

НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

Л. А. Мовсисян

О некоторых специфических особенностях
 анизотропных оболочек

Целью настоящей заметки является выявление некоторых специфических особенностей напряженного состояния и перемещений оболочки, когда материал ее подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности, т. е. обладает анизотропией достаточно общего вида.

Задача излагается по безмоментной теории на примерах цилиндрической, конической и сферической оболочек.

За координатные линии берутся главные линии кривизны.

1. Цилиндрическая оболочка. Пусть положение точки на срединной поверхности оболочки определяется параметрами α и β , где α — расстояние точки от одного торца оболочки, β — длина дуги направляющей, отсчитываемая от некоторой определенной образующей.

Для простоты будем рассматривать цилиндрические оболочки кругового очертания. В этом случае для коэффициентов первой квадратичной формы и для главных радиусов кривизны будем иметь значения: $A = 1$, $B = 1$, $R_1 = \infty$, $R_2 = r$, где r — радиус поперечного круга.

Из общих уравнений безмоментной теории оболочек имеем следующие уравнения равновесия [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} + X &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + Y &= 0, \\ T_2 + rZ &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

в формулы, связывающие компоненты деформаций с перемещениями u , v , w :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \quad (1.2)$$

Из уравнений теории анизотропных оболочек для соотношений упругости имеем [2,5]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{h} (a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{16}S), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{h} (a_{12}T_1 + a_{22}T_2 + a_{26}S), \\ \omega &= \frac{1}{h} (a_{16}T_1 + a_{26}T_2 + a_{66}S),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где h — толщина оболочки, a_{ik} — коэффициенты деформации.

Уравнения (1.1) и (1.2) в общем виде интегрируются весьма элементарно, но мы это сделаем для частных случаев.

а) Пусть оболочка длиной L несет равномерно распределенную нагрузку с постоянной интенсивностью q . Пусть один из торцов оболочки ($\alpha = 0$) полностью закреплен, а другой торец ($\alpha = L$) совершенно свободен.

Для рассматриваемой оболочки имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}\text{при } \alpha = 0 \quad u &= 0; \quad v = 0; \\ \text{при } \alpha = L \quad T_1 &= 0; \quad S = 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Грузовыми членами уравнений (1.1) будут:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -q. \quad (1.5)$$

Из (1.1) в силу (1.4) и (1.5) легко получить значения внутренних усилий:

$$T_2 = rq, \quad T_1 = 0, \quad S = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя в первое соотношение (1.2) значения ε_1 из (1.3) и T_1, T_2, S из (1.6), и произведя интегрирование по α , получим:

$$u = a_{12}q \frac{r}{h} \alpha + f_1(\beta).$$

В силу (1.4) для произвольной функции интегрирования имеем $f_1(\beta) = 0$, тогда для перемещения u окончательно получим:

$$u = a_{12}q \frac{r}{h} \alpha. \quad (1.7)$$

Аналогичным образом из второго и третьего соотношений (1.2) получим:

$$v = a_{26}q \frac{r}{h} \alpha, \quad (1.8)$$

$$\bar{w} = -a_{22}q \frac{r^2}{h}. \quad (1.9)$$

Несмотря на то, что оболочка имеет ось симметрии (как с точки зрения геометрии, так и с точки зрения статики), она под действием равномерно распределенного поверхностного давления претерпевает кручение относительно оси симметрии, и образующие оболочки после деформации становятся винтовыми линиями. Здесь интересно еще то, что если вместо давления имеем равномерное поверхностное растяжение, то кручение оболочки происходит в обратном направлении.

в) Пусть оболочка одним торцом ($\alpha=0$) закреплена полностью, а другое торцовое сечение ($\alpha=L$), не имея продольных перемещений, несет равномерно распределенное сдвигающее усилие с интенсивностью S_0 . Оболочка свободна от внешних поверхностных нагрузок.

Для рассматриваемой оболочки имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha=0 \quad u=0; \quad v=0; \\ \text{при } \alpha=L \quad u=0; \quad S=S_0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.1) в силу (1.10) для внутренних усилий получим:

$$T_1 = f_1(\beta), \quad T_2 = 0, \quad S = S_0, \quad (1.11)$$

где $f_1(\beta)$ — неизвестная функция интегрирования.

