ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 5, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсесян

Критерии разложимости функций в ряды Дирихле

Пусть $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n < \cdots; \lim_{n \to \infty} \mu_n = +\infty. \tag{1}$$

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mu_n s}, \ (s = \sigma + it), \tag{2}$$

известный под названием ряда Дирихле, после замены переменной $e^{-s} = z$ превращается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\mu_n} \tag{3}$$

расположенный по степеням данной последовательности $\{\mu_n\}$.

Ряд Дирихле (2) обладает многими свойствами, аналогичными свойствам степенных рядов. Основные из этих свойств изложены в известной монографии Владимира Бернштейна [1], в книжке С. Мандельбройта [2] и в работах других авторов.

В частности, хорошо известно, что если ряд (2) сходится в некоторой точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то он сходится также во всей полуплоскости $\sigma = \mathrm{Re}\, s > \sigma_0$.

В связи с этим представляет интерес вопрос о том, каковы функции, представимые рядом Дирихле по данной последовательности $\{\mu_n\}$, сходящимся в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$.

В специальном случае, когда $\mu_n = n$ $(n \geqslant 0)$, заменой переменного $e^{-s} = z$ ряд Дирихле (2) переходит в обыкновенный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Как хорошо известно, для представимости функции $f(x)$, определенной на интервале $[0, \Delta)$, степенным рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

сходящимся на $[0, \Delta)$, необхидимо и достаточно, чтобы она была бесконечно-дифференцируемой на $[0, \Delta)$ и чтобы выполнялись неравенства

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M\Delta^{-n} n! \ (n=0, 1, 2, \ldots),$$

где M — постоянная, не зависящая от n.

Поэтому, возвращаясь к переменной s, можем утверждать, что если функция $F(\sigma)$ определена на полуоси $(\sigma_0, +\infty)$, то для справедливости разложения

$$F(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}, \quad (\sigma_0<\sigma<+\infty) \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$|L^{(n)}F(\sigma)| \leqslant M e^{-\sigma_0 n} n! \quad (\sigma_0<\sigma<+\infty) \tag{5}$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots),$$

где операторы $L^{(n)}F(\sigma)$, $(n=0, 1, 2 \cdots)$ последовательно определяются таким образом

$$|L^{(0)}F(\sigma)|=F(\sigma), \qquad L^{(1)}F(\sigma)=-e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}F(\sigma)$$

и вообще

$$L^{(n)}F(\sigma)=-e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}L^{(n-1)}F(\sigma) \tag{6}$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots).$$

В настоящей работе приводится определение операции обобщенного дифференцирования, ассоциированного с данной последовательностью $\{\mu_n\}$.

Это определение основано на применении понятия дробного интеграла Лиувилля и порождает формулу типа Маклорена для системы функций $\{x^{\mu_n}\}$, имеющую в новых обозначениях вид классической формулы с интегральным остаточным членом.

С другой стороны, эти операции позволяют в обозримых формах решить проблему о разложимости функций в ряд вида (3) или в ряд Дирихле по данной последовательности функций $\{e^{-\mu_n s}\}_{(n\geq 0)}$.

§ 1. Обобщенные производные, аналог формулы Маклорена. Достаточное условие разложимости функций в обобщенный ряд Маклорена

1°. Если функция $f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, как известно, дробным интегралом порядка $\alpha>0$ с началом в точке a от функции $f(x)$ называется интеграл

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(x-a)^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{1.1}$$

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Дробным интегралом порядка α с концом в точке b называют выражение

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(b-x)^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \tag{1.2}$$

при этом в обоих случаях, как легко видеть, интегралом нулевого порядка естественно называть самую функцию $f(x)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то, как легко убедиться, справедлива следующая формула обобщенного интегрирования по частям [3]

$$\int_a^b f(x) \frac{d^{-\alpha} g(x)}{d(x-a)^{-\alpha}} dx = \int_a^b g(x) \frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(b-x)^{-\alpha}} dx. \tag{1.3}$$

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность неотрицательных чисел $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющих условиям:

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leqslant 1, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.4}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \mu_k = +\infty.$$

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0, \Delta)$.

Обозначая

$$\alpha_k = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1}), \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{1.5}$$

введем в рассмотрение функции

$$D^{(\mu_0)} f(x) = f(x)$$

$$D^{(\mu_1)} f(x) = \frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} \frac{d}{dx} D^{(\mu_0)} f(x) \tag{1.6}$$

$$D^{(\mu_k)} f(x) = \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} \frac{d}{dx} D^{(\mu_{k-1})} f(x).$$

Назовем функцию $D^{(\mu_k)} f(x)$ k-ой обобщенной производной от $f(x)$, ассоциированной с последовательностью $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$. Очевидно, что в частном случае, когда $\mu_n = n$, $(n = 0, 1, \cdots, N)$, будем иметь

$$D^{(\mu_n)} f(x) = f^{(n)}(x), \ (n = 0, 1, \cdots, N). \tag{1.7}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, \Delta)$ и удовлетворяет условиям:

а) Обобщенные производные

$$D^{(\mu_k)}f(x), \quad (k=0, 1, \cdots, n+1)$$

существуют и непрерывны на $[0, \Delta)$;

б) функции

$$\frac{d}{dx}D^{(\mu_k)}f(x), \quad (k=0, 1, \cdots, n)$$

непрерывны на $(0, \Delta)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \Delta)$.

