

В. В. Соболев

К теории диффузии излучения

Как известно, многие задачи теории диффузии излучения сводятся к решению линейных интегральных уравнений. Обычно эти уравнения имеют ядра, зависящие от модуля разности двух аргументов. К подобным уравнениям приводят также некоторые другие задачи теоретической физики.

В настоящей статье интегральные уравнения с ядрами, зависящими от модуля разности двух аргументов, сначала рассматриваются в общем виде, а затем результаты применяются к отдельным задачам о диффузии излучения. Основой нашего рассмотрения являются новые уравнения для резольвенты. Полученные в этой статье результаты представляют собой обобщение результатов, полученных ранее в работах В. А. Амбарцумяна [1, 2] и автора [3, 4, 5].

Отметим, что интегральные уравнения указанного типа были раньше подробно изучены в работе В. А. Фок [6] путем использования преобразования Фурье. В. А. Фок получил точные решения уравнений при довольно общих предположениях относительно ядра и свободного члена. Ввиду важности этих уравнений для математической физики, их рассмотрение другим способом, по нашему мнению, также представляет интерес.

§ 1. Уравнение для резольвенты

Рассмотрим интегральное уравнение

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + g(\tau). \quad (1)$$

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$B(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau', \tau) g(\tau') d\tau', \quad (2)$$

где $\Gamma(\tau', \tau)$ — резольвента, удовлетворяющая, как известно, уравнению

$$\Gamma(\tau', \tau) = K(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \Gamma(\tau'', \tau') d\tau''. \quad (3)$$

Пользуясь уравнением (3), мы можем получить новое уравнение для резольвенты.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\Gamma(\tau', \tau) = K(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\tau} K(x) \Gamma(\tau - x, \tau') dx + \\ + \int_0^{\infty} K(x) \Gamma(\tau + x, \tau') dx. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) сначала по τ , затем по τ' и складывая почленно полученные равенства, находим

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = K(\tau) \Gamma(0, \tau') + \\ + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau''} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} \right) d\tau''. \quad (5)$$

Из уравнения (3) имеем

$$\Gamma(0, \tau) = K(\tau) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \Gamma(\tau'', 0) d\tau''. \quad (6)$$

Сравнение (5) и (6) дает:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau'), \quad (7)$$

где обозначено

$$\Gamma(0, \tau) = \Phi(\tau). \quad (8)$$

Из (7) следует (при $\tau' > \tau$):

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(\tau' - \tau) + \int_0^{\tau} \Phi(x) \Phi(x + \tau' - \tau) dx. \quad (9)$$

Таким образом, резольвента $\Gamma(\tau, \tau')$ выражается через функцию $\Phi(\tau)$, зависящую только от одного аргумента.

Для определения функции $\Phi(\tau)$ может быть использовано уравнение

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau', \quad (10)$$

представляющее собой уравнение (6) при учете (8). Другое уравнение для определения $\Phi(\tau)$ будет получено ниже (в § 4).

§ 2. Функция отражения

Рассмотрим уравнение

$$B(\tau, x) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) B(\tau', x) d\tau' + e^{-x\tau}, \quad (11)$$

являющееся частным случаем уравнения (1).

Согласно формуле (2)

$$B(\tau, x) = e^{-x\tau} + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau', \tau) e^{-x\tau'} d\tau'. \quad (12)$$

Пользуясь уравнением (7), мы можем выразить функцию $B(\tau, x)$ через функцию $\Phi(\tau)$.

Умножая (7) на $e^{-x\tau'}$, интегрируя по τ' в пределах от 0 до ∞ и учитывая (12), получаем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + \Phi(\tau) \left[1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') e^{-x\tau'} d\tau' \right]. \quad (13)$$

Но из (12) следует

$$B(0, x) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-x\tau} d\tau. \quad (14)$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + B(0, x) \Phi(\tau). \quad (15)$$

Интегрирование уравнения (15) дает:

$$B(\tau, x) = B(0, x) \left[e^{-x\tau} + \int_0^{\tau} e^{-x(\tau-\tau')} \Phi(\tau') d\tau' \right]. \quad (16)$$

Для многих физических задач представляет интерес функция

$$R(x, y) = \int_0^{\infty} B(\tau, x) e^{-y\tau} d\tau, \quad (17)$$

которая может быть названа „функцией отражения“ (смысл этого названия выяснится в § 6).

