи операций дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля или Г. Вейля, определяются классы функций, бесконечно дифференцируемых в обобщенном смысле на полуоси $[0, +\infty)$, или на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Для введенных таким образом классов указываются условия квази-аналитичности, т. е. даются условия, определяющие функции этих классов единственным образом.

§ 1. Квази-аналитические классы на полуоси $[0, +\infty)$.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$. Интегралом Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в нулевой точке называют функцию

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = f(x) \quad (1.2)$$

поэтому интегралом нулевого порядка от $f(x)$ естественно называть саму эту функцию.

Для заданной последовательности чисел $\{\lambda_k\}$, ($k \geq 0$), где $0 < \lambda_k < 1$, введем в рассмотрение операции

$$D^{(n)} f(x) = \frac{d^{-\lambda_n}}{dx^{-\lambda_n}} f(x)$$

$$D^{(1)}f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} \frac{d}{dx} D^{(0)}f(x) \quad (1.3)$$

$$D^{(k)}f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} \frac{d}{dx} D^{(k-1)}f(x),$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Назовем функцию $D^{(k)}f(x)$ (если она существует) k -ой обобщенной производной* от $f(x)$ по данной последовательности $\{\alpha_k\}$, очевидно, что в частном случае, когда $\alpha_k = 0$, ($k = 0, 1, \dots, N$), будем иметь:

$$D^{(k)}f(x) \equiv f^{(k)}(x), \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Скажем, что $f(x) \in C\{\alpha_k\}$, если функции

$$D^{(k)}f(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны на полуоси $[0, +\infty)$, а функции

$$\frac{d}{dx} D^{(k)}f(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны на $(0, +\infty]$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \delta]$, ($\delta > 0$).

Пусть $\{m_n\}$, ($n \geq 0$) некоторая последовательность положительных чисел. Отнесем к классу $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ все те функции $f(x)$ из класса $C\{\alpha_k\}$, для которых выполняются условия

$$a) \quad |D^{(n)}f(x)| \leq A \cdot B^{\sum_{k=0}^n (1-\alpha_k)} m_n e^{cx}, \quad (1.4)$$

$$0 \leq x < +\infty, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где A , B и C постоянные, зависящие от данной функции $f(x)$.

$$б) \quad e^{-cx} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)}f(x) \right| \in L_1[0, +\infty], \quad (1.5)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Скажем, что множество функций $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ составляет квази-аналитический класс в обобщенном смысле, если для любых двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ равенства

$$D^{(n)}f_1(0) = D^{(n)}f_2(0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

повлекут за собой тождество

$$f_1(x) \equiv f_2(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (1'.6)$$

* В статье [1] это понятие определяется несколько иначе, но не трудно видеть, какова связь этих определений.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях, наложенных на последовательность чисел $\{m_n\}$, класс $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ квази-аналитический, введем функцию

$$T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\sum_{k=1}^n (1-\alpha_k)}}{m_n}, \quad (1.7)$$

аналогичную функции А. Островского.

Отметим, что в частном случае, когда $\alpha_k = 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), будем иметь $D^{(n)}f(x) = f^{(n)}(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$); а функция $T_\alpha(r)$ совпадает с функцией А. Островского.

Докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы Карлемана — Островского [2] для класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$.

Теорема 1. Если для данной последовательности $\{\alpha_k\}$, $0 \leq \alpha_k < 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) последовательность $\{m_n\}$ такова, что

$$\int_1^\infty \frac{\log T_\alpha(r)}{r^2} dr = +\infty \quad (1.8)$$

то класс $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ — квази-аналитический.

Доказательство. Достаточно показать, что если некоторая функция $f_0(x)$ из класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ удовлетворяет условиям

$$D^{(n)}f_0(0) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

то $f_0(x) \equiv 0$, $0 \leq x < +\infty$.

По условию имеем:

$$|D^{(n)}f_0(x)| \leq A_0 B_0^{-1} e^{c_0 x}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где $A_0 = A_0(f)$, $B_0 = B_0(f)$, $c_0 = c_0(f)$ зависят только от функции $f_0(x)$.

Поэтому интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-uz} D^{(n)}f_0(u) du \quad (1.10)$$

абсолютно сходится и представляет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c_0$.