Если $x \in [0, \Delta)$, то справедлива формула

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^{(\mu_k)}f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)}x^{\mu_k}+\frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})}\int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1}D^{(\mu_{n+1})}f(t)\,dt. \tag{1.8}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $x>0$ фиксировано и $0\leqslant t\leqslant x$, то интеграл порядка $\alpha>0$ от функции $(x-t)^{\mu-1}$, $(\mu>0)$ с концом в точке x легко вычисляется

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(x-\tilde{t})^{-\alpha}}\{(x-t)^{\mu-1}\}=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)}(x-t)^{\mu+\alpha-1}; \quad t\in[0, x]. \tag{1.9}$$

Имея в виду формулу интегрирования по частям (1.3), формулы (1.6) для обобщенных производных, а также (1.9) и (1.5), последовательно получим:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})}\int_0^x (x-t)^{\mu_{k+1}-1}D^{(\mu_{k+1})}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})}\int_0^x \frac{d^{-\alpha_{k+1}}}{d(x-\tilde{t})^{-\alpha_{k+1}}}\left\{(x-t)^{\mu_{k+1}-1}\right\}\frac{d}{dt}D^{(\mu_k)}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\mu_k)}\int_0^x (x-t)^{\mu_k}\frac{d}{dt}D^{(\mu_k)}f(t)\,dt=$$

$$=-\frac{D^{(\mu_k)}f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)}x^{\mu_k}+\frac{1}{\Gamma(\mu_k)}\int_0^x (x-t)^{\mu_k-1}D^{(\mu_k)}f(t)\,dt.$$

Таким образом, имеем тождества

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_k)}\int_0^x (x-t)^{\mu_k-1}D^{(\mu_k)}f(t)\,dt=$$

$$= \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} x^{\mu_k} + \frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{k+1}-1} D^{(\mu_{k+1})} f(t)\, dt. \tag{1.10}$$

$$(k = n, n-1, \cdots, 1),$$

сложением которых получим:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x (x-t)^{\mu_1-1} D^{(\mu_1)} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} x^{\mu_k} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1} D^{(\mu_{n+1})} f(t)\, dt. \tag{1.11}$$

Наконец, отметив, что $\alpha_1 = 1 - \mu_1$, имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x (x-t)^{\mu_1-1} D^{(\mu_1)} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x \frac{d^{-\alpha_1}}{d(x-\tilde{t})^{-\alpha_1}} \left\{(x-t)^{\mu_1-1}\right\} f'(t)\, dt^* =$$

$$= \int_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0) = f(x) - D^{(\mu_0)} f(0), \tag{1.12}$$

откуда и из (1.11) следует формула (1.8).

По форме формула (1.8) напоминает классическую формулу Маклорена с интегральным остаточным членом и, как легко видеть, в частном случае, когда $\mu_k = k$, $(k = 0, 1, \cdots, n+1)$, мы оттуда получим указанную формулу.

Отметим, что в работе Г. В. Бадаляна [4] при помощи существенно иных операций обобщенного дифференцирования дано другое обобщение формулы Тейлора для системы функций $\{x^{\lambda_n}\}$. Эта формула в специальном сингулярном случае, не рассмотренном однако в указанной работе, в силу единственности разложения эквивалента** формуле (1.8).

Но одновременно следует особо отметить, что как по смыслу вводимых нами в данной работе операций, так и по объему тех классов функций, для которых она применима, формула (1.8) существенно отличается от указанного выше сингулярного случая формулы работы [4].

2°. Будем говорить, что *функция $f(x)$, определенная на* $[0, \Delta)$, *бесконечно дифференцируема по последовательности* $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$,

---

* Символ $\dfrac{d^{-\alpha_1}}{d(x-\bar{t})^{-\alpha_1}}$, означает, что интегрирование производится по переменной t.

** Это обстоятельство было замечено затем самим Г. В. Бадаляном.

удовлетворяющей условиям (1.4), и, ради краткости, напишем $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta))$, *если*

а) существуют и непрерывны на $[0, \Delta)$ обобщенные производные

$$D^{(\mu_k)} f(x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

б) функции

$$\frac{d}{dx} D^{(\mu_k)} f(x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

непрерывны на $(0, \Delta)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \Delta)$.

Предположим теперь, что $f(x) \in I(\mu_n, [0, \Delta))$, тогда при любом $n \geqslant 1$ и $x \in [0, \Delta)$ будем иметь формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} x^{\mu_k} + R_n(f; x), \tag{1.13}$$

где

$$R_n(f; x) = \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1} D^{(\mu_{n+1})} f(t)\, dt. \tag{1.14}$$

Из класса функций $I(\mu_n; [0, \Delta))$ выделим теперь подкласс $I^*(\mu_n, [0, \Delta))$ тех функций $f(x)$, для которых

$$\lim_{n \to \infty} R_n(f; x) = 0 \tag{1.15}$$

притом равномерно на любом отрезке $[0, \delta]$, $(\delta < \Delta)$.

Таким образом, если $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \Delta))$, то справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(\mu_k + 1)} x^{\mu_k} \tag{1.16}$$

равномерно сходящееся на любом отрезке $[0, \delta]$, $(\delta < \Delta)$.

Заметив, что после замены переменой $x = e^{-s}$ ряд (1.16) переходит в ряд Дирихле, сходящийся на полуоси $\sigma = \mathrm{Re}\, s > \sigma_0 = \log \frac{1}{\Delta}$, легко приходим к выводу, что функции класса $I^*(\mu_n; [0; \Delta))$ аналитически продолжаются на всю риманову поверхность $-\infty < \arg z < +\infty$, $(0 \leqslant |z| < \Delta)$ и поэтому разложение (1.16) сохранит силу на этой поверхности.

