

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, А. А. Бабоян

К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе круглой толстой плиты произвольной осесимметричной нагрузкой, приложенной к ее основаниям.

Плита предполагается закрепленной так, что одна из окружностей на боковой поверхности или какая-либо точка на оси плиты не имеет осевых перемещений, а вся боковая поверхность не имеет радиальных перемещений [1].

Аналогичного типа задачи были рассмотрены в работах Клемова [2], А. Надаи [3], А. И. Лурье [1, 4], В. К. Прокопова [5] и Л. С. Лейбензона [6].

Задача решается методом Фурье, при этом исходя из основных уравнений теории упругости, без каких-либо допущений.

Рассмотрим круглую толстую плиту (или цилиндр) радиуса R и толщины h . Будем пользоваться цилиндрической системой координат и совместим ось z с осью плиты (фиг. 1).

Известно [7], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$ (r — направление радиуса, z — направление оси вращения), которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1)$$

а на поверхности тела задается законом распределения напряжений или перемещений.

Напряжения и перемещения при осесимметричной деформации выражаются через функцию напряжений $\Phi(r, z)$ соотношениями

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\
 u_r &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \\
 u_z &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right],
 \end{aligned} \quad (2)$$

где μ — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона.

Решая уравнение (1) методом Фурье для круглого сплошного цилиндра, функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде [8, 9]

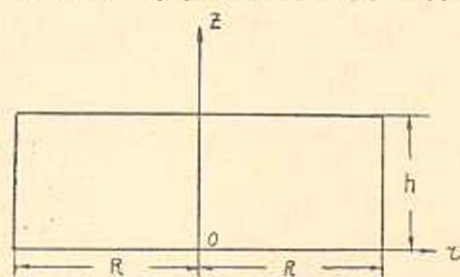
$$\begin{aligned}
 \Phi(r, z) &= z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + \\
 &+ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + \\
 &+ B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r),
 \end{aligned} \quad (3)$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя i -го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_i(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента [10], $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$, а

μ_k — корни уравнения

$$J_1(xR) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях



Фиг. 1.

$$\left. \begin{aligned}
 u_r(R, z) &= f_1(z) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \lambda_k z \\
 \tau_{rz}(R, z) &= f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k z
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < z < h)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z(r, 0) &= f_3(r) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) \\
 \tau_{rz}(r, 0) &= f_4(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k r)
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < r < R) \quad (5)$$

$$\tau_z(r, h) = f_3(r) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r)$$

$$\tau_{rz}(r, h) = f_6(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_1(\mu_k r)$$

Здесь мы допускаем, что функции $\{f_i\}$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}(0, z) = u_r(0, z) = 0. \quad (6)$$

Условиями (6) и (5) полностью определяются все напряжения и перемещение u_r . Перемещение же u_z определяется с точностью до постоянной C . Для определения последней предполагаем, что перемещения u_z на окружности $r = R$, $z = 0$ боковой поверхности цилиндра равны нулю

$$u_z(R, 0) = 0. \quad (7)$$

Вычислив по формулам (2) с помощью (3) напряжения и перемещения, получим

$$\begin{aligned} \tau_r(r, z) = & -2(1-2\nu)A + 6\nu B - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \left\{ [E_k + \right. \\ & \left. + (1-2\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) - E_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [A_k + (1+2\nu)D_k] \operatorname{ch} \mu_k z + [B_k + (1+2\nu)C_k] \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \left\{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + \right. \\ & \left. + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_z(r, z) = & 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \{ [E_k + \\ & + 2(2-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [D_k(1-2\nu) - \\ & - A_k] \operatorname{ch} \mu_k z + [C_k(1-2\nu) - B_k] \operatorname{sh} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_1(\mu_k r) \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) = & -\frac{1}{2\mu} \left\{ 2Ar + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z [E_k I_1(\lambda_k r) + \right. \\ & + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r)] - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_1(\mu_k r) [(A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z] \Big\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & \frac{1}{2\mu} \left\{ [8(1-\nu)A + 6(1-2\nu)B]z + 2(1-2\nu)C + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sin \lambda_k z [[E_k + 4(1-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k r) [[2(1-2\nu)D_k - A_k] \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + [2(1-2\nu)C_k - B_k] \operatorname{ch} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z] \Big\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что условия (6) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив же условиям (5) и (7), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (3), получаем ряд соотношений.