Далее, так как имеем также

$$e^{-c_0 x} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)}f_0(x) \right| \in L_1(0, +\infty) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

то из (1.10) интегрированием по частям с учетом (1.9) получим:

$$F(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-uz} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du, \quad (1.11)$$

где, очевидно, интеграл абсолютно сходится в той же полуплоскости $\operatorname{Re} z > c_0$.

Заметим теперь, что справедлива формула

$$e^{-uz} = \frac{z^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{\infty} e^{-vz} (v-u)^{\alpha_1-1} dv, \quad \operatorname{Re} z > 0, u > 0$$

откуда и из (1.11) получим:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{\infty} e^{-vz} (v-u)^{\alpha_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du = \\ &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} e^{-vz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^v (v-u)^{\alpha_1-1} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du \right\} dv = \\ &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(\alpha_1)} f_0(u) du, \quad \operatorname{Re} z > c_0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

при этом легко видеть, что перемена порядка интегрирования при получении окончательной формулы (1.12) законна в силу абсолютной сходимости всех интегралов при $\operatorname{Re} z > c_0$.

Повторяя буквально те же рассуждения для интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(k)} f_0(v) dv,$$

получим окончательно

$$F(z) = \frac{1}{z^{\sum_{k=1}^n (1-\alpha_k)}} \int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(n)} f_0(v) dv, \quad \operatorname{Re} z > c_0, (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

Но из формул (1.13) вытекает оценка

$$|F(z)| \leq A \frac{B^{\sum_{k=1}^n (1-\alpha_k)} m_n}{|z|^{\sum_{k=1}^n (1-\alpha_k)}}, \quad \operatorname{Re} z \geq c_0 + 1, (n=1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

или, в силу (1.7), оценка

$$|F(z)| < AT_n^{-1} \left(\frac{|z|}{B} \right), \quad \operatorname{Re} z > c_0 + 1. \quad (1.15)$$

Но из условия (1.8) теоремы и из (1.15) следует, что для ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c_0 + 1$ функции $F(z)$ расходуется интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |F(c_0 + 1 + iy)|}{1 + y^2} dy = -\infty,$$

поэтому, по известной теореме единственности [2], $F(z) \equiv 0$. Отсюда, в частности, вытекает тождество

$$F(1 + c_0 + iy) = \int_0^{\infty} e^{-iyu} \{e^{-(c_0+1)u} D^{(0)} f_0(u)\} du = 0, \quad -\infty < y < +\infty$$

обратив которое, получим:

$$D^{(0)} f_0(u) = \frac{1}{\Gamma(c_0)} \int_0^u (u-v)^{c_0-1} f_0(v) dv = 0, \quad 0 \leq u < +\infty. \quad (1.16)$$

Остается только отметить, что, по известной формуле обращения интеграла Абеля, из (1.16) получим

$$f_0(u) = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-c_0)} \int_0^u (u-v)^{-c_0} D^{(0)} f_0(v) dv \right\} = 0$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Но условие (1.8) не только достаточно, но и необходимо для квази-аналитичности класса $C_{m_n}\{z_k\}$. Докажем следующую теорему, являющуюся обращением теоремы 1.

Теорема 2. Если последовательности $\{z_k\}$, $(k \geq 0)$; $z_0 = 0$, $0 \leq z_k < 1$, $(k \geq 1)$ и $\{m_n\}$, $(n \geq 1)$ таковы, что

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n (1 - z_k) \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (1.17)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_n(r)}{r^2} dr < +\infty, \quad T_n(r) = \sup \frac{r^{\mu_n}}{m_n} \quad (1.18)$$

то существует функция $f_*(x) \neq 0$, принадлежащая к классу $C_{m_n}\{z_k\}$ и удовлетворяющая условиям

$$D^{(k)} f_*(0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.19)$$

Доказательство. Рассмотрим интервалы вида $[k, k+1)$, $(k \geq 0)$. Так как $0 < \mu_{n+1} - \mu_n = 1 - \alpha_{n+1} < 1$, то из (1.17) следует, что в каждом таком интервале может лежать лишь конечное число чисел из последовательности $\{\mu_n\}$.