Из обобщенной формулы Маклорена (1.13)—(1.14) следует:

Теорема 1. Пусть $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta))$, *если, кроме того, справедливы оценки*

$$\sup_{[0, \Delta)} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leqslant M \Delta^{-\mu_k} \Gamma(1+\mu_k) \tag{1.17}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots),$$

где M — постоянная, не зависящая от x и k, то $f(x) \in I^*$ $(\mu_n; [0, \Delta))$; иначе говоря, функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} x^{\mu_k} \tag{1.18}$$

равномерно сходящийся на любом отрезке $[0, \delta) \subset [0, \Delta)$.

Доказательство. Из (1.14) и (1.17) получим оценку

$$|R_n(f; x)| \leqslant M\left(\frac{x}{\Delta}\right)^{\mu_{n+1}}, \quad x \in [0, \Delta)$$

откуда и из (1.13) следует утверждение теоремы.

Таким образом, условия (1.17) достаточны для того, чтобы функция $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta))$ представлялась равномерно сходящимся на $[0, \delta] \subset [0, \Delta)$ рядом (1.18).

В следующем параграфе будет показано, что, если кроме условий (1.4), на последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ наложить дополнительное ограничение, то условия (1.17) будут также и необходимы.

§ 2. Необходимое условие разложимости функции в обобщенный ряд Маклорена

В настоящем параграфе, сохранив условие

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leqslant 1, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty, \tag{2.1}$$

наложим на последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ дополнительное ограничение

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\mu_k} < l < +\infty \tag{2.2}$$

и докажем теорему, являющуюся обращением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).*

Если имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k} \tag{2.3}$$

сходящееся на $[0, \Delta)$, то для любого $\delta_0 < \Delta e^{-l}$ справедливы утверждения

а) $$f(x) \in I(\mu_n; [0, \delta_0]),$$

б) $$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \delta_0} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leqslant A \cdot B^{\mu_k} \Gamma(1+\mu_k)$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots),$$

где A и B — постоянные, не зависящие от k, *в) коэффициенты разложение (2.3) определяются из формул*

$$a_k = \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} \qquad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

Иначе говоря, в условиях теоремы $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \delta_0])$ и ряд (2.3) является обобщенным рядом Маклорена своей суммы.

Доказательство. После замены переменной $x = e^{-s}$ ряд (2.3) переходит в ряд Дирихле, сходящийся на полуоси $(\sigma_0, +\infty)$, где $\sigma_0 = \log\frac{1}{\Delta}\cdot$ Поэтому ряд (2.3) равномерно сходится на любом отрезке вида $[0, \Delta_1]$, $\Delta_1 < \Delta$ и, следовательно, функция

$$f(x) \equiv D^{(\mu_0)} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

непрерывна на $[0, \Delta)$.

Рассмотрим ряды

$$S_p(x) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(1+\mu_k-\mu_p)} x^{\mu_k-\mu_p} \tag{2.4}$$

$$(p=0, 1, 2, \cdots)$$

и докажем, что все они абсолютно и равномерно сходятся, а также установим оценки для их сумм $S_p(x)$, $(p=0, 1, 2, \cdots)$ на отрезках вида $[0, \delta_0]$, где $\delta_0 < \Delta e^{-l}$.

Из формулы Стирлинга

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\theta_x}{12x}}; \qquad x>0, \quad 0<\theta_x<1$$

и из элементарного неравенства

$$1 - x^{-1} > \exp\left\{-\frac{1}{x-1}\right\}, \qquad x>1$$

получим оценку

$$\frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(1+\mu_k-\mu_p)} < e(1+\mu_k)^{\mu_p}, \qquad k \geqslant p \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Выберем $\Delta_0 < \Delta$ и $l_0 > l$ так, чтобы было

$$\delta_0 < \Delta_0 e^{-l_0}. \tag{2.6}$$

Так как ряд (2.3) сходится при $x = \Delta_0$, то

$$|a_k \Delta_0^{\mu_k}| \leqslant M_0 \qquad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{2.7}$$

где M_0 не зависит от k.

Из (2.5), (2.6) и (2.7) получим:

$$\sup_{0<x<\delta_1} |S_p(x)| \leqslant e^{1+l} M_0 \delta_0^{-\mu_p} \sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu_p},\ p \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Пусть число l_1 выбрано так, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{\log k}{\mu_k} < l_1 < l, \tag{2.2}$$

тогда

$$\mu_k \geqslant \frac{1}{l_1} \log k \qquad \text{при} \qquad k \geqslant N_0. \tag{2.9}$$

Далее, заметим, что функция $x^{\mu_p} e^{-l_0 x}$, $x > 0$ монотонно убывает при $x \geqslant \frac{\mu_p}{l_0}$, поэтому из (2.9) будем иметь оценку

$$e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu_p} \leqslant l_1^{-\mu_p} \frac{(\log k)^{\mu_p}}{k^s} \qquad \text{при} \quad k \geqslant N_p, \tag{2.10}$$

где $s = \frac{l_0}{l_1} > \frac{l}{l_1} > 1$.

Из (2.8) и (2.10) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов (2.4) на отрезке $[0, \delta_0]$.

Обозначим через $\rho_\mu(x)$ число членов последовательности $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 1)$, лежащих на отрезке $[0, x]$, тогда сумму ряда, стоящего в правой части неравенства (2.8), можно оценить, написав ее в виде интеграла Стильтьеса.

Действительно, из условия (2.2) следует, что

$$\rho_\mu(x) < N_1 + e^{lx}, \quad x \geqslant 0 \tag{2.11}$$

где N_1 постоянная, не зависящая от x, поэтому последовательно получим

$$\sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu_p} < \int_0^{\infty} e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu_p} d\rho_\mu(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} \rho_\mu(x) \left\{ e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu_p} \right\}' dx + C_0 <$$

$$< \mu_p \int_0^{\infty} \rho_\mu(x) e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu_p - 1} dx +$$

$$+ l_0 \int_0^{x} \rho_\mu(x) e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu_p} dx + C_0 \tag{2.12}$$

$$(p \geqslant 0)$$

где C_0 от p не зависит.