При получении этих соотношений пользуемся разложениями Фурье-Дани [11] функций $I_0(\lambda_k r)$ и $rI_1(\lambda_k r)$ по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$ [8], где μ_k — корни уравнения (4).

Из указанных обоих соотношений для постоянных интегрирования получаем следующие значения

$$A = -\frac{\mu g_0}{2R}, \quad (13)$$

$$B = \frac{1}{6(1-\nu)} \left[a_0 + \frac{2(2-\nu)\mu g_0}{R} - \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \right], \quad (14)$$

$$C = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R)}{1-\beta_k^2} \left\{ N_k (\beta_k \cosh \mu_k h + \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - M_k (\sinh \mu_k h + \beta_k \operatorname{cth} \mu_k h) + \frac{d_k \beta_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{2\mu_k (1-\nu)} (1-2\nu + \beta_k^2) \right\}, \quad (15)$$

$$G_k = \frac{q_k + 2\mu_k \lambda_k g_k}{2(1-\nu)\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)}, \quad (16)$$

$$E_k = -\frac{1}{\lambda_k^2 I_1(\lambda_k R)} \left[2\mu_k g_k - \frac{(q_k + 2\mu_k \lambda_k g_k) R I_0(\lambda_k R)}{2(1-\nu) I_1(\lambda_k R)} \right], \quad (17)$$

$$D_k = \frac{1}{\mu_k^2 (1-\beta_k^2)} \left[M_k \beta_k - N_k + \frac{c_k}{\mu_k} (\beta_k \cosh \mu_k h - \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - \frac{d_k}{\mu_k} (\beta_k \operatorname{cth} \mu_k h - \cosh \mu_k h) \right], \quad (18)$$

$$C_k = \frac{1}{\mu_k^2 (1-\beta_k^2)} \left[N_k (\beta_k \cosh \mu_k h + \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - M_k (\cosh \mu_k h + \beta_k \operatorname{cth} \mu_k h) + \frac{c_k}{\mu_k} + \frac{d_k \beta_k}{\mu_k} \right], \quad (19)$$

$$A_k = \frac{N_k}{\mu_k^2} + (1-2\nu) D_k, \quad (20)$$

$$B_k = \frac{c_k}{\mu_k^3} - 2\nu C_k, \quad (21)$$

где введены следующие обозначения

$$\beta_k = \mu_k h \cosh \mu_k h \quad (22)$$

$$N_k = -\frac{a_k}{\mu_k} + \frac{2}{\mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p q_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^2} + \\ + \frac{2\mu_k}{(1-\nu) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p (q_p + 2\mu_p \lambda_p g_p)}{(\lambda_p^2 + \mu_k^2)^2}, \quad (23)$$

$$M_k = -\frac{b_k}{\mu_k} + \frac{2}{\mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p q_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^2} + \\ + \frac{2\mu_k}{(1-\nu) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p (q_p + 2\mu_p \lambda_p g_p)}{(\lambda_p^2 + \mu_k^2)^2}. \quad (24)$$

Из упомянутых выше соотношений получается также следующее равенство

$$a_0 - b_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k}, \quad (25)$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси плиты.

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования из (13)–(21) в (8)–(12), получим формулы для определения напряжений и перемещений.

В качестве примера рассмотрим случай, когда плита изгибается нормальной нагрузкой, приложенной осесимметрично к верхнему ее основанию, при отсутствии радиальных перемещений на всей боковой поверхности и осевых перемещений на средней окружности ($r = R$ при $z = \frac{h}{2}$) этой поверхности, то-есть: когда граничные условия заданы соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_r(R, z) = f_1(z) &= 0, \\ \tau_{rz}(R, z) = f_2(z) &= a(z - h)z, \\ z_z(r, 0) = f_3(r) &= 0, \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_4(r) &= 0, \\ z_z(r, h) = f_5(r) &= \begin{cases} -q & r < \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \\ \tau_{rz}(r, h) = f_6(r) &= 0, \\ u_z\left(R, \frac{h}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где постоянная величина

$$a = \frac{3q\varepsilon^2}{Rh^2} \quad (27)$$

определяется из условия равновесия (25).

