

В. А. Толян

О взвешенно-полиномиальном приближении на действительной оси

Введение

Аппроксимационная проблема Бернштейна* заключается в отыскании необходимых и достаточных условий, при которых

$$\inf_{\{P\}} \sup_{-\infty < x < \infty} \{h(x) |f(x) - P(x)|\} = 0,$$

где $h(x)$ — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{\pm x \rightarrow \infty} x^n h(x) = 0$; $n = 0, 1, \dots$, функция $f(x)$ определена и непрерывна на действительной оси и удовлетворяет условию

$$\lim_{\pm x \rightarrow \infty} f(x) h(x) = 0.$$

В 1954 г. С. Н. Мергеляном [1] было доказано, что для полноты системы полиномов с произвольным неотрицательным измеримым весом $h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sup \ln |P(x)|}{1+x^2} dx$$

расходился; верхняя грань берется по всевозможным полиномам удовлетворяющим условию $h(x) |P(x)| \leq 1 + |x|$.

Первые результаты о связи между свойствами аппроксимируемой функции $f(x)$, скоростью убывания ее наилучших приближений

$$E_n(f, h) = \inf_{\{P_n(x)\}} \sup_{-\infty < x < \infty} \{h(x) |f(x) - P_n(x)|\}$$

и свойствами весовой функции $h(x)$ были получены в 1952 г. М. М. Джрбашьяном. Им установлены прямые и обратные теоремы о наилучших приближениях дифференцируемых функций. Примером его прямых теорем может служить следующая [5]:

* В этой статье мы не будем касаться истории вопроса, достаточно полно изложенной в обзорных статьях, вышедших в последние годы; см. например [2], [3], [4].

А) Если $f(x)$ — функция непрерывная и ограниченная на всей оси $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до порядка $k \geq 1$ включительно, то при $\lambda > 1$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq \frac{C}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}k}},$$

где C — некоторая постоянная не зависящая от n .

Впоследствии [2] ему удалось получить более общий результат, чем сформулированный выше, а именно:

В) Если $f(x)$ непрерывна и ограничена на оси $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до порядка $k \geq 1$ включительно, причем

$$\forall \text{rat} \max_{-\infty < x < \infty} |f^{(k)}(x)| \leq m_k,$$

то при весе $h(x) = e^{-p(x)}$, удовлетворяющем условиям

$$xp'(x) \uparrow \infty; \quad x \frac{p'(x)}{p(x)} \geq a > 1; \quad x > 1$$

и при $n > N$

$$E(f, e^{-p(x)}) \leq \frac{\pi m_k}{\rho^k} p_n^{-k},$$

где $p_n = \int_1^n \frac{dy}{q(y)}$; $x = q(y)$ — функция, обратная $y = p(x)$; $\rho > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $f(x)$.

В то время, как обратные теоремы, полученные М. М. Джрбашяном сформулированы для произвольной весовой функции, обеспечивающей полноту, в прямых теоремах, по замечанию самого автора, „на приближаемую функцию и на вес приходится накладывать ограничения, которые отнюдь не необходимы для полноты полиномов на оси“ [2].

Настоящая статья посвящена взвешенно-полиномиальным приближениям на вещественной оси и оценке убывания наилучших приближений в зависимости от свойств аппроксимируемой функции для широкого класса весовых функций.

Ниже, например, приводятся теоремы об оценке наилучших приближений в которых:

1) в качестве веса рассматривается произвольная нормально убывающая функция (теоремы III, IV);

2) допускается рост как аппроксимируемой функции, так и ее производной (теоремы I, II).

Изложению основных результатов предположим некоторые вспомогательные предложения.

§ 1. Вспомогательные предложения

№ 1.1. Лемма. Если $\lambda > 1$ и $\zeta = \xi + i\eta$; $1 > \eta > 0$, то

$$E_n \left(\frac{1}{\zeta - x}, e^{-|x|^\lambda} \right) \leq \frac{1}{\eta} e^{-C\eta^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}.$$

где C — абсолютная константа ($\geq 0,04$).

Доказательство.