Обозначая

$$m_k^* = \min_{\mu_p \in [k, k+1)} \{m_p\}$$

и

(1.20)

$$T_n^*(r) = \sup_{k \geq 0} \frac{r^{k+1}}{m_k^*}$$

для $r > 1$ будем иметь:

$$T_n(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\mu_n}}{m_n} > \sup_{n \geq 1} \frac{r^{[\mu_n]}}{m_n} = \sup_{k \geq 0} \frac{r^k}{m_k^*} = \frac{1}{r} T_n^*(r). \quad (1.21)$$

Из оценки (1.21) и из условия (1.18) теоремы вытекает, что

$$\int_1^\infty \frac{\log T_n^*(r)}{r^2} dr < +\infty. \quad (1.22)$$

Но, как хорошо известно, [2], по теореме Карлемана-Островского из (1.22) следует существование функции $f_*(x) \neq 0$, бесконечно дифференцируемой на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющей условиям:

$$f_*^{(n)}(0) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.23')$$

$$\sup_{(0, +\infty)} |f_*^{(n)}(x)| \leq m_{n-1}^*, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.23'')$$

Покажем теперь, что функция $f_*(x)$ — требуемая, т. е. что $f_*(x) \in C_{m_n} \{a_n\}$ и для нее выполняются условия (1.19).

Напишем для функции $f_*(x)$ формулу Маклорена с интегральным остаточным членом, тогда, имея в виду условия (1.23'), для любого $k \geq 0$ получим:

$$f_*(x) = \frac{1}{1 + k!} \int_0^x (x-t)^k f_*^{(k+1)}(t) dt, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (1.24)$$

Пусть $j > 0$ — целое, фиксированное; число μ_j принадлежит некоторому интервалу $[k_j, k_j + 1)$. Напишем формулу (1.24) для $k = k_j$, после чего непосредственным вычислением найдем

$$D^{(j)} f_*(x) = \frac{d^{-\alpha_j}}{dx^{-\alpha_j}} \frac{d}{dx} D^{(j-1)} f_*(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k_j - \mu_j + 1)} \int_0^x (x-t)^{k_j - \mu_j} f^{(k_j-1)}(t) dt, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.25)$$

Из (1.25) получим

$$D^{(j)} f_*(0) = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

и так как $j \geq 0$ произвольно, то (1.19) удовлетворяется.

Далее, из (1.25) имеем также

$$|D^{(j)} f_*(x)| \leq \frac{x^{k_j - \mu_j + 1}}{\Gamma(k_j - \mu_j + 2)} m_{kj}^*, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (1.26)$$

Но, по определению,

$$m_{kj}^* = \min_{\mu_j \in [k_j, k_j+1]} \{m_{pj}\}$$

и $\mu_j \in [k_j, k_j+1]$, поэтому

$$m_{kj}^* \leq m_j. \quad (1.27)$$

Из (1.26) и (1.27) получим

$$|D^{(j)} f_*(x)| \leq A_* x m_j$$

т. е. $f_*(x) \in C_{m_n}\{z_k\}$.

§ 2. Квази-аналитические классы на всей оси $(-\infty, +\infty)$

Вводимые в настоящем параграфе классы функций связаны с операцией дробного интегрирования в смысле Г. Вейля и представляют собой естественное расширение классов бесконечно-дифференцируемых функций, рассмотренных в работах [3, 4].

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Интегралом Г. Вейля порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ называют функцию

$$W^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Интегралом нулевого порядка от $f(x)$ естественно называть саму функцию, т. е.

$$W^0 f(x) = f(x).$$

Как и в § 1, для данной последовательности $\{z_k\}$, $(k \geq 0, 0 \leq \alpha_k < 1)$ введем в рассмотрение операции

$$\begin{aligned} R^{(0)} f(x) &= W^{\alpha_0} f(x) \\ R^{(1)} f(x) &= W^{\alpha_1} \frac{d}{dx} R^{(0)} f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R^{(k)} f(x) \equiv W^{2k} \frac{d}{dx} R^{(k-1)} f(x).$$

Назовем функцию $R^{(k)} f(x)$ (если она существует) k -ой обобщенной производной от $f(x)$ по данной последовательности $\{a_k\}$.