Наконец, имея в виду (2.11), отсюда легко приходим к оценке

$$\sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)}(1+\mu_k)^{\mu_p} < A_1 B_1^{\mu_p}\Gamma(1+\mu_p), \quad (p=0,1,2,\cdots) \tag{2.13}$$

где A_1 и B_1 подходящим образом выбранные постоянные, не зависящие от p.

Таким образом

$$\sup_{0<x<\delta_0} |S_p(x)| < AB^{\mu_p}\Gamma(1+\mu_p) \qquad p=0,1,2,\cdots \tag{2.14}$$

где A и B — другие постоянные, не зависящие от p.

Теперь рассмотрим ряды вида .

$$S_p^*(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k-\mu_p)} x^{\mu_k-\mu_p} \qquad (p=0,1,2,\cdots). \tag{2.15}$$

Из (2.5) следует оценка

$$\frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k-\mu_p)} < e(1+\mu_k)^{\mu_p+1} \qquad k > p+1 > 1$$

откуда вполне аналогично, как и выше, получим

$$\sup_{0<x<\delta_0} |S_p^*(x)| \leqslant e^{1+l}M_0\delta^{-\mu_p}\sum_{k=p+1}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)}(1+\mu_k)^{\mu_p+1}, \qquad p \geqslant 0$$

а в силу (2.10) убедимся отсюда, что ряды (2.15) абсолютно и равномерно сходятся на $[0, \delta_0]$.

Поэтому функции

$$\frac{dS_p(x)}{dx} = x^{-1}S_p^*(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k\Gamma(1+\mu_k)x^{\mu_k-\mu_p-1}}{\Gamma(\mu_k-\mu_p)} \tag{2.16}$$

непрерывны на $(0, \delta_0]$; кроме того, так как при $k \geqslant k_0$ $\mu_k-\mu_p \geqslant 1$, то ряд (2.16) допускает почленное применение операции $\dfrac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}}$, где $\alpha_{p+1} = 1-\mu_{p+1}+\mu_p$.

Таким образом получим:

$$\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}}\frac{d}{dx}S_p(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k-\mu_p)} \frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}}\left\{x^{\mu_k-\mu_p-1}\right\},$$

но, как легко видеть,

$$\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}}\left\{x^{\mu_k-\mu_p-1}\right\} = \frac{\Gamma(\mu_k-\mu_p)}{\Gamma(\mu_k-\mu_p+\alpha_{p+1})} x^{\mu_k-\mu_p-1+\alpha_{p+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu_k - \mu_p)}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_{p+1})} x^{\mu_k - \mu_{p+1}}$$

поэтому

$$\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}} \frac{d}{dx} S_p(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(1+\mu_k-\mu_{p+1})} x^{\mu_k-\mu_{p+1}} \equiv S_{p+1}(x). \qquad (2.17)$$

Но, очевидно,

$$S_0(x) \equiv D^{(\mu_0)} f(x) \equiv f(x)$$

поэтому последовательным применением формулы (2.17) получим

$$S_p(x) \equiv D^{(\mu_p)} f(x) \qquad (2.18)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx} D^{(\mu_p)} f(x) = x^{-1} S_p^*(x). \qquad (2.18')$$

Из формул (2.18) и (2.18′) и из свойств функций $S_p(x)$ и $S_p^*(x)$ и, в частности, из оценок (2.14) следуют утверждения а) и б) теоремы.

Наконец, из (2.4) и (2.18) получим

$$a_p = \frac{D^{(\mu_p)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_p)}, \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (2.19)$$

и, таким образом, теорема полностью доказана.

Ради компактности объединим теоремы 1 и 2.

Теорема 3. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ *удовлетворяет условиям (1.4), тогда*

а) если $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta))$ *и кроме того*

$$\sup_{[0, \Delta)} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leqslant M \Delta^{-\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

то $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \Delta))$, *т. е. имеет место разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(\mu_k + 1)} x^{\mu_k}$$

равномерно сходящееся на любом отрезке $[0, \delta] \subset [0, \Delta)$;

б) если последовательность $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет дополнительному условию (2.2) и имеет место разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

сходящееся на $[0, \Delta)$, *то для любого* $\delta_0 < \Delta e^{-l}$

$$\sup_{[0, \delta_0]} | D^{(\mu_k)} f(x) | \leqslant AB^{\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

где A *и* B *не зависят от* k.

Коэффициенты $\{a_k\}$ *разложения определяются из формул*

$$a_k = \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

§ 3. Обобщение предыдущих результатов

1°. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ удовлетворяет условиям

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leqslant N, \quad (N > 1), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{k \to \infty} \mu_k = + \infty. \tag{3.1}$$

Обозначив

$$\nu_k = \frac{\mu_k}{N} \tag{3.2}$$

получим последовательность $\{\nu_n\}$, $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющую условиям (1.4). Кроме того, условия

$$\lim_{k \to \infty} \sup \frac{\log k}{\mu_k} < l, \qquad \lim_{k \to \infty} \sup \frac{\log k}{\nu_k} < Nl \tag{3.3}$$

следуют один из другого.