Умножая (15) на $e^{-y\tau}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ и принимая во внимание (14) и (17), находим

$$R(x, y) = \frac{B(0, x) B(0, y)}{x + y}. \quad (18)$$

Мы видим, что функция отражения симметрична относительно переменных x и y (в этом выражается „принцип обратимости“) и, кроме того, имеет определенную структуру.

§ 3. Уравнения для $B(0, x)$

Будем теперь считать, что ядро интегрального уравнения (1) представляется в виде

$$K(\tau) = \int_a^b A(y) e^{-\tau y} dy. \quad (19)$$

В таком случае из (11) следует:

$$B(0, x) = 1 + \int_a^b A(y) R(x, y) dy. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20) находим

$$B(0, x) = 1 + B(0, x) \int_a^b A(y) \frac{B(0, y)}{x+y} dy. \quad (21)$$

Мы получили нелинейное функциональное уравнение для определения $B(0, x)$.

Во многих случаях уравнение (21) может быть легко решено численно. Однако можно также указать путь для получения точного аналитического выражения для $B(0, x)$.

Умножая (21) на $\frac{A(x)}{x-z}$ и интегрируя по x в пределах от a до b , находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx &= \int_a^b \frac{A(x)}{x-z} dx + \\ &+ \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx \int_a^b \frac{A(y) B(0, y)}{y+z} dy + \\ &+ \int_a^b \frac{A(y) B(0, y)}{y+z} dy \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x+y} dx, \end{aligned} \quad (22)$$

или, при использовании (21),

$$B(0, z) \left[1 - 2 \int_a^b A(x) \frac{x dx}{x^2 - z^2} \right] = 1 - \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx. \quad (23)$$

Мы пришли к линейному интегральному уравнению с ядром Коши для определения $B(0, x)$. Решение уравнения (23) в явном виде может быть получено методом Карлемана [7].

§ 4. Определение функции $\Phi(\tau)$

Если ядро интегрального уравнения (1) задано в форме (19), то можно получить новое уравнение для функции $\Phi(\tau)$.

Сравнивая между собой уравнения (10) и (11), мы видим, что свободный член уравнения (10) является суперпозицией свободных членов уравнения (11). Поэтому имеем

$$\Phi(\tau) = \int_a^b A(x) B(\tau, x) dx. \quad (24)$$

Умножая (16) на $A(x)$ и интегрируя по x в пределах от a до b , находим

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^\tau L(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (25)$$

где

$$L(\tau) = \int_a^b A(x) B(0, x) e^{-x\tau} dx. \quad (26)$$

Уравнение (25) типа Вольтерра является искомым уравнением для функции $\Phi(\tau)$.

Применяя к уравнению (25) преобразование Лапласа получаем

$$\int_0^\infty \Phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{\int_a^b A(x) B(0, x) \frac{dx}{x+s}}{1 - \int_a^b A(x) B(0, x) \frac{dx}{x+s}}. \quad (27)$$

Таким образом, определение резольвенты уравнения (1) сводится к нахождению функции $B(0, x)$ из уравнения (21) [или (23)] и последующему определению функции $\Phi(\tau)$ из (27) путем обращения преобразования Лапласа.

Заметим, что обращение преобразования Лапласа легко выполняется методом контурного интегрирования при использовании соотношения (23).

§ 5. Случай конечного промежутка интегрирования

Полученные выше результаты легко обобщаются на случай уравнения

$$B(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + g(\tau). \quad (28)$$

Как и в § 1, находим, что резольвента уравнения (28) $\Gamma(\tau, \tau')$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau') - \Phi(\tau_0 - \tau) \Phi(\tau_0 - \tau'), \quad (29)$$

а функция $\Phi(\tau) = \Gamma(0, \tau)$ — уравнению

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau'. \quad (30)$$

Для функции $B(\tau, x)$, определенной вспомогательным уравнением

$$B(\tau, x) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) B(\tau', x) d\tau' + e^{-x\tau}, \quad (31)$$

пользуясь (29), получаем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + B(0, x)\Phi(\tau) - B(\tau_0, x)\Phi(\tau_0 - \tau), \quad (32)$$