Скажем, что $f(x) \in C(-\infty, +\infty; a_k)$, если функции

$$R^{(k)} f(x) \text{ и } \frac{d}{dx} R^{(k)} f(x), \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

непрерывны на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, при этом

а) $p(0) = p'(0) = 0^*$,

б) $p'(t)$ монотонно возрастает на $[0, +\infty)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = +\infty$.

Пусть, как и в работе [4], функция $q(x)$ двойственна с $p(x)$ по Юнга, тогда при любых $\zeta > 0$ и $\eta > 0$

$$\zeta \cdot \eta < p(\zeta) + q(\eta). \quad (2.4)$$

Отнесем теперь к классу $C_{m_n}[p(x); a_k]$ все функции $f(x)$ из класса $C(-\infty, +\infty; a_k)$, удовлетворяющие условиям

$$|R^{(k)} f(x)| \leq m_k \omega_f(x) e^{-p(x)}, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5')$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел и $\omega_f(x) \geq 0$ суммируема на $(-\infty, +\infty)$, а $p_1(x) = p(-x)$ при $x \leq 0$ и $p_1(x) \geq c_0$ при $x > 0$, c_0 — действительное число

$$|(1+x^2) \frac{d}{dx} R^{(k)} f(x)| \leq c_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5'')$$

где c_k — некоторые постоянные.

Докажем теорему, являющуюся естественным обобщением как теоремы 5 работы [4], так и теоремы Карлемана-Островского.

Теорема 3. Класс $C_{m_n}[p(x); a_k]$ пуст, иначе говоря, содержит лишь функцию $f(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T_*(r)}{r^2} dr \right\} = -\infty, \quad (2.6)$$

где

$$T_*(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\frac{\pi}{2}(1-a_n)}}{m_n}. \quad (2.7)$$

* Условие а) не существенно и вводится лишь для удобства (см. [4]).

Доказательство. Нужно доказать, что при выполнении условия (2.6) любая функция класса $C_{m_n}\{p(x); \alpha_k\}$ сводится к тождественному нулю.

Пусть $f(x) \in C_{m_n}\{p(x); \alpha_k\}$. Покажем сначала, что интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} R^{(0)} f(u) du \quad (2.8)$$

преобразование Фурье функции $R^{(0)} f(x)$, является аналитической функцией в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq 0$. Действительно, из (2.5') имеем

$$|R^{(0)} f(u)| \leq m_0 \omega_f(u) e^{-p|u|}, \quad (-\infty < u < +\infty) \quad (2.5'')$$

откуда при $u \leq 0$ следует оценка

$$\begin{aligned} |\Phi(x+iy)| &\leq \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(y+|u|)-p(|u|)} \omega_f(u) du + \\ &+ \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-|y|+u-p(u)} \omega_f(u) du, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Но, по неравенству (2.4),

$$|y|+|u|-p(|u|) \leq q(|y|) \quad (2.4')$$

поэтому из (2.9) имеем оценку

$$|\Phi(x+iy)| \leq c(f) e^{q(|y|)} \quad (2.9')$$

справедливую в нижней полуплоскости $y \leq 0$.

Но оценку (2.9) можно существенно улучшить, если воспользоваться всеми неравенствами (2.5).

Из формулы

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} R^{(0)} f(u) du,$$

которая представляет из себя аналитическую в нижней полуплоскости функцию, интегрированием по частям с учетом (2.5'') получим представление

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du, \\ (\operatorname{Im} z < 0, z \neq 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Но это представление, согласно (2.5''), остается справедливым при

$$\operatorname{Im} z \leq 0, z \neq 0.$$

Заметив далее, что для $0 \leq z_1 < 1$, $-\infty < u, x < +\infty$ имеет место формула

$$e^{-iuv} (ix)^{-z_1} = \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_0^{+\infty} (v-u)^{z_1-1} e^{-iux} dv, \quad (x \neq 0),$$

напишем (2.10) для $z=x$ в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (ix)^{1-z_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_u^{+\infty} (v-u)^{z_1-1} e^{-iux} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (x \neq 0). \quad (2.11)$$

Но интеграл (2.11) можно рассматривать как сумму следующих функций

$$\psi_1(x) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_0^{+\infty} e^{-iux} (v-u)^{z_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12')$$

$$\psi_2(x) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_u^0 e^{-iux} (v-u)^{z_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12'')$$

$$\psi_3(x) = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_u^{+\infty} e^{-iux} (v-u)^{z_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12''')$$

при этом из того, что

$$\left| \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) \right| < \frac{C_0}{1+u^2}, \quad -\infty < u < +\infty,$$

следует абсолютная сходимость внешних интегралов в формулах (2.12).