Заметим далее, что если определенная на $[0, \Delta)$ функция $f(x)$ разлагается в ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}, \qquad x \in [0, \Delta)$$

то функция $F(x) = f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$ разложится в ряд вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\nu_k}, \qquad x \in [0, \Delta^N)$$

и наоборот. Из теоремы 3 получим:

Т е о р е м а 4. *Пусть последовательность* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условиям (3.1), тогда*

а) если

$$f\left(x^{\frac{1}{N}}\right) \in I\left(\frac{\mu_n}{N}; \ [0, \Delta^N)\right)$$

и

$$\sup_{[0,\Delta^N)}\left|D^{(\nu_k)}f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)\right| \leqslant M\Delta^{-\mu_k}\Gamma\left(\frac{\mu_k}{N}+1\right) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

то имеет место разложение

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[D^{(\nu_k)}f\left(u^{\frac{1}{N}}\right)\right]_{u=0}}{\Gamma\left(1+\frac{\mu_k}{N}\right)}x^{\mu_k}$$

равномерно сходящееся при $x\in[0,\delta]\subset[0,\Delta)$.

б) Если последовательность $\{\mu_k\}$ *удовлетворяет условию (3.3) и справедливо разложение*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{\mu_k}, \quad x\in[0,\Delta)$$

то для любого $\delta_0<\Delta^N e^{-Nl}$ *будем иметь*

1) $$f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)\in J(\nu_n;\ [0,\Delta^N))$$

2) $$\sup_{[0,\delta_0]}\left|D^{(\nu_k)}f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)\right| < A\cdot B^{\mu_k}\Gamma\left(1+\frac{\mu_k}{N}\right) \quad (k=0,1,\cdots)$$

3) $$a_k=\frac{\left[D^{(\nu_k)}f\left(u^{\frac{1}{N}}\right)\right]_{u=0}}{\Gamma\left(1+\frac{\mu_k}{N}\right)}, \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

2°. Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{\mu_n\}$ $(n\geqslant 0)$ удовлетворяет условию

$$\mu_0\geqslant 0,\quad 0<\mu_{k+1}-\mu_k,\quad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=+\infty \tag{3.4}$$

в частности, условие (3.1) может не выполняться.

Дополним эту последовательность каким-либо способом до последовательности $\{\mu_n^*\}$, $(n\geqslant 0)$ так, чтобы выполнялись условия (1.4), т. е.

$$\mu_0^*=0,\quad 0<\mu_{k+1}^*-\mu_k^*\leqslant 1,\quad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$\lim_{k\to\infty}\mu_k^*=+\infty. \tag{3.5}$$

Этого можно достигнуть, например, добавлением только целых чисел.

Покажем, что если

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\mu_k} \leqslant l < +\infty, \tag{3.6}$$

то всегда существует такая пополненная последовательность $\{\mu_n^*\}$, $(n \geqslant 0)$, что вместе с (3.5) выполняется также условие

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} \leqslant l^* < +\infty. \tag{3.7}$$

Пусть $\{\nu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\nu_0 = 0, \quad 0 < \nu_{k+1} - \nu_k \leqslant 1, \quad \lim_{k\to\infty} \nu_k = +\infty$$

и

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\nu_k} \leqslant l_1 < +\infty. \tag{3.8}$$

Пополним теперь $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ всеми теми числами из $\{\nu_n\}$, $(n \geqslant 0)$, которые отличны от чисел μ_n, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Нумеруя полученную таким образом последовательность чисел в порядке возрастания, получим некоторую последовательность $\{\mu_n^*\}$, $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющую условию (3.5).

Убедимся, что $\{\mu_n^*\}$, $(n \geqslant 0)$ удовлетворяет также условию (3.7), где $l^* = \max\,(l, l_1)$. Действительно, пусть $\rho_\mu(x)$, $\rho_\nu(x)$ и $\rho_{\mu^*}(x)$ суть соответственно числовые функции последовательностей $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ и $\{\mu_n^*\}$. Очевидно,

$$\rho_{\mu^*}(x) \leqslant \rho_\mu(x) + \rho_\nu(x), \quad x \geqslant 0$$

поэтому из (3.6) и (3.8) для $x \geqslant 0$

$$\rho_{\mu^*}(x) < Ae^{l^* x} \quad l^* = \max\,\{l, l_1\} \tag{3.9}$$

где A — не зависит от x. Наконец, из (3.9) получим:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log \rho_{\mu^*}(x)}{x} \leqslant l^*.$$

Теорема 5. *Пусть последовательность* $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ *удовлетворяет условию (3.4).*

а) Пусть функция $f(x)$ *определена на* $[0, \Delta)$ *и существует такое пополнение последовательности* $\{\mu_n\}$ *до последовательности* $\{\mu_n^*\}$, *удовлетворяющей условиям (3.5), что*

1) $$f(x) \in I\,(\mu_n^*;\ \ [0, \Delta))$$

2) $$\sup_{[0,\Delta)} |D^{\{\mu_k\}} f(x)| \leqslant M\Delta^{-\mu_k}\Gamma(1+\mu_k), \quad k = 0, 1, \cdots$$

3) $$D^{(\mu_k^*)} f(0) = 0, \quad \text{если} \quad \mu_k^* \overline{\in} \{\mu_k\}$$

тогда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)} x^{\mu_k}$$

равномерно сходящееся на каждом отрезке $[0, \delta] \subset [0, \Delta)$.

б) Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ *удовлетворяет условиям (3.4), (3.6) и имеет место разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

сходящееся на $[0, \Delta)$.

При любом пополнении последовательности $\{\mu_n\}$ *до последовательности* $\{\mu_n^*\}$, *удовлетворяющей условиям (3.5), (3.7), и для любого* $\delta_0 < \Delta e^{-\Gamma}$ *справедливы утверждения*

1) $$f(x) \in I(\mu_n^*; [0, \delta_0]);$$

2) $$\sup_{[0, \delta_0]} |D^{(\mu_k^*)} f(x)| < AB^{\mu_k^*} \Gamma(1+\mu_k^*) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots);$$

где A, B *от* k *не зависят;*

3) $$a_k = \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1+\mu_k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

где $D^{(\mu_k)} f(x) = D^{(\mu^*_{n_k})} f(x)$, *если* $\mu_k = \mu^*_{n_k}$.