Из первого соотношения (1.2) в силу (1.3) и (1.11) для перемещения u получим:

$$u = a_{11} \frac{\alpha}{h} f_1(\beta) + a_{16} \frac{\alpha}{h} S_0 + f_2(\beta).$$

Из граничных условий (1.10) для функций интегрирования $f_1(\beta)$ и $f_2(\beta)$ будем иметь:

$$f_1 = -\frac{a_{16}}{a_{11}} S_0, \quad f_2 = 0, \quad (1.12)$$

в силу чего для усилия T_1 и касательного перемещения u получим:

$$T_1 = -\frac{a_{16}}{a_{11}} S_0, \quad u = 0. \quad (1.13)$$

Имея значения внутренних усилий T_1, T_2, S и перемещения u , поступая как в первом примере, получаем значения v и w :

$$v = \left(a_{66} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}} \right) \frac{\alpha}{h} S_0. \quad (1.14)$$

$$w = \left(\frac{a_{12}a_{16}}{a_{11}} - a_{26} \right) \frac{r}{h} S_0. \quad (1.15)$$

Заметим, что к рассмотренной задаче приводится также задача кручения замкнутой круговой цилиндрической оболочки, когда одно торцевое сечение закреплено полностью, а к другому сечению, которое не имеет продольных перемещений, с помощью жесткой диафрагмы приложен крутящий момент — $M_{кр}$. В этом случае достаточно в расчетных формулах вместо S подставить $\frac{M_{кр}}{2\pi r^2}$.

Рассматривая полученные результаты, замечаем, что в отличие от изотропных оболочек здесь продольное усилие T_1 и нормальное перемещение w не равны нулю и в зависимости от направления кручения меняют свой знак, т. е. если в одном случае в оболочке появляются растягивающие продольные усилия T_1 , то в случае изменения знака момента появляются сжимающие продольные усилия. Что же касается перемещения v , то оно уменьшается с увеличением коэффициента a_{10} .

2. Коническая оболочка. Пусть α означает расстояние точки от вершины оболочки, а β — центральный угол, отсчитываемый от некоторой определенной образующей.

Геометрические характеристики в этом случае будут: $A=1$, $B=\alpha \sin \theta$, $R_1=\infty$ и $R_2=\alpha \operatorname{tg} \theta$, где θ угол при вершине, составленный центральной осью и образующим. Здесь тоже рассматриваем круговые оболочки, вследствие чего θ — постоянный угол.

Исходные уравнения для конической оболочки будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha T_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \beta} - T_2 + \alpha X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha S) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + S + \alpha Y &= 0, \\ T_2 + \alpha \operatorname{tg} \theta Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\alpha \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{u}{\alpha} - \frac{w}{\alpha \operatorname{tg} \theta}, \\ w &= \frac{1}{\alpha \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

и соотношения упругости (1.3).

Как раньше, займемся лишь конкретными примерами.

а) Коническая оболочка свободна от внешних нагрузок ($X=Y=Z=0$). Один торец ($\alpha=L$) жестко закреплен, а другой свободен и к нему приложено постоянное касательное усилие S_0 . Краевые условия при этом будут:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha=L \quad u=0; \quad v=0; \\ \text{при } \alpha=a_0 \quad T_1=0; \quad S=S_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая последнее условие (2.3) и (2.1) имеем:

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad S = \frac{x_0^2}{x^2} S_0. \quad (2.4)$$

Из (1.3) и (2.2) в силу (2.3) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} u &= a_{16} \frac{x_0^2}{h} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{x} \right) S_0, \\ v &= a_{66} \frac{x_0^2}{2h} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{x^2} \right) S_0, \\ w &= \left(\frac{a_{16}}{L} - \frac{a_{16} + a_{26}}{x} \right) \frac{x_0^2}{h} S_0 \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

в) Та же оболочка, но на свободном конце действует нормальное усилие $T_1 = T_0 = \text{const}$.

Для искомых величин находим:

$$T_1 = \frac{x_0}{x} T_0, \quad T_2 = 0, \quad S = 0, \quad (2.6)$$

$$u = a_{11} T_0 \frac{x_0}{h} \ln \frac{x}{L},$$

$$v = a_{16} T_0 \frac{x_0}{h} \left(\frac{x}{L} - 1 \right), \quad (2.7)$$

$$w = T_0 \frac{x_0}{h} \left(a_{11} \ln \frac{x}{L} - a_{12} \right) \operatorname{tg} \theta.$$

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, аналогичный приведенному в п.1, что u и w в первом и w во втором примерах появляются вследствие анизотропии и меняют знак с изменением направления краевого усилия. Интересно еще то, что от угла θ зависит только нормальное перемещение w , которое увеличивается с увеличением угла. Кроме того, как видно из (2.5), величина w зависит как от a_{26} , так и от a_{16} за исключением на линии $x=L$, где w зависит только от a_{26} .

3. Сферическая оболочка. Отнесем срединную поверхность к географической системе координат, в которой положение точки задается полярным расстоянием θ и долготой φ .

Положим [1]:

$$\alpha = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \varphi. \quad (3.1)$$

Тогда геометрические характеристики оболочки будут: $A = B = \frac{R}{\operatorname{ch} \alpha}$, $R_1 = R_2 = R$, где R — радиус сферы.

Исходные уравнения для безмоментной сферической оболочки будут:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + A \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \alpha} (T_1 - T_2) + A^2 X &= 0, \\ A \frac{\partial S}{\partial \alpha} + A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \alpha} S + A^2 Y &= 0, \\ T_1 + T_2 + RZ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R}, \\ w &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{A} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

и соотношения упругости (1.3).