причем

$$B(0, x) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau) e^{-x\tau} d\tau, \quad (33)$$

$$B(\tau_0, x) = e^{-x\tau_0} + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0 - \tau) e^{-x\tau} d\tau. \quad (34)$$

Введем „функцию отражения“

$$R(x, y) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, x) e^{-y\tau} d\tau \quad (35)$$

и „функцию пропускания“

$$S(x, y) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, x) e^{-y(\tau_0 - \tau)} d\tau. \quad (36)$$

При помощи (32) находим

$$R(x, y) = \frac{B(0, x) B(0, y) - B(\tau_0, x) B(\tau_0, y)}{x + y}, \quad (37)$$

$$S(x, y) = \frac{B(0, x) B(\tau_0, y) - B(\tau_0, x) B(0, y)}{x - y}. \quad (38)$$

Если ядро интегрального уравнения (28) представлено в форме (19), то для определения функций $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ имеем

$$B(0, x) = 1 + \int_a^b A(y) \frac{B(0, x) B(0, y) - B(\tau_0, x) B(\tau_0, y)}{x + y} dy, \quad (39)$$

$$B(\tau_0, x) = e^{-x\tau_0} + \int_a^b A(y) \frac{B(0, x) B(\tau_0, y) - B(\tau_0, x) B(0, y)}{x - y} dy. \quad (40)$$

Пользуясь соотношением (24) и уравнением (32), получаем

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^\tau [L(\tau - \tau') \Phi(\tau') - M(\tau - \tau') \Phi(\tau_0 - \tau')] d\tau'. \quad (41)$$

где

$$L(\tau) = \int_a^b A(x) B(0, x) e^{-x\tau} dx, \quad M(\tau) = \int_a^b A(x) B(\tau_0, x) e^{-x\tau} dx. \quad (42)$$

Таким образом, решение уравнения (28) при любом свободном члене $g(\tau)$ сводится к нахождению функций $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ из уравнений (39) и (40) (эти функции представляют самостоятельный интерес, так как решение многих задач выражается непосредственно через них), и последующему определению функции $\Phi(\tau)$ из уравнения (41).

Другой путь для решения уравнения (28) заключается в определении функции $\Phi(\tau)$ из уравнения (30) (очевидно, что в случае численного решения уравнений при различных функциях $g(\tau)$ определение $\Phi(\tau)$ из уравнения (30) и последующее вычисление $\Gamma(\tau, \tau')$ и $B(\tau)$ интегрированием гораздо проще, чем непосредственное решение уравнения (28)). После определения $\Phi(\tau)$ функции $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ могут быть найдены по формулам (33) и (34).

§ 6. Применение к проблеме диффузии излучения

Как уже сказано, к уравнению (1) (или к более общему уравнению (28)) приводят различные физические задачи. Одной из них является задача о диффузии излучения в плоском слое оптической толщины τ_0 .

В данном случае входящие в указанные уравнения величины имеют следующий физический смысл. Величина $g(\tau) d\tau$ представляет собой количество энергии, испускаемое непосредственно источниками излучения, находящимися в слое толщиной $d\tau$ на оптической глубине τ , величина $B(\tau) d\tau$ — количество энергии, испускаемое тем же слоем, как благодаря действию источников излучения, находящихся в этом слое, так и благодаря рассеянию излучения, приходящего от других слоев, величина $K(|\tau - \tau'|) d\tau d\tau'$ — вероятность того, что квант, излученный между оптическими глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$, будет излучен затем между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$ (без диффузии в среде).

В виде примера применения полученных выше результатов рассмотрим задачу о диффузии излучения в полубесконечной среде ($\tau_0 = \infty$).

Допустим сначала, что диффузия излучения происходит в одномерной среде. Тогда интегральное уравнение для функции $B(\tau)$ имеет вид

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(\tau') e^{-|\tau - \tau'|} d\tau' + g(\tau), \quad (43)$$

где λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния.