Доказательство. а) Так как по условию $D^{(\mu_k^*)} f(0) = 0$, если $\mu_k^* \overline{\in} \{\mu_n\}$, то в обобщенной формуле Тейлора (1.8) соответствующие члены, содержащие степени $x^{\mu_k^*}$, $\mu_k^* \overline{\in} \{\mu_n\}$, исчезают. Поэтому остаточный член в этой формуле всегда можно написать так, чтобы под интегралом фигурировала $D^{\{\mu_n\}} f(x)$.

Из сказанного и из 2) следует наше утверждение.

б) Если $\{\mu_n^*\}$ — любое пополнение последовательности $\{\mu_n\}$, удовлетворяющее условиям (3.5), (3.7), то можем написать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^{\mu_k^*} \qquad x \in [0, \Delta)$$

где $a_k^* = a_p$, если $\mu_k^* = \mu_p$ и $a_k^* = 0$, если $\mu_k^* \overline{\in} \{\mu_n\}$.

Но тогда по теореме 2 все три утверждения будут справедливы.

§ 4. Перенесение полученных результатов на ряды Дирихле

Для функции $F(\sigma)$, определенной и непрерывной на полуоси $(\sigma_0, +\infty)$, и для любого $\alpha > 0$ определим оператор

$$\frac{d_e^{-\alpha} F(\sigma)}{d_e \sigma^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\sigma^\infty (e^{-\sigma} - e^{-u})^{\alpha-1} e^{-u} F(u)\, du \tag{4.1}$$

называя его e дробным интегралом от функции $F(\sigma)$ порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $+\infty$.

Легко видеть, что

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{d_e^{-\alpha} F(\sigma)}{d_e \sigma^{-\alpha}} = F(\sigma)$$

поэтому естественно интегралом нулевого порядка считать саму функцию $F(\sigma)$.

Пусть последовательность чисел $\{\mu_n\}$, $(n \geqslant 0)$ удовлетворяет условию (1.4); обозначая $\alpha_k = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1})$, $(k \geqslant 1)$, введем в рассмотрение функции

$$L^{(\mu_0)} F(\sigma) \equiv F(\sigma)$$

$$L^{(\mu_1)} F(\sigma) \equiv - \frac{d_e^{-\alpha_1}}{d_e \sigma^{-\alpha_1}} \left\{ e^{\sigma} \frac{d}{d\sigma} L^{(\mu_0)} F(\sigma) \right\}$$

$$\tag{4.2}$$

$$L^{(\mu_k)} F(\sigma) \equiv - \frac{d_e^{-\alpha_k}}{d_e \sigma^{-\alpha_k}} \left\{ e^{\sigma} \frac{d}{d\sigma} L^{(\mu_{k-1})} F(\sigma) \right\}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

предполагая, что они существуют и непрерывны на полуоси $(\sigma_0, +\infty)$.

Заметим теперь, что после замены переменной $x = e^{-\sigma}$ переводящей полуось $(\sigma_0, +\infty)$ в отрезок $[0, \Delta)$, $\Delta = e^{-\sigma_0}$, если обозначим $f(x) = F\left(\log \frac{1}{x}\right)$, то получим:

$$\frac{d_e^{-\alpha}}{d_e \sigma^{-\alpha}} F(\sigma) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x), \quad x = e^{-\sigma} \tag{4.3}$$

и поэтому

$$L^{(\mu_k)} F(\sigma) = D^{(\mu_k)} f(x), \quad x = e^{-\sigma} \tag{4.4}$$

$$(k = 0, 1, 2 \cdots).$$

Условимся говорить, что функция $L^{(\mu_k)} F(\sigma)$ непрерывна на $(\sigma_0, +\infty]$, если

1) она непрерывна на интервале $(\sigma_0, +\infty)$;

2) существует и конечен предел

$$L^{(\mu_k)}F(+\infty)=\lim_{\sigma\to+\infty}L^{(\mu_k)}F(\sigma).$$

Имея в виду формулы (4.3), (4.4), простой перефразировкой леммы 1 получим:

Лемма 1 bis. Пусть функция $F(\sigma)$ определена и непрерывна на $(\sigma_0, +\infty]$ и удовлетворяет условиям:

а) Функции

$$L^{(\mu_k)}F(\sigma)\quad (k=0, 1, 2, \cdots, n+1)$$

существуют и непрерывна на $(\sigma_0, +\infty]$.

б) Функции

$$e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}L^{(\mu_k)}F(\sigma),\ (k=0, 1, 2, \cdots, n)$$

непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(\sigma_0, +\infty)$.

Если $\sigma\in(\sigma_0, +\infty]$, то справедлива формула

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}e^{-\mu_k\sigma}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})}\int_{\sigma}^{+\infty}(e^{-\sigma}-e^{-u})^{\mu_{n+1}-1}e^{-u}L^{(\mu_{n+1})}F(u)\,du. \tag{4.5}$$

Будем говорить, что $F(\sigma)\in L(\mu_n; \sigma_0)$, если существуют и непрерывны на $(\sigma_0, +\infty]$ все функции

$$L^{(\mu_k)}F(\sigma),\quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

а функции

$$e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}L^{(\mu_k)}F(\sigma),\quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(\sigma_0, +\infty)$.