Но легко видеть, что интеграл (2.12') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \leq 0$, интеграл (2.12'') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \geq 0$ и интеграл (2.12''') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Кроме того, при $\operatorname{Im} z < 0$ в двойном интеграле (2.12') можно произвести перемену порядка интегрирования, откуда получим

$$\psi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{-iux} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_{-\infty}^0 (v-u)^{z_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv \quad \operatorname{Im} z < 0. \quad (2.13')$$

Аналогично будем иметь

$$\psi_2(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-izv} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_{-\infty}^v (v-u)^{z_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv, \quad \operatorname{Im} z > 0 \quad (2.13'')$$

и

$$\psi_3(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-izv} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_0^v (v-u)^{z_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad (2.13''')$$

Из формул (2.13) получим

$$\psi_1(z) + \psi_3(z) = \int_0^{\infty} e^{-izv} R^{(0)} f(v) dv, \quad \operatorname{Im} z < 0 \quad (2.14')$$

$$\psi_2(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-izv} R^{(1)} f(v) dv, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad (2.14'')$$

Но по условию (2.5')

$$|R^{(1)} f(v)| \leq m_1 \omega_f(v) e^{-p_1(v)},$$

поэтому интегралы (2.14) абсолютно сходятся в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и, следовательно,

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixv} R^{(1)} f(v) dv, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.15)$$

Из (2.11) и (2.15) следует

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ix)^{1-\alpha_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixv} R^{(1)} f(v) dv, \quad (x \neq 0)$$

и легко видеть, что эта формула остается в силе в области

$$D_0: (\operatorname{Im} z \leq 0, |z| > 1)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(iz)^{1-\alpha_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izv} R^{(1)} f(v) dv, \quad (2.16)$$

Повторяя буквально те же рассуждения, получим, что в области D_0

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(iz)^{1-\sum_{k=1}^n (1-\alpha_k)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izv} R^{(n)} f(v) dv \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.17)$$

Из (2.17) и (2.5') получим

$$|\Phi(x+iy)| \leq \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}|z|^{\frac{n}{2}(1-\alpha_k)}} \int_{-\infty}^0 \omega_f(v) e^{-p(|z|)+|v||y|} dv + \\ + \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}|z|^{\frac{n}{2}(1-\alpha_k)}} \int_0^{+\infty} \omega_f(v) e^{-|y|v-p_1(y)} dv \\ (z=x+iy \in D_0)$$

или, по (2.4), т. к. $q(|y|) \rightarrow +\infty$ при $|y| \rightarrow +\infty$

$$|\Phi(x+iy)| \leq c(f) \frac{e^{q(|y|)}}{T_*(|z|)}, \quad (z=x+iy \in D_0) \quad (2.18)$$

где

$$T_*(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\frac{n}{2}(1-\alpha_k)}}{m_n}.$$

Предполагая, что $\Phi(z) \neq 0$, применим формулу Карлемана к функции $\Phi(z)$ в нижней полуплоскости. Тогда, как и при доказательстве теоремы 5 работы [4], получим

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T_*(r)}{r^2} dr \right\} > -\infty.$$

что противоречит условию (2.6) теоремы.

Таким образом, $\Phi(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$, или, по (2.8)

$$R^{(\alpha_0)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t) dt \equiv 0, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.19)$$

Рассматривая тождество (2.19) сначала для значений $x \in (-\infty, 0]$, после замены переменных $x = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{\tau}$ получим обыкновенное уравнение Абеля с нулевой правой частью откуда будет следовать, что $f(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, 0]$. Затем, в силу этого, полагая, что $x \in [0, +\infty)$, получим тождество

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t) dt \equiv 0, \quad x \in [0, +\infty)$$

откуда следует $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$ и теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что можно рассматривать и другие классы бесконечно-дифференцируемых в обобщенном смысле функций, в частности можно доказать теорему, являющуюся обобщением теоремы 6 работы [4]. Однако на этом мы останавливаться не будем.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 17 IV 1958

Մ. Մ. Զրբաշյան և Հ. Բ. Ներսիսյան

ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐՈ-ԴԻԲԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏ ԿԱՊԸԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՔՎԱԶԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ԴԱՍԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ռիման-Լիուվիլի կամ Հ. Վելլի կոտորակային ինտեգրալի օգնությամբ $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի կամ $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա դիտարկում են ընդհանրացրած իմաստով անվերջ դիֆերենցիալի ֆունկցիաների դասեր:

Այդ դասերի համար նշվում են քվազիանալիտիկության պայմաններ, ալյինքն, տրվում են ալյ դասերի ֆունկցիաները միակ ձևով որոշող պայմաններ:

Բերենք հոդվածում ապացուցված արդյունքներից մեկը.

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա: $f(x)$ ֆունկցիալի Ռիման-Լիուվիլի իմաստով $\alpha > 0$ կարգի ինտեգրալ են անվանում հետևյալ արտահայտությունը

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt;$$

Բնական է ընդունել $\frac{d^0}{dx^0} f(x) \equiv f(x)$:

Տված $\{a_k\}$, $(k \geq 0, 0 \leq a_k < 1)$ հաջորդականության համար մտցնենք հետևյալ օպերացիաները

$$D^{(0)} f(x) \equiv \frac{d^{-a_0}}{dx^{-a_0}} f(x), D^{(k)} f(x) \equiv \frac{d^{-a_k}}{dx^{-a_k}} \frac{d}{dx} D^{(k-1)} f(x), (k \geq 1);$$

Անվանենք $D^{(k)} f(x)$ -ը $f(x)$ ֆունկցիալի k -րդ ընդհանրացրած ածանցյալը ըստ $\{a_k\}$ հաջորդականության:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե $a_k = 0$, $(k \geq 0)$ ապա

$$D^{(k)} f(x) \equiv f^{(k)}(x), (k \geq 0);$$

Դիցուք տված է $\{m_n\}$, $(n \geq 0)$ դրական թվերի հաջորդականություն: Կասենք, որ $f(x) \in C_{m_n} \{a_k\}$ դասին, եթե

$$m) |D^{(n)} f(x)| \leq AB^{\sum_{k=0}^n (1-a_k)} m_n e^{cx}, (0 \leq x < +\infty, \\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

որտեղ A, B և C թվերը կախված են միայն $f(x)$ -ից.

$$p) \quad e^{-cx} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)} f(x) \right| \in L_1(0, +\infty) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Այնուհետև կասենք, որ $C_{m_n}\{z_k\}$ դասը քվադրանալիտիկ է, եթե տեղի ունի $f_1(x), f_2(x) \in C_{m_n}\{z_k\}$ ֆունկցիաների համար

$$D^{(n)} f_1(0) = D^{(n)} f_2(0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

համասարուբյուններից բխում է, որ

$$f_1(x) = f_2(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Հեշտ է տեսնել, որ $z_k = 0, (k > 0)$ դեպքում վերոհիշյալ սահմանումը համընկնում է քվադրանալիտիկ դասերի կլասիկ սահմանման հետ:

Տեղի ունի Կարլեման-Պատրովսկու քվադրանալիտիկ դասերի վերաբերյալ հայտնի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը:

Թեորեմ. Որպեսզի $C_{m_n}\{z_k\}$ դասը լինի քվադրանալիտիկ անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_n(r)}{r^2} dr = +\infty,$$

որտեղ

$$T_n(r) = \sup_{n-1} \frac{r^{1-\frac{\sum_{k=1}^n (1-\sigma_k)}{m_n}}}{m_n}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. Критерии разложимости функций и ряды Дирихле. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. XI, № 5, 1958.
2. См. напр., Мандельброт С., Квази-аналитические классы функций, гл. I, (1937).
3. Бабенко, К. И. Об одной новой проблеме квази-аналитичности—о преобразованиях Фурье целых функций. Труды Моск. мат. об-ва, т. 5, стр. 23—542 1956.
4. Джрбашян М. М. Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 6, 1957 стр. 7—24.