Составим целую функцию

$$G_{m,\zeta}(z) = \frac{e^{-im(z-\bar{\zeta})} - e^{m\eta}}{(z-\zeta)e^{m\eta}}.$$

Как легко убедиться при заданном $\delta > 0$ и надлежаще выбранном целом $m > 0$ эта целая функция приближает на всей оси $-\infty < x < \infty$ ядро Коши $(\zeta - x)^{-1}$:

$$\left| G_{m,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq \delta, \quad -\infty < x < \infty$$

при

$$m = \left[\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right] + 1. \quad (1.1.1)$$

Оценим рост функции $G_{m,\zeta}(z)$. Пусть z — произвольная точка с условием $|Imz| \geq \eta + 1$.

Тогда

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m|y|}.$$

Оценим теперь $G_{m,\zeta}(z)$ в полосе $|Imz| \leq \eta + 1$. На границе полосы имеем, очевидно,

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m(\eta+1)}.$$

По теореме Фрагмена-Линделёфа эта же оценка имеет место везде внутри полосы. Таким образом всюду выполняется

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m(|Imz|+2)}$$

и учитывая значение m , выбранное в (1.1.1) можем написать

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 2\delta e^{m(|Imz|+2)}. \quad (1.1.2)$$

Легко проверить, что если $P_{n,\zeta}(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ — отрезок ряда теيلоровского разложения целой функции $G_{m,\zeta}(z)$ вокруг начала, то

для любого $R > 0$, пока произвольного, при $|z| \leq \frac{R}{e}$ и

$$n = \left[\frac{C_1 R}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right] + 1,$$

$$\left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq 2\delta,$$

где $0 < C_1 < 3$ — абсолютная постоянная.

Для оценки $e^{-|x|^\lambda} \left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right|$ вне $|x| < \frac{R}{e}$ заметим, прежде всего, что для полинома $P_{n,\zeta}(z)$ имеем, учитывая (1.1.2)

$$|P_{n,\zeta}(z)| \leq 4\delta e^{4m|z|}$$

и для выполнения неравенства

$$e^{-|x|^\lambda} \left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq 2\delta \quad \text{при} \quad |x| \geq \frac{R}{e}$$

достаточно выбрать $R = C_2 m^{\frac{1}{\lambda-1}}$ где $0 < C_2 < 8$.

Таким образом если положить

$$n = \left[C_1 C_2 \left(\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \right] + 1,$$

то полином $P_{n,\zeta}(z)$ при рассматриваемом весе будет отклоняться от функции $(\zeta - x)^{-1}$ на всей вещественной оси не больше, чем на δ .

Теперь утверждение леммы вытекает непосредственно из решения последнего уравнения относительно δ .

п° 1.2. Имея полином, приближающий ядро Коши, теперь нетрудно приблизить и функцию, представляемую интегралом типа Коши.

Пусть $F(\zeta)$ — функция, заданная на отрезке

$$L_R: z = x + i\mu; \quad \mu > 0; \quad -R \leq x \leq R.$$

Тогда для ее преобразования Коши

$$I_{L_R}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

имеем

$$E_n \left[I_{L_R}'(x), e^{-|x|^\lambda} \right] \leq \frac{R}{\pi \mu} e^{-c\mu \frac{\lambda-1}{\lambda}} \max_{\zeta \in L_R'} |F(\zeta)|,$$

что легко проверить, оценив весовую разность

$$e^{-|x|^\lambda} |I_{L_R}'(x) - P_n(x)|:$$

здесь

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(\zeta) P_{n,\zeta}(z) d\zeta,$$

где $P_{n,\zeta}(z)$ — полином, построенный в предыдущей лемме.

Для приближения интеграла, распространенного по отрезку

$$L_R: z = x - i\mu; \mu > 0; -R \leq x \leq R$$

получим аналогичное неравенство с другим полиномом.

§ 2. Весовое полиномиальное приближение дифференцируемых функций

н° 2.1. Теорема 1*

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на всей оси

$$|f(x)| < 1 \text{ при } -\infty < x < \infty \text{ и}$$

$$\max_{-x < f < x} |f'(t)| \leq M(x), \text{ тогда при } \lambda > 1$$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A \left\{ \exp \left[- \left(M^{-1} \left(n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right) \right)^\lambda \right] + \frac{\ln^2 n}{n^\lambda} \right\},$$

где λ — любое число в пределах $0 < \lambda < \frac{\lambda-1}{\lambda}$, постоянная A не зависит от n .