Если $F(\sigma)\in L(\mu_n; \sigma_0)$, тогда при любом $n\geqslant 1$ и $\sigma\in(\sigma_0, +\infty)$ по формуле (4.5) будем иметь

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}e^{-\mu_k\sigma}+R_n(F;\sigma) \tag{4.6}$$

где

$$R_n(F;\sigma)=\frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})}\int_{\sigma}^{\infty}(e^{-\sigma}-e^{-u})^{\mu_{n+1}-1}e^{-u}L^{(\mu_{n+1})}F(u)du. \tag{4.7}$$

Из класса $L(\mu_n; \sigma_0)$ выделим подкласс $L^*(\mu_n; \sigma_0)$ тех функций $F(\sigma)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} R_n(F; \sigma) = 0$$

притом равномерно на любом отрезке вида $[\sigma_1, +\infty] \subset (\sigma_0, +\infty]$. Следовательно, если $F(\sigma) \in L^*(\mu_n; \sigma_0)$, то справедливо разложение

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)} e^{-\mu_k \sigma} \tag{4.8}$$

равномерно сходящееся на любой полуоси $[\sigma_1, +\infty) \subset (\sigma_0, +\infty]$.

Очевидно, что если $F(\sigma) \in L^*(\mu_n; \sigma_0)$, то она аналитически продолжается на всю полуплоскость $\sigma = Re\, s > \sigma_0$, $(s = \sigma + it)$ и разложение (4.8) сохранит силу в той же полуплоскости.

Из теоремы 3 простой заменой следует

Теорема 6. *Пусть последовательность $\{\mu_k\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условиям*

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leq 1, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty \tag{4.9}$$

а) если $F(\sigma) \in L(\mu_n; \sigma_0)$, и кроме того

$$\sup_{[\sigma_0, +\infty]} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| \leq M e^{-\sigma_0 \mu_k} \Gamma(1+\mu_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

то $F(\sigma) \in L^*(\mu_n; \sigma_0)$, т. е. имеет место разложение

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)} e^{-\mu_k \sigma}, \quad \sigma \in [\sigma_1, +\infty]$$

б) если кроме (4.9) последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет также условию

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{\log k}{\mu_k} = l < +\infty \tag{4.10}$$

и имеет место разложение

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\mu_k \sigma}$$

сходящееся на $[\sigma_0, +\infty]$, то если $\sigma_1 = \sigma_0 + l$ $F(\sigma) \in L(\mu_n; \sigma_1)$, кроме того

$$\sup_{[\sigma_1, +\infty]} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| \leq A B^{\mu_k} \Gamma(1+\mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

и

$$a_k = \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

Оставляя теорему 4, приводим перефразировку теоремы 5 на ряды Дирихле.

Теорема 7. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ *удовлетворяет условию*

$$\mu_0 \geq 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.11}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty.$$

а) Пусть $F(\sigma)$ *определена на* $(\sigma_0, +\infty)$ *и существует такое пополнение* $\{\mu_n\}$ *до последовательности* $\{\mu_n^*\}$, *удовлетворяющей условиям (4.9), что*

1) $$F(\sigma) \in L(\mu_n^*; \sigma_0)$$

2) $$\sup_{(\sigma_0, +\infty)} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| \leq M e^{-\sigma_0 \mu_k} \Gamma(1 + \mu_k)) \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

3) $$L^{(\mu_k^*)} F(+\infty) = 0, \quad \textit{если} \quad \mu_k^* \overline{\in} \{\mu_n\}$$

тогда справедливо разложение

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k)} e^{-\mu_k \sigma} \tag{4.12}$$

равномерно сходящееся на каждом $[\sigma_1, +\infty] \subset (\sigma_0, +\infty]$.

При этом функция $F(\sigma)$ *аналитически продолжима на полуплоскость* $\sigma = Res > \sigma_0$, $(s = \sigma + it)$, *и разложение (4.12) сохранит силу во всей полуплоскости* $Res > \sigma_0$.

б) Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям (4.11) и (4.10) и имеет место разложение:*

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\mu_k \sigma}$$

сходящееся на $[\sigma_0, +\infty]$.

При любом пополнении последовательности $\{\mu_n\}$ *до последовательности* $\{\mu_n^*\}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\mu_0^* = 0, \quad 0 < \mu_{k+1}^* - \mu_k^* \leq 1, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty$$

и

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} < l^* < +\infty$$

для $\sigma^* = \sigma_0 + l$ *справедливы утверждения*

1) $F(\sigma)\in L(\mu_n^*;\ \sigma^*)$

2) $$\sup_{[\sigma^*,\,+\infty]}\left|L^{(\mu_k)}F(\sigma)\right|\leqslant AB^{\mu_k}\Gamma(1+\mu_k)$$
$$(k=0,1,2,\cdots)$$

3) $$a_k=\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)},\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

где $L^{(\mu_k)}F(\sigma)=L^{(\mu^*_{n_k})}F(\sigma)$, *если* $\mu_k=\mu^*_{n_k}$.