При таких условиях имеем

$$a_k = c_k = d_k = g_k = 0, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -\frac{Q}{\pi R^2}, \\ b_k &= -\frac{2QJ_1(\mu_k \varepsilon)}{\pi R^2 J_0^2(\mu_k R) \varepsilon \mu_k}, \\ q_h &= \frac{12Q}{\pi R h^4 \mu_k^3} [1 + (-1)^{h+1}], \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где введено обозначение

$$Q = q\pi\varepsilon^2. \quad (30)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q\pi\varepsilon^2 = Q_0$, что имеет место, когда плита изгибается сосредоточенной силой Q_0 , приложенной в центре ее верхнего основания.

Пользуясь значениями (28) и (29), для неизвестных постоянных получим следующие значения

$$A = 0,$$

$$B = -\frac{Q}{12(1-\nu)\pi R^2},$$

$$C = \frac{Qh}{8(1-\nu)\pi R^2} - \frac{24Q}{(1-2\nu)\pi R h^4} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} I_0(\lambda_k R)}{\lambda_k^4 I_1(\lambda_k R)} +$$

$$+ \frac{6Q}{(1-\nu)(1-2\nu)\pi h^4} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\lambda_k^3} \left[\frac{I_0^2(\lambda_k R)}{I_1^2(\lambda_k R)} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R) (b_k + 2N_k^*)}{\mu_k (1-\beta_k)} \left[(1-\nu) \operatorname{csh} \frac{\mu_k h}{2} + \frac{1}{4} \mu_k h \operatorname{sch} \frac{\mu_k h}{2} \right]. \quad (31)$$

$$G_k = \frac{12Q}{\pi R h^4 \lambda_k^6 (1-\nu) I_1(\lambda_k R)},$$

$$E_k = \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} G_k,$$

$$C_k = -\frac{2Q J_1(\mu_k z) (\beta_k \operatorname{cth} \frac{\mu_k h}{2} + \operatorname{csh} \frac{\mu_k h}{2})}{\pi R^2 (1-\beta_k^2) \mu_k^4 z J_0^2(\mu_k R)} + \frac{N_k^* \operatorname{cth} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k^3 (1-\beta_k)}, \quad (32)$$

$$D_k = \frac{2Q \beta_k J_1(\mu_k z)}{\pi R^2 (1-\beta_k^2) \mu_k^4 z J_0^2(\mu_k R)} - \frac{N_k^*}{\mu_k^3 (1-\beta_k)},$$

$$A_k = \frac{N_k^*}{\mu_k^3} + (1-2\nu) D_k,$$

$$B_k = -2\nu C_k.$$

где использованы обозначения (22), (30), а также

$$N_k^* = \frac{6Q}{\pi R^2 h^2 (1-\nu) \mu_k^2 J_0(\mu_k R)} \left\{ (1-\nu) \left(1 - \frac{2 \operatorname{th} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k h} \right) + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{\operatorname{th} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k h} (3-\beta_k) \right] \right\}. \quad (33)$$