Так как в рассматриваемом случае $A(y) = \frac{\lambda}{2} \delta(1 - y)$, где δ — функция Дирака, то вместо уравнения (21) имеем

$$B(0, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} B(0, x) \frac{B(0, 1)}{x + 1}, \quad (44)$$

откуда следует:

$$B(0, 1) = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}) \quad (45)$$

и

$$B(0, x) = \frac{x + 1}{x + \sqrt{1 - \lambda}}. \quad (46)$$

Учитывая (14), получаем

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-x\tau} d\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{x + \sqrt{1 - \lambda}}, \quad (47)$$

а значит

$$\Phi(\tau) = (1 - \sqrt{1 - \lambda}) e^{-\tau \sqrt{1 - \lambda}}. \quad (48)$$

Подставляя (48) в (9) находим

$$\Gamma(\tau', \tau) = \frac{1}{2k} \{ (1 - k^2) e^{-k|\tau' - \tau|} - (1 - k)^2 e^{-k(\tau + \tau')} \}, \quad (49)$$

где $k = \sqrt{1 - \lambda}$.

Рассмотрим теперь диффузию излучения в трехмерной полубескочечной среде. В данном случае уравнение (1) принимает вид

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E i |\tau - \tau'| B(\tau') d\tau' + g(\tau), \quad (50)$$

где

$$E i \tau = \int_1^{\infty} e^{-y\tau} \frac{dy}{y}. \quad (51)$$

Введем обозначения: $x = \frac{1}{\tau}$, $y = \frac{1}{\eta}$, $B(0, x) = \varphi(\zeta)$,

$$\frac{\lambda}{4} R(x, y) = \rho(\eta, \zeta) \eta \zeta. \quad (52)$$

Как видно из сравнения (17) и (52), величина $\rho(\eta, \zeta)$ представляет собой коэффициент яркости среды, освещенной параллельными лучами (ζ — косинус угла падения, η — косинус угла отражения).

Вместо формулы (18) и уравнения (21) имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (53)$$

$$\varphi(\zeta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \zeta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta. \quad (54)$$

Уравнение (27) для $\Phi(\tau)$ принимает вид

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{1+s\zeta}}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{1+s\zeta}}. \quad (55)$$

Обращение преобразования Лапласа дает:

$$\Phi(\tau) = \frac{e^{-k\tau}}{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \eta d\eta}{(1-k\eta)^2}} + 2\lambda \int_1^{\infty} \frac{x e^{-x\tau}}{\pi^2 k^2 + \left(2x + \lambda \lg \frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{dx}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad (56)$$

где k определяется из уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \lg \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (57)$$

Соотношения (53) — (56) уже были найдены раньше. В. А. Амбарцумян [1, 2], занимаясь задачей о диффузном отражении света полубесконечной средой, получил формулу (53) и уравнение (54). В дальнейшем автор [3, 4] для резольвенты интегрального уравнения (50) получил уравнения (7), (25) и (55). Решение уравнения (55) в форме (56) было найдено И. Н. Минным [8]. Сейчас мы получили указанные соотношения как частный случай более общей теории.

Диффузия излучения в среде конечной оптической толщины τ_0 может быть рассмотрена путем использования результатов, полученных в § 5.

Аналогично может быть изучена задача о диффузии излучения в спектральной линии с перераспределением по частотам. Для одномерной среды ядро интегрального уравнения в этом случае имеет вид

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\pi(\nu)\tau} \alpha^2(\nu) d\nu / \int_0^{\infty} \alpha(\nu) d\nu, \quad (58)$$

где $\alpha(\nu)$ — отношение коэффициента поглощения в частоте ν к коэффициенту поглощения в центре линии. Указанная задача была ранее подробно рассмотрена в работе автора [9]. Некоторые результаты этой работы непосредственно вытекают из уравнений и формул, полученных выше.

§ 7. Вероятностная интерпретация проблемы

Проблема диффузии излучения имеет простую вероятностную интерпретацию. Мы можем считать, что величина $g(\tau) d\tau$ представляет собой вероятность возникновения кванта между глубинами τ и $\tau + d\tau$ (при соответствующей нормировке функции $g(\tau)$), величина $K(|\tau - \tau'|) d\tau'$ — вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , будет излучен затем (без диффузии в среде) между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$, величина $B(\tau) d\tau$ — вероятность излучения кванта между глубинами τ и $\tau + d\tau$ после диффузии в среде при заданном распределении вероятности возникновения кванта.

Для нахождения функции $B(\tau)$ при любой функции $g(\tau)$ надо знать резольвенту $\Gamma(\tau, \tau')$. Величина $\Gamma(\tau, \tau') d\tau'$ представляет собой вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , будет излучен затем после диффузии в среде между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$.