Институт математики и механики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступило 29 III 1978

Մ. Մ. Ջրբաշյան, Հ. Բ. Ներսեսյան

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՒ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում բերված են բավարար և անհրաժեշտ պայմաններ, որոնց դեպքում $(\sigma_0, +\infty)$ *կիսաառանցքի վրա սահմանված ֆունկցիան կարող է վերածվել Դիրիխլեի շարքի ըստ* $\{e^{-\mu_n\sigma}\}$ *ֆունկցիաների։*

Դիցուք $F(\sigma)$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $(\sigma_0, +\infty)$ *կիսաառանցքի վրա և* $\alpha>0$։

Սահմանենք հետևյալ օպերատորը՝

$$\frac{d_e^{-\alpha}F(\sigma)}{d_e\sigma^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{+\infty}(e^{-\sigma}-e^{-u})^{\alpha-1}e^{-u}F(u)\,du\text{։}$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{d_e^{-\alpha}F(\sigma)}{d_e\sigma^{-\alpha}}=F(\sigma)\text{։}$$

Ենթադրենք, որ $\{\mu_n\}$ $(n\geqslant 0)$ *հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին*

$$\mu=0,\quad 0<\mu_{k+1}-\mu_k\leqslant 1,\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$
$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=+\infty\text{։}$$

Նշանակելով $\alpha=1-(\mu_k-\mu_{k-1})$, $(k\geqslant 0)$, *դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիաները՝*

$$L^{(\mu_0)}F(\sigma) \equiv F(\sigma)$$

$$L^{(\mu_1)}F(\sigma) \equiv -\frac{d_e^{-a_1}}{d_e\sigma^{-a_1}}\left\{e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}\,L^{(\mu_0)}F(\sigma)\right\}$$

$$L^{(\mu_k)}F(\sigma) \equiv -\frac{d_e^{-a_1}}{d_e\sigma^{-a_1}}\left\{e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}\,L^{(\mu_{k-1})}F(\sigma)\right\}, \tag{2}$$

ենթադրելով, որ նրանք գոյություն ունեն և անընդհատ են $(\sigma_0, +\infty)$ *կիսառանցքի վրա, իսկ* $e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}L^{(\mu_k)}F(\sigma)$ *ֆունկցիաները բացարձակ ինտեգրելի են* $(\sigma_0, +\infty)$ *վրա։ Եթե այս պայմանները բավարարված են, ապա կասենք, որ* $F(\sigma)\in L(\mu_n;\ \sigma_0)$*։*

Թեորեմ 1. Ենթադրենք, որ $\{\mu_n\}$ հաջորդականությունը բավարարում է (1) պայմաններին՝ ա) $F(\sigma)\in L(\mu_n, \sigma_0)$ և բացի դրանից

$$\sup_{(\sigma_0, +\infty)}|L^{(\mu_k)}F(\sigma)| \leqslant Me^{-\sigma_0\mu_k}\Gamma(1+\mu_k) \qquad (k=0, 1, 2, \cdots),$$

ապա տեղի ունի

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}e^{-\mu_k\sigma}\ ; \quad \sigma\in(\sigma_0, +\infty]$$

վերածումը, ընդ որում հավասարաչափ ամեն մի $[\sigma_1, +\infty]\subset(\sigma_0, +\infty]$ կիսառանցքի վրա

բ) եթե

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\log k}{\mu_k} < l < +\infty \tag{3}$$

և

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\mu_k\sigma}\quad \sigma\in(\sigma_0, +\infty],$$

ապա

$$F(\sigma)\in L(\mu_n;\ \sigma_1), \quad \sigma_1=\sigma_0+l,$$

բացի դրանից

$$\sup_{[\sigma_1, +\infty]}|L^{(\mu_k)}F(\sigma)| \leqslant AB^{\mu_k}\Gamma(1+\mu_k), \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

և

$$a_k=\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}, \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

Թեորեմ 2. Դիցուք $\{\mu_n\}$, $(n\geqslant 0)$ այնպիսին է, որ

$$\mu_0\geqslant 0, \quad 0<\mu_{k+1}-\mu_k, \quad (k=0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=+\infty.$$

ա) Երբ $F(\sigma)$ սահմանված է $(\sigma_0, +\infty)$ վրա և գոյություն ունի այնպիսի (1) պայմաններին բավարարող լրացված $\{\mu_n^*\}$ հաջորդականություն, որ

1) $F(\sigma) \in L\{\mu_n^*; \sigma_0\}$

2) $\sup\limits_{(\sigma_0, +\infty)} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| \leqslant M e^{-\sigma_0 \mu_k} \Gamma(1+\mu_k)$

3) $L^{(\mu_n^*)} F(+\infty) = 0$ երբ $\mu_k^* \,\overline{\in}\, \{\mu_n\}$

ապա տեղի ունի

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)} e^{-\mu_k \sigma}$$

վերածումը, ընդ որում հավասարաչափ ամեն մի $[\sigma_1, +\infty] \subset (\sigma_0, +\infty]$ կիսաառանցքի վրա

բ) Երբ $\{\mu_n\}$ հաջորդականությունը բավարարում է (3) և (4) պայմաններին և

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\mu_k \sigma}, \quad \sigma \in (\sigma_0, +\infty],$$

ապա, երբ $\{\mu_n^*\} \supset \{\mu_n\}$ այնպիսին է, որ բավարարվում են (1) և (3) պայմանները կունենանք

1) $F(\sigma) \in L(\mu_n^*; \sigma^*), \quad \sigma^* = \sigma_0 + l$

2) $\sup\limits_{[\sigma^*, +\infty]} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| < A B^{\mu_k} \Gamma(1+\mu_k)$

3) $a_k = \dfrac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

որտեղ

$$L^{(\mu_k)} F(\sigma) = L^{(\mu_{n_k}^*)} F(\sigma),$$

երբ

$$\mu_k = \mu_{n_k}^*, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots):$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vladimir Bernstein*, Leçons sur les Progres Rècents de la théorie des Series Dirichlet; Paris, (1933).
2. *Mandelbrojt S.* Dirichlet Series; The Rice Institute Pamphlet, vol. XXXI, № 4 (1944).
3. *Erdelyi A.* On some biorthogonal sets of functions. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, vol. XI, pp. 111—123 (1940).
4. *Бадалян Г. В.* Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази аналитических функций. Изв. АН Армянской ССР, т. VI, № 5 (1953).