Подставляя эти значения в выражения (8) и (12), для определения нормального напряжения σ_r и осевого перемещения u_z получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & -\frac{Q\nu}{2\pi R^2(1-\nu)} - \frac{12Q}{\pi R^2 h^4(1-\nu)} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)} \left\{ \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + \right. \\ & + \frac{R I_1(\lambda_k r) I_0(\lambda_k R)}{r I_1(\lambda_k R)} + \left[1 - 2\nu \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} \right] I_0(\lambda_k r) \Big\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{(1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \{ b_k [\operatorname{sh} \mu_k z - \mu_k (h-z) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + \beta_k (1 + \mu_k z) \operatorname{ch} \mu_k (h-z)] + N_k^* [(1 + \beta_k) \operatorname{sh} \mu_k z - \operatorname{sh} \mu_k (h-z) + \\ & + (1 + \beta_k) \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z) - (1 - \beta_k) \mu_k (h-z) \operatorname{ch} \mu_k z] \} - \\ & - 2\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r (1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} \{ b_k [\operatorname{sh} \mu_k z + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z)] + \\ & + N_k^* [\operatorname{sh} \mu_k z - \operatorname{sh} \mu_k (h-z) + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k h] \}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\mu u_z(r, z) = & \frac{(1-2\nu)Qz}{2(1-\nu)\pi R^2} + 2(1-2\nu)C + \\ & + \frac{48Q}{\pi R h^4} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k^4} \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} - \\ & - \frac{12Q}{\pi R h^4(1-\nu)} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k^3 I_1^2(\lambda_k R)} [R I_0(\lambda_k r) I_0(\lambda_k R) - r I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R)] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r) \left\{ \frac{b_k}{\mu_k (1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} [(2\nu - 2 - \beta_k \operatorname{ch} \mu_k h) \operatorname{ch} \mu_k z - \right. \\ & - (1 - 2\nu) \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - \mu_k z \beta_k \operatorname{sh} \mu_k (h-z)] - \\ & - \frac{N_k^*}{\mu_k (1-\beta_k) \operatorname{sh} \mu_k h} [2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + 2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + \mu_k (h-z) \operatorname{sh} \mu_k z + \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k (h-z)] \Big\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Некоторые значения напряжения σ_r и перемещения u_z , вычисленные по формулам (34) и (35) для различных точек плиты, при $\nu = 0,3$, в зависимости от отношений $\frac{z}{R}$ и $\frac{h}{R}$ приведены в таблицах

Таблица 1

	$\frac{h}{R}$	$\frac{z}{R}$	
		1	1/2
$\frac{u_z(0, 0)}{K_1}$	1	-0,324	-0,583
	1/3	-6,996	-19,388
	1/4	-21,322	—
$\frac{u_z(0, \frac{h}{2})}{K_1}$	1	-0,387	-0,787
	1/3	-7,918	-19,450
$\frac{u_z(0, h)}{K_1}$	1	-0,467	-1,242
	1/3	-8,425	-21,172
	1/4	-21,465	—
$\frac{u_z(R, 0)}{K_1}$	1	-0,033	-0,085
	1/3	+0,327	+0,106
$\frac{u_z(R, h)}{K_1}$	1	-0,176	-0,294
	1/3	-1,102	-1,149