Уравнения (3.3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{A} \right) &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) &= w. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим примеры.

а) Полусферический купол, жестко закрепленный на границе находится под равномерным давлением интенсивностью q . Из симметрии задачи следует, что u и v в полюсе равны нулю.

Интегралами уравнения (3.2) будут:

$$T_1 = \frac{Rq}{2} + \frac{f_1}{A^2}, \quad T_2 = \frac{Rq}{2} - \frac{f_1}{A^2}, \quad S = \frac{f_2}{A^2}. \quad (3.5)$$

Имея (3.5) и (1.3) из (3.4) для перемещений получим (изотермические координаты заменены географическими):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{h} \left\{ (a_{11} - a_{22}) \frac{Rq}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + [(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) f_1 + \right. \\ &\quad \left. + (a_{16} - a_{26}) f_2] \frac{1}{2R^2} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} R \sin \theta + f_3 R \sin \theta, \\ v &= \frac{1}{h} \left\{ (a_{16} + a_{26}) \frac{Rq}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + [(a_{16} - a_{26}) f_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_{66} f_2] \frac{1}{2R^2} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} R \sin \theta + f_4 R \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

где f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — произвольные функции интегрирования. Определить w можно из первых уравнений (3.3).

Удовлетворяя теперь граничным условиям, для произвольных функций получаем нулевые значения. Усилия и перемещения при этом будут:

$$T_1 = \frac{Rq}{2}, \quad T_2 = \frac{Rq}{2}, \quad S = 0, \quad (3.7)$$

$$u = \frac{R^2 q}{2h} (a_{11} - a_{22}) \sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$v = \frac{R^2 q}{2h} (a_{16} + a_{26}) \sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (3.8)$$

$$w = -\frac{R^2 q}{2h} (a_{11} + a_{12}) + \frac{R^2 q}{2h} (a_{11} - a_{22}) \left(1 + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \theta \right).$$

Из полученного видно, что в отличие от изотропных сферических оболочек, которые при равномерном давлении остаются сферическими, здесь появляются u , v и второе слагаемое w .

в) Сферическая полоса. Край $\theta = 90^\circ$ жестко зашпелен, а на краю $\theta = 0^\circ$ действует касательное усилие; вместе с тем перемещение в направлении касательной к меридианам отсутствует. Оболочка свободна от внешних нагрузок. Имеем следующие краевые условия

$$\begin{aligned} \text{при } \theta = 0^\circ \quad u = 0; \quad S = S_0; \\ \text{при } \theta = 90^\circ \quad u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям для произвольных функций получаем:

$$f_1 = \frac{a_{26} - a_{16}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} S_0 R^2 \sin^2 \theta_0, \quad f_2 = S_0 R^2 \sin^2 \theta_0, \quad f_3 = f_4 = 0. \quad (3.10)$$

После чего из (3.5) и (3.6) будем иметь

$$T_1 = -T_2 = S_0 \frac{a_{26} - a_{16}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta},$$

$$S = S_0 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}, \quad (3.11)$$

и перемещения в виде:

$$u = 0,$$

$$v = \frac{S_0 R}{2h} \left[a_{66} - \frac{(a_{16} - a_{26})^2}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} \right] \left(\sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \theta \right) \sin^2 \theta_0, \quad (3.12)$$

$$w = -\frac{S_0 R}{h} \left[(a_{11} - a_{12}) \frac{a_{26} - a_{16}}{2a_{12} + a_{22}} + a_{16} \right] \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}.$$

4. Описанные здесь явления специфичны для анизотропных оболочек вообще. Эти явления совершенно не обнаруживаются в случае

изотропных оболочек, а также в некоторых частных случаях анизотропных оболочек.

Например эти явления не обнаруживаются в случае ортотропных оболочек, когда главные направления упругости совпадают с главными геометрическими направлениями координатной поверхности оболочки [4].

Полученные здесь результаты, по сути дела, являются обобщением задач элементарного напряженного состояния анизотропных материалов [2] на случай безмоментных оболочек.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 III 1958

Լ. Ա. Մովսիսյան

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՍՊԵՑԻՖԻԿ ԱՌԱՆՋՆԱՂԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության նպատակն է հրեան հանել անիզոտրոպ թաղանթների լարվածության միջակի ու տեղափոխումների մի քանի առանձնահատկություններ այն դեպքում, երբ թաղանթի նյութը ենթարկվում է հսկի ընդհանրացրած օրենքին և ամեն մի կետում ունի առանձնականության սիմետրիայի մեկ հարմարություն, որը դուրսնում է միջին մակերևույթին:

Խնդիրը շարադրված է անժամկետ տեսությամբ՝ դրանալին, կոնական և դնդալին թաղանթների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
4. Амбарцумян С. А. Безмоментная теория анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), I, № 6 1948.
5. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. XII, № 1, 1948.