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $M(x) > 1$.

Распространим функцию $f(x)$ с действительной оси на всю плоскость, определив ее в точке $z = x + iy$ равенством $f(z) \equiv f(x)$.

Через D обозначим полосу $|\operatorname{Im} z| \leq \mu$; L — ее граница; D_R — прямоугольник $|x| \leq R$; $|y| \leq \mu$, ограниченный отрезками L_R и L'_R и сторонами K_R и K'_R параллельными оси y ; $L_R + L'_R = L$; $K_R + K'_R = \dots$

Для функции $f(z)$ имеем следующее интегральное представление, являющееся аналогом интеграла Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\xi)}{\zeta-z} d\bar{\xi} d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } z \notin \bar{D}_R \\ f(z) & \text{при } z \in D_R \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$.

* Формулировки теорем 1 и 2 были опубликованы в заметке [6].

Докажем, что при надлежащем выборе толщины полосы μ двойной интеграл может быть сделан меньше выбранного числа δ . С этой целью обозначим через $S_{R,x}$ отрезок действительной оси $E(|t| \leq R + \mu) \times E(|t - x| \leq \mu)$ и через $Q_{R,x}$ дополнение $S_{R,x}$ до отрезка $[-R, R]$. Тогда

$$\left| \iint_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} \right| \leq \int_{Q_{R,x}} M(\zeta) d\zeta \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d\eta}{|\zeta - z|} + \\ + \iint_{D_{R,x}} \frac{M(\zeta) d\zeta d\eta}{|\zeta - z|} = I_1 + I_2,$$

где $D_{R,x}$ — прямоугольник $|\eta| \leq \mu, \zeta \in S_{R,x}$. Теперь $I_1 \leq C_3 M(R) \mu \ln \frac{R}{\mu}$,

C_3 — абсолютная постоянная.

Для оценки I_2 пользуемся следующим утверждением:

Из всех областей B площади A максимум интегралу $\iint_{\zeta \in B} \frac{d\zeta d\eta}{|\zeta - z|}$

сообщает круг $|\zeta - z| \leq \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Для нашего случая $I_2 \leq C_4 M(R) \mu$; C_4 — абсолютная постоянная. Таким образом, чтобы было всюду

$$\frac{1}{2\pi} \left| \iint_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta \right| \leq \delta \quad (2.1.2)$$

достаточно положить

$$C_3 M(R) \mu \ln \frac{R}{\mu} = \delta, \quad (2.1.3)$$

т. е.

$$\mu = \frac{C_3 \delta}{M(R) \ln \frac{R}{\delta}}. \quad (2.1.4)$$

C_5 и C_6 — абсолютные постоянные.

Для дальнейшего нам необходима также оценка интеграла

$$I_{K_R}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R} \frac{f(t) dt}{t - x} = I_{K_R}' + I_{K_R}''.$$

Для I_{K_R}' имеем

$$I_{K_R}' = \frac{1}{2\pi i} f(R) \int_{-\mu}^{\mu} \frac{i\eta}{R - x + i\eta} d\eta = \frac{f(R)}{\pi} \arctg \frac{\mu}{R - x}.$$

Аналогично вычисляем I_{K_R} . Таким образом

$$|I_{K_R}(x)| \leq 1 \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty$$

и, в силу (2.1.4)

$$|I_{K_R}(x)| \leq \delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1. \quad (2.1.5)$$

Учитывая (2.1.1) и (2.1.2) получим

$$|I_{L_R}(x) + I_{K_R}(x) - f(x)| \leq \delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1,$$

откуда, в силу (2.1.5), имеем

$$|I_{L_R}(x) - f(x)| \leq 2\delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1.$$

Последнее неравенство с учетом п. 1.2, дает

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq 2\delta + E_n(\lambda, \mu, R) \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1,$$

где

$$E_n(\lambda, \mu, R) = \frac{R}{\pi\mu} e^{-C\mu n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}$$

С другой стороны вне отрезка $|x| \leq R-1$ вещественной оси имеем

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq E_n(\lambda, \mu, R) + C_7 e^{-R^\lambda}$$

и, следовательно,

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq C_8 (\delta + E_n + e^{-R^\lambda}) \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty.$$

Это неравенство справедливо для всех значений δ и R , которые сейчас выберем оптимальным образом.

Покажем, что сумма первых двух слагаемых в правых скобках последнего неравенства при надлежащем выборе δ не превосходит

$$C_9 M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n.$$

В самом деле, положим

$$E_n = \frac{R}{\pi\mu} e^{-C\mu n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} = \frac{M(R)}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}.$$

Решив это уравнение относительно μ и учитывая, что в дальнейшем выбор R будет таким, что $\frac{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{M(R)} \rightarrow \infty$, а так же соответствующее значение δ по (2.1.3), получим

$$\delta + E_n \leq C_9 M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n.$$

Теперь можем написать

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A \ln \left(M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n + e^{-R^\lambda} \right),$$

где A не зависит от n .

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что правая часть нужной нам оценки является мажорантой для полученной нижней грани, в чем легко убедиться, положив $M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = n^*$, где κ — любое число в пределах $0 < \kappa < \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

п° 2.2. При конкретном задании роста аппроксимируемой функции можно дать в явном виде более точную оценку для убывания наилучших приближений.

Так, например, если $M(R) = R^\alpha$, то

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} (\ln n)^{\frac{\alpha}{\lambda} + 2}.$$

При $M(R) = e^{R^\alpha}$; $\alpha < \lambda$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} e^{(\ln n)^{\frac{\alpha}{\lambda}}} \cdot \ln^2 n \left(\leq \frac{A(\varepsilon)}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}-\varepsilon}}; \text{ где } \varepsilon - \text{любое малое} \right).$$

Если $M(R) = e^{R^\alpha}$; $\alpha > \lambda$;

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq \frac{A(\varepsilon)}{(\ln n)^{\frac{\lambda}{\alpha}-\varepsilon}} \left(\leq \frac{A(\varepsilon, N)}{(\ln n)^N} \right),$$

где $\varepsilon > 0$ как угодно мало, $N > 0$ как угодно велико.

п° 2.3. В случае когда растет не только производная аппроксимируемой функции, но и сама функция, и для более общей весовой функции имеет место

Теорема 2. Пусть $\hat{h}(x)$ — произвольная четная функция удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{|x|} \ln \frac{1}{\hat{h}(x)} = \varphi(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$x = \vartheta(y)$ — функция, обратная к $y = x\varphi(x)$. Пусть, далее, $\max_{-x \leq t \leq x} |f(t)| \leq M_1(x)$; $\max_{-x \leq t \leq x} |f'(t)| \leq M_2(x)$; $M_1(x) \cdot \hat{h}(x) = M_3(x)$.

Тогда

$$E_n(f, h) \leq A \{ M_3 [M_2^{-1} (\vartheta(n)^{1-\kappa})] + [\vartheta(n)]^{-\kappa} \},$$

где κ — любое число в пределах $0 < \kappa < 1$; A — не зависит от n .

Доказательство теоремы 1 без больших изменений распространяется и на теорему 2.

Заметим, что из первой или второй теорем в условиях применимости приведенной выше теоремы А) М. М. Джрбашяна получается несколько более слабое утверждение, а именно $E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq Cn^{\frac{1-\lambda}{\lambda} + \varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число.

п° 2.4. Оценки наилучших приближений дифференцируемых функций при произвольном нормально убывающем весе.

В следующих двух теоремах, в качестве веса рассматривается произвольная нормально убывающая функция $h(x)$.

$$\left[\frac{1}{h(x)} \equiv \Phi(x) \in N, \text{ если } \frac{d \ln \Phi(x)}{d \ln x} \uparrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty \right].$$

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 1, только вместо леммы п° 1.1 используется следующая оценка принадлежащая С. Н. Мергеляну и М. М. Джрбашяну*.

$$\text{При } \frac{1}{h(x)} \in N$$

$$E_n\left(\frac{1}{\zeta - x}, h\right) \leq \frac{C|\zeta|}{\eta} \exp\left\{-\frac{C\eta}{1+|\zeta|^2} \nu_n\right\}; \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad \eta \neq 0,$$

здесь

$$\nu_n = \int_0^{C_0 P^{-1}(n)} \frac{P(t) dt}{1+t^2},$$

где $P(t) = -\ln h(x)$; $C > 0$ и $C_0 > 0$ не зависят от n .

Фигурирующие в этой оценке числа ν_n при определенных не существенных дополнительных ограничениях на весовую функцию эквиваленты числам μ_n , приведенной выше теоремы В) М. М. Джрбашяна.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1;

тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \{ h[\psi^{-1}(\nu_n^{1-\kappa})] + \nu_n^{-\kappa} \ln^2 \nu_n \},$$

где $\psi(x) = x^2 M(x)$; x — произвольное число в пределах $0 < x < 1$; A не зависит от n .

* Идею получения этой оценки мне сообщил в устной беседе С. Н. Мергелян.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2; тогда

$$E_n(f, h) \leq A \{M_2[\psi^{-1}(v_n^{1-x})] + v_n^{-x}\},$$

где $\psi(x) = x^2 M_2(x)$; x — произвольное число в пределах $0 < x < 1$; A не зависит от n .

§ 3. Оценка убывания наилучших приближений для нормально убывающего веса в одном классе недифференцируемых функций

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$; $|f(x)| \leq 1$ равна нулю при $|x| > R$ и имеет на отрезке $[-R, R]$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда

$$E_n(f, h) \leq AR^{\frac{3}{2}} \omega\left(v_n^{\frac{1-\epsilon}{2}}\right),$$

где $\epsilon > 0$ — произвольное малое число, A — не зависит от n .

Доказательство. Распространим функцию $f(x)$ с действительной оси на всю плоскость полагая $f(z) \equiv u(z) + iv(z) \equiv f(x)$. Следуя С. Н. Мергеляну [7] введем функции

$$K_\delta(r) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\delta^2} \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) & \text{для } 0 < r \leq \delta \\ 0 & \text{для } r > \delta \end{cases}$$

$$U_\delta + iv_\delta = \Phi_\delta(z) = \iint_{|\zeta-z|<1} f(\zeta) K_\delta(|\zeta-z|) d\zeta d\eta; \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где $\delta < 1$ — некоторое положительное число.

В цитированной выше работе доказываются следующие свойства введенных сейчас функций

1. $|\Phi_\delta(z) - f(z)| \leq \omega(\delta)$ при $|x| < R$;
2. $\left| \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{\partial v_\delta}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial y} + \frac{\partial v_\delta}{\partial x} \right) \right| \leq \frac{12\omega(\delta)}{\delta}$;

3. Если $f(z)$ аналитична в δ -окрестности точки z , то $\Phi_\delta(z) = f(z)$;
- 3*. В нашем случае $\Phi_\delta(z) = 0$ при $|x| > R + \delta$.

Пусть теперь L — граница полосы толщиной 2μ , симметричной относительно действительной оси; D_R — прямоугольник $|y| \leq \mu$; $|x| \leq R$, тогда для усредненной функции $\Phi_\delta(z)$ имеем:

$$\Phi_\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_\delta(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi} \iint_{D_{R+\delta}} \frac{\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{\partial v_\delta}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial y} + \frac{\partial v_\delta}{\partial x} \right)}{\zeta - x} d\zeta d\eta;$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Учитывая перечисленные выше свойства, замечание, сделанное на стр. 8, относительно двойного интеграла и оценки п° 1.2, в применении к весу $\frac{1}{h(x)} \in N$, можем написать:

$$\begin{aligned} E_n(f, h) &\leq h(x) |f(x) - P_n(x)| \leq h(x) |f(x) - \Phi_h(x)| + \\ &+ h(x) |\Phi_h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_h(t) dt}{t-x}| + h(x) \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_h(t) dt}{t-x} - P_n(x) \right| \leq \\ &\leq C \left[\omega(\delta) + \frac{\omega(\delta)}{\delta} \sqrt{\mu R} + \frac{R^2}{\mu} e^{-\frac{\mu^2 \gamma_n}{R^2}} \right], \end{aligned}$$

где C — абсолютная константа.

Пользуясь произвольностью μ и $0 < \delta < 1$, положим $\delta = \sqrt{\mu R}$, тогда

$$E_n(f, h) \leq C \left[\omega(\delta) + \frac{R^2}{\delta} e^{-\frac{\mu^2 \gamma_n}{R^2}} \right].$$

Теперь пусть $\frac{\delta^2}{R^2} \gamma_n = \varepsilon_n$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число. Тогда первое слагаемое справа является главным откуда и следует доказываемое утверждение.

§ 4. Влияние аналитичности аппроксимируемой функции в некоторой области, содержащей действительную ось, а также метрических свойств этой области на скорость убывания наилучших весовых приближений на оси

М. М. Джрбашьяном [2] было установлено, что при весе, обеспечивающем полноту из достаточно быстрого убывания взвешенно-наилучших приближений данной функции следует ее аналитичность в некоторой бесконечной области.

В цитированной работе им устанавливается так же и обратная теорема при дополнительных предположениях относительно весовой функции для полосы. А именно доказывается, что

Если $f(z)$ голоморфна и ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ и если определенная на всей оси $-\infty < x < \infty$ четная функция $y = P(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{x p'(x)}{p(x)} > a > 1 \quad \text{при} \quad x > x_0 > 0,$$

то

$$E_n(f, e^{-p(x)}) \leq A \exp \left\{ -\varepsilon d \int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right\} \quad (n > 1),$$

где $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ — постоянные, не зависящие от n .

В следующих теоремах нас интересует оценка убывания наилучших приближений на оси при произвольном нормально убывающем весе для функций, регулярных в бесконечных областях специального вида и, в частности, в полюсе.

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полосе $|Imz| \leq \frac{a}{2}$; $a < 1$ и такова, что $|f(z)| \leq \lambda(r) |Imz| \leq \frac{a}{2}$, $|z| \geq r$. $1 \geq \lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty^*$.

Тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda \left(a^{\frac{1}{2}} \gamma_n^{\frac{1-x}{2}} \right) + e^{-c\gamma_n^x} \right\},$$

где $0 < x < 1$; A и $C > 0$ не зависят от n .

Доказательство.

Выберем пока произвольное значение $R > 0$ и обозначим через L_R и $L_R^{\pm\infty}$ части границы $|Imz| = \frac{a}{2}$, лежащие соответственно в полосе $Re z \leq R$ и вне этой полосы. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R^{\pm\infty}} \frac{f(t) dt}{t-z} = I_{L_R}(z) + I_{L_R^{\pm\infty}}(z); \quad |Imz| < \frac{a}{2}.$$

Покажем, что интегралы $I_{L_R^{\pm\infty}}(z)$ равномерно ограничены на всей оси.

Имеем для $x = R - \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned} |I_{L_R^{\pm\infty}}(x)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^R \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{f(R+iy) dy}{R-x+iy} \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{-\infty} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R+iy) dy}{R-x+iy} \right| \leq \lambda(R-1) \end{aligned}$$

для $x \geq R - \frac{a}{2}$

* Требование $\lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, повидимому, не существенно и может быть снято.

$$\begin{aligned}
|I_{L_R^\infty}(x)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{R-a} \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R-a-iy) dy}{R-a-x+iy} \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{R-a}^{\infty} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R-a+y) dy}{R-a-x+iy} \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{R-a} \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_R^{R-a} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| \leq \\
&\leq C\lambda(R-a) \leq C\lambda(R-1).
\end{aligned}$$

Таким образом на всей оси $|I_{L_R^\infty}(x)| \leq C\lambda(R-1)$. Та же оценка имеет место для $I_{L_R^{-\infty}}(x)$.

Пользуясь результатом п° 1.2 в применении к весу $\frac{1}{h(x)} \in N$ и интегральным представлением функции $f(z)$, можем написать

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda(R) + \frac{R^2}{a} e^{-\frac{Ca}{1+R^2} \nu_n} \right\},$$

откуда следует утверждение теоремы, если принять $R^2 = a\nu_n^{1-\alpha}$; $0 < \alpha < 1$.

Аналогично доказывается и следующая

Теорема 7. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $\bar{D}$, ограниченной кривыми $L^\pm$: $y = \pm \varphi(x) \downarrow 0$ и $|f(z)| \leq \lambda(r)$; $|z| \geq r$; $z \in D$; $1 > \lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda \left[\psi^{-1}(\nu_n^{1-\alpha}) \right] + e^{-C\nu_n^\alpha} \right\},$$

где $\psi(R) = \frac{R^2}{\varphi(R)}$, $0 < \alpha < 1$, A не зависит от n .

Покажем, что существуют области довольно быстро суживающиеся с двух сторон на действительную ось и регулярные в них функции, для которых второе слагаемое в правой части последней теоремы является большим и следовательно определяет скорость убывания наилучших приближений.

Пользуясь оценками Л. Альфорса [8] об искажении отрезков при конформном отображении областей типа полосы на полосу, легко

получить, что предельная скорость убывания не равной тождественно нулю функции, аналитической в области D теоремы 7 имеет порядок

$-e^{-C_0 \int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)}}$, где $C_0 > 0$ некоторая константа. Для наилучшего приближения такой функции имеем, согласно теореме 7

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ e^{-C_0 \int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^{1-\varepsilon})} \frac{dx}{\varphi(x)}} + e^{-C\nu_n^\varepsilon} \right\}. \quad (4.1)$$

Положим $x = 1 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$; тогда

$$\int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \int_{\frac{1}{2}\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)}^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \frac{\frac{1}{2}\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)}{\varphi\left[\frac{1}{2}\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)\right]}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{2}\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon) = K, \quad (4.2)$$

тогда

$$\int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \frac{K}{\varphi(K)}. \quad (4.3)$$

С другой стороны, учитывая, значение, $\psi(x)$ в теореме 7 и (4.2), имеем

$$\nu_n^{1-\varepsilon} = \left[\frac{4K^2}{\varphi(2K)} \right]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}. \quad (4.4)$$

Теперь, если положить, например, $\varphi(x) = Ce^{-x}$, то из (4.3) и (4.4) следует, что при $n > N_0$ первое слагаемое в правой части (4.1) меньше второго, т. е.

Существуют области, суживающиеся с двух сторон на действительную ось и функции, регулярные в них и стремящиеся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, для которых при нормально убывающем весе и $n > N_0$

$$E_n(f, h) \leq Ae^{-\nu_n^{1-\varepsilon}}$$

A не зависит от n , $\varepsilon > 0$ произвольное малое число.

Վ. Ա. Տոնյան

ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ԿՇՈՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ստացված են գնահատականներ իրական առանցքի վրա կշռվող լավագույն բազմանդամային մոտավորությունների՝

$$E_n(f, h) = \inf_{\{P_n\}} \sup_{-\infty < x < \infty} (h(x) | f(x) - P_n(x) |)$$

թվերի նվազման արագությունը վերաբերյալ, նորմալ նվազող $h(x)$ կշիռների համար մոտարկելի $f(x)$ ֆունկցիաների դանդաղ դասերում:

Առաջնաստիճան է հասնում իրական առանցքը պարունակող որոշ անվերջ տիրույթներում անսխիտիկ ֆունկցիաների կշռվող լավագույն մոտավորությունների նվազման արագությունը առանցքի վրա, նույն կշիռների դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мергелян С. Н. О весовых приближениях многочленами, ДАН СССР, 97, 4, 1954.
2. Джрбашян М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, т. 30 (78) : 3, 1955.
3. Мергелян С. Н. Весовые приближения многочленами. УМН, II, 5, 107, 1955.
4. Ахиезер Н. И. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. УМН, XI, 4/70, 1956.
5. Джрбашян М. М., О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси ДАН СССР, 84, 6, 1952.
6. Тонян В. А. О взвешенно-полиномиальном приближении дифференцируемых функций, на вещественной оси. ДАН СССР, 105, 1955.
7. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, 2 : 48, 1952.
8. L. Ahlfors Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Fenn., N. S. A., т. 1, № 9, 1930.