Таблица 2

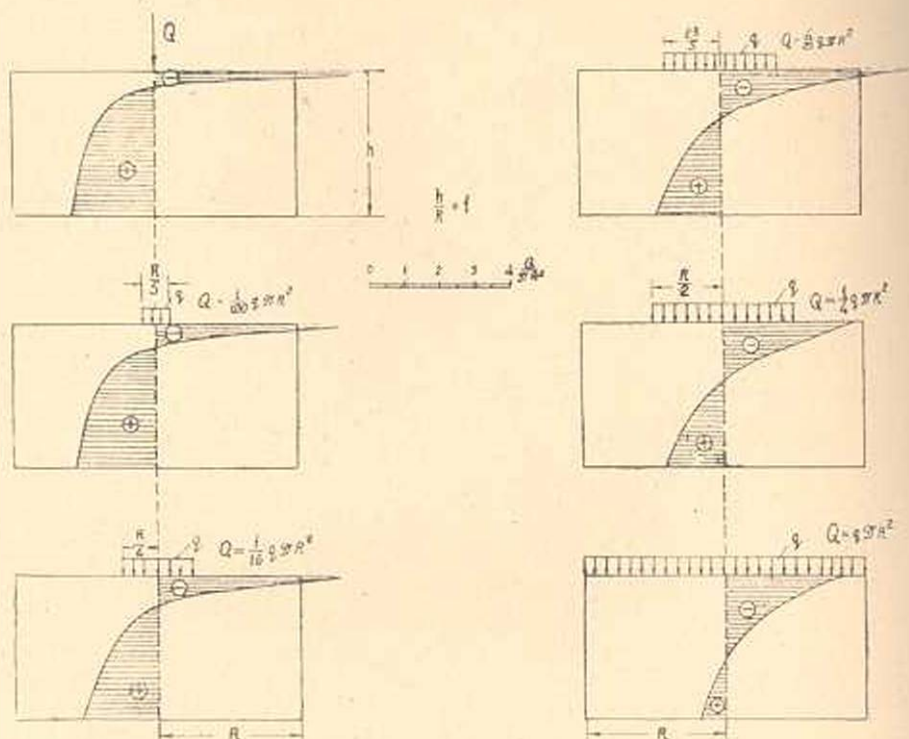
	$\frac{h}{R}$	$\frac{z}{R}$						
		1	1/2	2/5	1/4	1/10	1/20	0
$\frac{\tau_r(0, 0)}{K}$	1	0,760	1,602	1,817	2,105	2,290	2,319	2,329
	1/3	3,504	13,730	17,070	24,783	28,105	37,178	38,024
$\frac{\tau_r(0, \frac{h}{2})}{K}$	1	-0,214	0,449	0,750	1,327	1,865	1,964	1,999
	1/3	-0,214	0,459	1,211	3,532	13,555	18,830	21,379
$\frac{\tau_r(0, h)}{K}$	1	-3,589	-3,727	-5,556	-13,392	-80,614	-320,617	—
	1/3	-3,943	-12,859	-17,912	-29,524	-99,698	-340,202	—

В таблицах 1 и 2 перемещения u_z приведены в долях $K_1 = \frac{qh}{\mu} \left(\frac{z}{R} \right)^2 = \frac{Qh}{\pi R^2 \mu}$, а напряжения τ_r — в долях $K = q \left(\frac{z}{R} \right)^2 = \frac{Q}{\pi R^2}$.

При вычислениях было использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k z)}{\mu_k J_0(\mu_k R)} = \frac{z}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} - 1 \right), \quad \text{где } 0 \leq z \leq R. \quad (36)$$

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений τ_r вдоль оси плиты на фигурах 2 и 3 приведены эпюры этих напряжений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно: на основании расчетов, произведенных только для трех точек оси.



ՓԻՂ. 2.

Բ. Լ. Աբրահամյան, Ա. Ա. Բաբոյան

ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՈՎ ՀԱՍՏ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

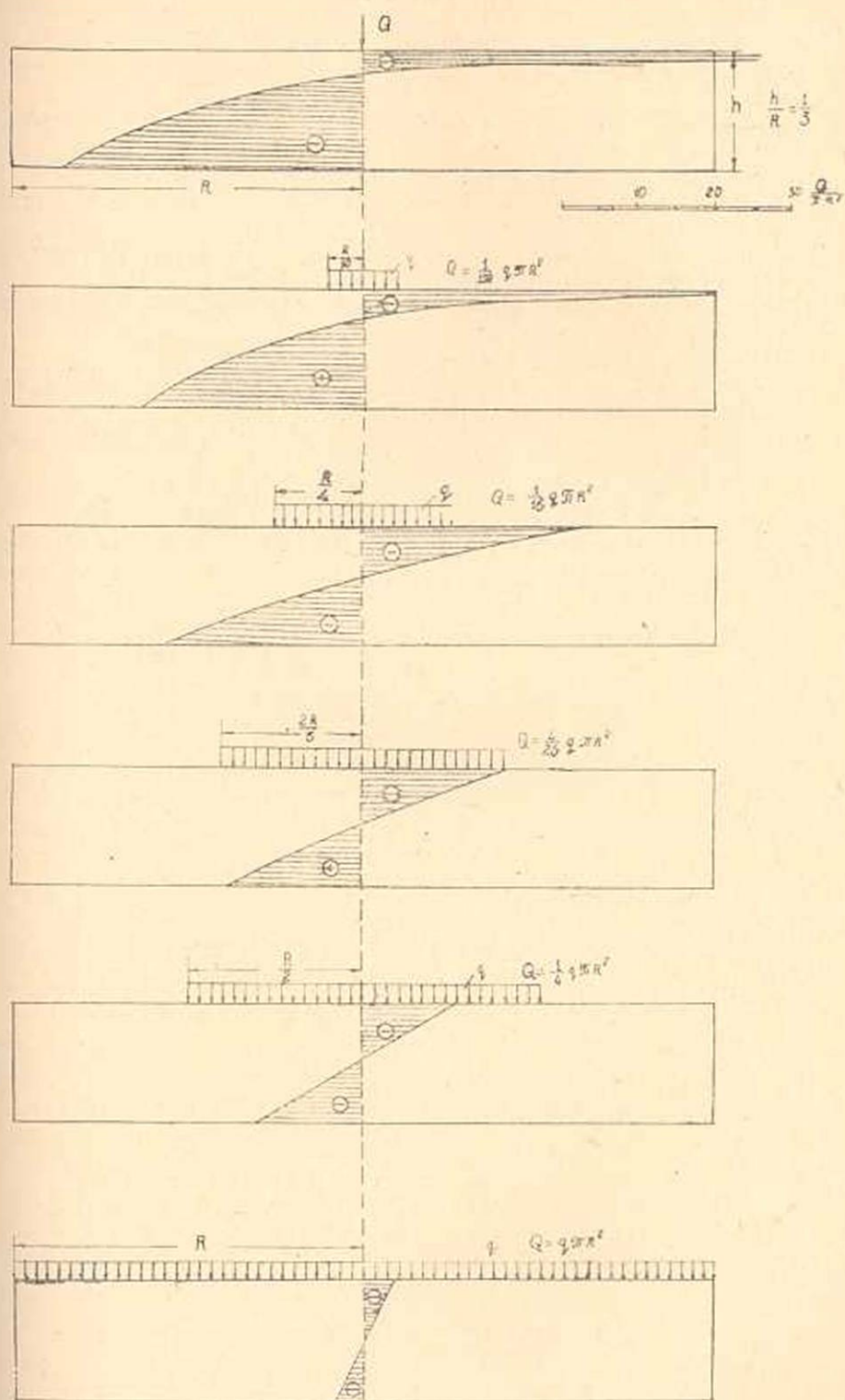
Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ բետոն հաստ կլոր սալերի ծոման խնդիրը, երբ բետը կամավոր ձևով կիրառված է սալի հիմքերին:

Սալը ենթադրվում է ամրացված ալնայեռ, որ նրա կողմնալիճն մակերևույթի մի շրջանագծի վրա կամ առանցքի մի որևէ կետում բացակայում են առանցքի ուղղությամբ տեղափոխումները, իսկ ամբողջ կողմնալիճն մակերևույթի վրա չկան տեղափոխումներ շառավղի ուղղությամբ:

Նման խնդիրները դիտարկված են հղել Կլեմմովի [2], Նազարի [3], Ա. Լուրյեի [1, 4], Վ. Պրոկոպովի [5] և Լ. Լիբենդոնի [6] աշխատություններում:

Այս աշխատության մեջ բերված խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եզանակով, առաձգականության տեսության հիմնական հավասարումներից ելնելով, առանց որևէ կինեմատիկական հիպոթեզի:



Фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, том VI, вып. 2—3, 1942, стр. 151—163.
2. CLEMMOW C. A. Flexure of Thick Circular Plates, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. 'A', Vol. 112, p. 559, 1926.
3. Nadai A. Elastische Platten, Berlin, 1925.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955, стр. 218—230.
5. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. ПММ, том XIV, вып. 5, 1950, стр. 527—536.
6. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных покрытий. Собрание трудов, том I, изд. АН СССР, 1951, стр. 100—148.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
8. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН АрмССР, том XIX, № 1, 1954, стр. 3—12.
9. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН АрмССР, том XXVI, № 2, 1958, стр. 65—72.
10. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиниздат, М., 1949.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госиниздат, часть I, М., 1949, стр. 655.