Указанный вероятностный смысл величин $g(\tau)$, $B(\tau)$, $K(\tau)$ и $\Gamma(\tau, \tau')$ позволяет весьма просто получить многие из соотношений, приведенных выше. Например, пользуясь вероятностным смыслом резольвенты и методом сложения слоев, предложенным В. А. Амбарцумяном [2], можно легко получить уравнения (7) и (29) для резольвенты (это и было сделано ранее в [3] и [5]).

Для практических применений большой интерес представляет определение интенсивности излучения, выходящего из среды. Для нахождения этой интенсивности при любых источниках излучения до-

статочно знать вероятность выхода кванта из среды. Предположим для простоты, что диффузия излучения происходит в полубесконечной среде без изменения частоты. Обозначая через $p(\tau, \eta) d\omega$ вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ , выйдет из среды под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$, для интенсивности излучения, выходящего из среды имеем

$$I(\eta) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} g(\tau) p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (59)$$

Очевидно, что

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\lambda}} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{\lambda}} d\tau', \quad (60)$$

и

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (61)$$

Сравнивая (12) и (60), находим

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} B\left(\tau, \frac{1}{\eta}\right), \quad (62)$$

т. е. функция $p(\tau, \eta)$ определяется уравнением

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} p(\tau', \eta) E_1|\tau - \tau'| d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\lambda}}. \quad (63)$$

Учитывая (61) и (62), из (15) получаем другое уравнение для определения $p(\tau, \eta)$:

$$\frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\lambda} p(\tau, \eta) + 2\pi p(0, \eta) \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (64)$$

Вероятность выхода кванта из среды была введена в теорию диффузии излучения в работе автора [10]. В частности, в ней были получены (другим способом, чем выше) уравнения (63) и (64) для $p(\tau, \eta)$. Путем использования функции $p(\tau, \eta)$ (и аналогичных функций, характеризующих вероятность выхода кванта из среды в более сложных случаях) были решены многие задачи теории диффузии излучения (см. [3]).

В дальнейшем С. Уэно [11, 12], рассматривая диффузию излучения как марковский процесс, также получил уравнение (64) для $p(\tau, \eta)$. Пользуясь этим уравнением (а также аналогичным уравнением

для случая диффузии излучения с перераспределением по частотам), он решил ряд задач, связанных с образованием линий поглощения в звездных спектрах.

Недавно Л. М. Биберман и Б. А. Векленко [13] для процесса диффузии излучения написали уравнения Колмогорова — Феллера и указали на то, что из них могут быть получены многие известные уравнения теории диффузии излучения.

Можно думать, что дальнейшее применение вероятностных методов к проблеме диффузии излучения приведет к новым интересным результатам. Разумеется, эти результаты будут иметь значение и для других физических задач, которые сводятся к уравнению (1).

Ленинградский
государственный университет

Поступило 15 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А. Астр. Журнал, 19, № 5, 1942.
2. Амбарцумян В. А. ДАН, 38, № 2, 1943.
3. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. Соболев В. В. ДАН, 116, № 1, 1957.
5. Соболев В. В. ДАН, 120, № 1, 1958.
6. Фок В. А. Матем. сборник, 14 (56), № 1—2, 1944.
7. Carleman T. Arkiv för Mat., Astr. och Fysik, 16, № 26, 1922.
8. Минин И. Н. ДАН, 120, № 1, 1958.
9. Соболев В. В. Вестник Ленингр. ун-та, № 5, 1955; № 11, 1955; № 19, 1957.
10. Соболев В. В. Астр. журнал, 28, вып. 5, 1951.
11. Ueno S. Contr. Inst. Ap. Kyoto, № 64, 1956.
12. Ueno S. Ap. J., 126, № 2, 1957.
13. Биберман Л. М., Векленко Б. А., ЖЭТФ, 31, вып. 2 (8), 1956.

Վ. Վ. Սոբոլև

ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԴԻՖՈԻԶԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Քննարկվում են երկու արգումենտների տարբերություն մոդուլից կախված կորիզներով ինտեգրալ հավասարումները: Քննարկման հիմքում ընկած են սկզբնական համար ստացված նոր հավասարումները: Ստացված արգումենտները կիրառվում են հառադալիթային դիֆուզիայի մի քանի պրոբլեմների նկատմամբ: Տրվում է այդ պրոբլեմների հավանական բացատրությունը: