

Р. С. Оганесян

О гравитационной неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости при наличии магнитного поля

В настоящей работе рассмотрен вопрос о гравитационной неустойчивости плоскопараллельного проводящего жидкого слоя бесконечной длины по отношению к поперечным колебаниям в собственном поле гравитационных сил при наличии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости. Исследование проводилось при помощи математического аппарата магнитной гидродинамики в рамках линейного приближения, предполагая бесконечную электропроводность гравитирующей среды.

Метод исследования в основном близок к методу Чандрасекара и Ферми [1]. Установлено, что рассматриваемый слой устойчив по отношению к поперечным колебаниям любой длины, если напряженность магнитного поля превышает некоторое критическое значение. В противном случае, начиная с некоторого определенного значения длины возмущения слой становится неустойчивым и распадается.

1. Как известно, в астрофизике неоднократно рассматривались устойчивость систем, состоящих из сжимаемой гравитирующей массы в виде плоскопараллельного слоя. Необходимость такого рассмотрения вытекает из того факта, что многие космические системы можно представить приблизительно в виде плоского слоя. На основе исследования неустойчивости слоя в астрофизике делаются космогонические выводы относительно происхождения нашей солнечной системы, Галактики и т. д.

Вообще говоря, исследование устойчивости проводится не только по отношению систем, состоящих из сжимаемой гравитирующей массы, но и по отношению систем, состоящих из несжимаемой (жидкой) массы. Поэтому исследование гравитационной устойчивости (соответственно и неустойчивости) конфигурации в виде жидкого плоскопараллельного слоя в известной мере может оказаться необходимым, потому что найдет возможное применение в астрофизике и, вообще, представляет определенный интерес.

Факт существования магнитных полей в космическом пространстве приводит к необходимости учета электромагнитных сил наряду с

гравитационными. Учет электромагнитных сил в космических условиях может резко изменить картину движения и гравитационной неустойчивости, поскольку в космическом пространстве материя представляет собой высокоионизированную плазму и обладает малой плотностью.

В последнее время появился ряд работ о равновесии и устойчивости космических невращающихся жидких систем (шар, эллипсоид, цилиндр и т. д.) при наличии магнитного поля [2, 3, 4]. Как мы увидим далее, учет магнитного поля резко изменит картину гравитационной неустойчивости проводящего жидкого слоя. Нами будет рассмотрен тот случай, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости слоя.

Представим себе жидкий плоскопараллельный слой бесконечной длины с толщиной $2h$, перпендикулярно к плоскости которого действует однородное магнитное поле напряженности H_0 . Выбираем систему прямоугольных координат так, чтобы горизонтальная ось x совпала с невозмущенным верхним уровнем слоя, а ось y была направлена вертикально вверх.

Предположим, что жидкий слой подвергается некоторому малому возмущению симметрично относительно центральной плоскости $y = -h$. Уравнение возмущенной поверхности слоя в выбранной системе координат напишем в виде:

$$y = f(x) \quad (1)$$

$f(x)$ — малое ($|f(x)| \ll h$), но произвольное возмущение.

По теореме Фурье функция $f(x)$ может быть разложена в ряд, состоящий из членов вида $a \cos kx$, где a — амплитуда, k — волновое число, принимающее любое значение в интервале $(0, \infty)$.

Таким образом, каждый определенный член этого ряда типа $a \cos kx$ представляет отдельную гармонику, так что исследование устойчивости или неустойчивости слоя можно провести путем рассмотрения отдельных гармоник.

Итак, предположим, что уравнение возмущенной поверхности имеет вид:

$$y = a \cos kx. \quad (2)$$

Ввиду симметричности задачи относительно центральной плоскости $y = -h$ можно ограничиться рассмотрением только верхнего полуслоя. Чтобы судить о гравитационной устойчивости слоя по отношению к возмущениям типа (2), необходимо подсчитать изменение суммарной (потенциальной и магнитной) энергии, обусловленное перераспределением жидкой массы вследствие возмущения. Если изменение суммарной энергии окажется положительным, тогда слой будет устойчивым. В противном случае, слой становится неустойчивым и распадается на отдельные образования. Другими словами, система гравитирующей массы может распадаться на отдельные образования в том случае, если этот распад приводит систему к энергетически более выгодному состоянию.

2. Для подсчета изменения потенциальной энергии следует уста-

новить гравитационный потенциал возмущенного слоя, свободная поверхность которого определяется уравнением (2). Гравитационный потенциал внутри ($\rho \neq 0$) и вне ($\rho = 0$) возмущенного слоя можно найти путем решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 4\pi G\rho$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

при определенных граничных условиях, о которых будем говорить ниже. Здесь G —гравитационная постоянная, ρ —макроскопическая плотность жидкой массы, которая считается величиной постоянной.

Решения уравнений (3) соответственно будем искать в виде:

$$V = V_0 + \delta V; \quad U = U_0 + \delta U. \quad (4)$$

Где V_0 и U_0 являются решениями уравнений (3) в равновесном состоянии, которые в выбранной системе координат будут:

$$V_0 = 2\pi G\rho(h+y)^2; \quad (5)$$

$$U_0 = 4\pi G\rho y + 2\pi G\rho h^2.$$

и δV и δU являются некоторыми добавками к V_0 и U_0 . Можно представить, что эти добавочные потенциалы появляются вследствие наличия некоторой „возмущенной массы“, располагающейся на поверхности недеформированного слоя с поверхностной плоскостью [5, 6]:

$$\sigma = \rho y(x) = \rho a \cos kx. \quad (6)$$

В подобном представлении законно требовать, чтобы добавочные потенциалы, удовлетворяли уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \delta V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta V}{\partial y^2} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \delta U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta U}{\partial y^2} = 0,$$

и граничным условиям вида:

$$(\delta V)_{y=0} = (\delta U)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial \delta V}{\partial y} \right)_{y=0} - \left(\frac{\partial \delta U}{\partial y} \right)_{y=0} = -4\pi G\sigma. \quad (8)$$

Решения для δV и δU можно представить в виде:

$$\delta V = aA \cosh k(h+y) \cos kx; \quad (9)$$

$$\delta U = aB e^{-ky} \cos kx,$$

где A и B — неизвестные константы, подлежащие определению (δV дол-

жен удовлетворять также условию $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$. Граничные условия (8) с точностью до первой степени амплитуды приводят к следующей системе уравнений относительно неизвестных констант A и B :

$$A \operatorname{ch} kh = B; \quad (10)$$

$$A \operatorname{ch} kh + B = -\frac{4\pi G \rho}{k},$$

откуда

$$A = \frac{B}{\operatorname{ch} kh}; \quad B = -\frac{4\pi G \rho}{k} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{th} kh}. \quad (11)$$

Таким образом, потенциал возмущенного слоя в рассматриваемом приближении будет:

$$V(x, y) = 2\pi G \rho (h + y)^2 + a A \operatorname{ch} k (h + y) \cos kx; \quad (12)$$

$$U(x, y) = 2\pi G \rho h^2 + 4\pi G \rho h y + a B e^{-ky} \cos kx,$$

где A и B определяются через (11).

Изменение потенциальной энергии можно подсчитать несколькими способами. Однако, более целесообразно (как это было показано в работе [7]), изменение потенциальной энергии, приходящееся на единицу длины слоя, подсчитать по формуле [6]:

$$\delta \Omega = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda |V|_{y(x)}^2 dx, \quad (13)$$

где $|V|_{y(x)}$ — выражение потенциала на профиле свободной поверхности, а λ — поверхностная плотность так называемой возмущенной массы.

Подставляя соответствующие значения из (12), (11), (6), (2) в (13), получим:

$$\delta \Omega = \frac{1}{2\lambda} \left\{ 2\pi G \rho \int_0^\lambda (h + a \cos kx)^2 \rho a \cos kx - \frac{4\pi G \rho}{k \operatorname{ch} kh} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{th} kh} \int_0^\lambda \operatorname{ch} k (h + a \cos kx) \rho a \cos kx dx \right\}.$$

С точностью до второго порядка относительно амплитуды, найдем:

$$\delta \Omega = \pi G \rho^2 h a^2 \left[1 - \frac{1}{z(1 + \operatorname{th} z)} \right], \quad (14)$$

где введено обозначение

$$z = kh = \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

3. Теперь переходим к подсчету изменения магнитной энергии. В магнитной гидродинамике установлено, что, если в среде с бесконечной электропроводностью существует магнитное поле, то перемещение магнитных силовых линий относительно среды невозможно. Следовательно, магнитные силовые линии деформируются, оставаясь как бы „приклеенными“ к среде [8]. Колебания магнитных силовых линий приводят к изменению напряженности магнитного поля, следовательно, и к изменению магнитной энергии.

Предположим, что магнитное поле направлено вертикально вверх по оси y . Изменение напряженности магнитного поля происходит как внутри, так и вне рассматриваемой среды. Существует определенная связь между изменением напряженности магнитного поля и вектором смещения $\vec{\xi}$, характеризующим перераспределение жидкой массы. В несжимаемой среде вектор $\vec{\xi}$ удовлетворяет уравнению $\text{div} \vec{\xi} = 0$ [1].

Следовательно, вектор $\vec{\xi}$ можно представить в виде:

$$\vec{\xi} = -\text{grad} \Phi. \quad (15)$$

Где Φ является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

Установив поле вектора смещения $\vec{\xi}$, можно найти изменение вектора напряженности магнитного поля внутри слоя \vec{h}_i по формуле:

$$\vec{h}_i = (\vec{H}_0 \text{ grad}) \vec{\xi} \quad (17)$$

установленной в магнитной гидродинамике [6]. Напряженность магнитного поля внутри возмущенного слоя будет:

$$\vec{H}_i = \vec{H}_0 + (\vec{H}_0 \text{ grad}) \vec{\xi}. \quad (18)$$

Изменение вектора напряженности магнитного поля (\vec{h}_e) вне рассматриваемой среды можно представить в виде:

$$\vec{h}_e = -\text{grad} \Psi, \quad (19)$$

где $\Psi = \Psi(x, y)$ есть магнитоэстатический потенциал, являющийся решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

Вне возмущенного слоя напряженность будет:

$$\vec{H}_e = \vec{H}_0 - \text{grad} \Psi. \quad (21)$$

Представим решение (16) в виде:

$$\Phi(x, y) = A \text{ch} k(h + y) \cos kx, \quad (22)$$

где A — некоторая константа, подлежащая определению.

Соответствующие компоненты по осям координат вектора смещения $\vec{\xi}$, согласно (15) будут:

$$\xi_x = Akchkh(h+y)\sin kx; \quad (23)$$

$$\xi_y = -Akshkh(h+y)\cos kx.$$

На уровне $y=0$, компонента ξ_y должна совпадать с $a\cos kx$, т. е.

$$\{-Akshkh(h+y)\cos kx\}_{y=0} = a\cos kx.$$

Отсюда найдем неизвестную константу:

$$A = \frac{a}{kshkh}. \quad (24)$$

С помощью (17), (23) и (24) найдем:

$$h_{ix} = H_{oy} \frac{\partial \xi_x}{\partial y} = -akH_0 \frac{\text{sh}k(h+y)}{\text{sh}kh} \sin kx; \quad (25)$$

$$h_{iy} = H_{oy} \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = akH_0 \frac{\text{ch}k(h+y)}{\text{sh}kh} \cos kx.$$

Изменение магнитной энергии внутри возмущенного слоя, приходящееся на единицу длины, подсчитывается по формуле:

$$\delta M_l = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \int_{-h}^0 (\vec{H}_0 + \vec{h}_i)^2 dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy \right\} dx.$$

Подставляя в последнюю формулу соответствующие значения из (25), получим:

$$\begin{aligned} \delta M_l = & \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^0 H_0^2 dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy + \frac{2akH_0^2}{\text{sh}kh} \int_{-h}^0 \text{ch}k(h+y) \cos kx dy + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 H_0^2 k^2}{\text{sh}^2 kh} \int_{-h}^0 \text{sh}^2 k(h+y) \sin^2 kx + \text{ch}^2 k(h+y) \cos^2 kx dy \right\} dx. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование с точностью до a^2 включительно, найдем:

$$\delta M_l = \frac{a^2 z \text{ch}z H_0^2}{8\pi h \text{sh}z} + \frac{a^2 z \text{ch}z H_0^2}{16\pi h \text{sh}z}, \quad (26)$$

где $z = kh$.

Представим решение уравнения (21) для магнитостатического потенциала вне возмущенного слоя в виде:

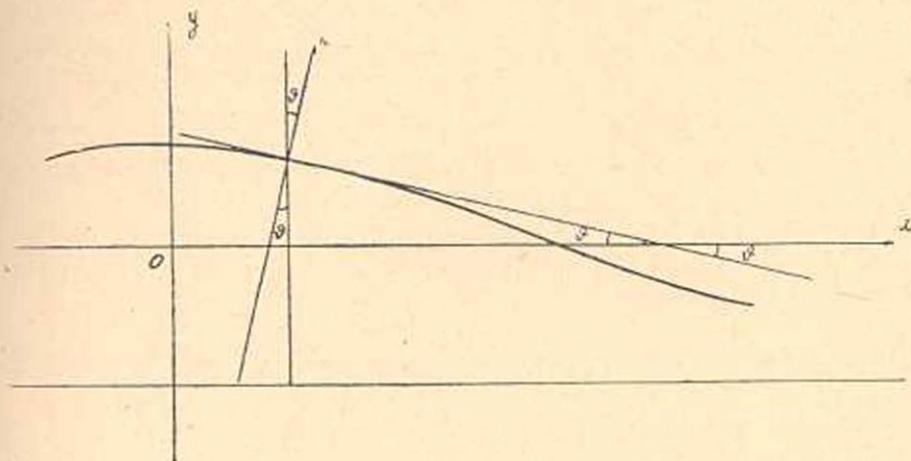
$$\Psi(x, y) = -Bae^{-ny} \cos kx. \quad (27)$$

Константу B найдем из условия непрерывности нормальной компоненты:

$$\left. \left\{ h_{ix} \cos(\hat{n}x) + (H_0 + h_{iy}) \cos(\hat{n}y) \right\} \right|_{y(x)} =$$

$$= \left. \left\{ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos(\hat{n}x) + H_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos(\hat{n}y) \right\} \right|_{y(x)}. \quad (28)$$

Легко видеть, что (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

$$(\hat{n}y) = \nu; \quad (\hat{n}x) = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

где ϑ есть угол, образованный касательной с осью x .
При малых амплитудах:

$$-\operatorname{tg} \vartheta = -\vartheta = \frac{dy}{dx} = -ak \sin kx.$$

Следовательно,

$$\cos(\hat{n}x) = \sin(ak \sin kx) = ak \sin kx + \dots \quad (29)$$

$$\cos(\hat{n}y) = \cos(ak \sin kx) = 1 - \frac{a^2 k^2 \sin^2 kx}{2!} + \dots$$

Из (28) и (29) с точностью до a , найдем:

$$B = -H_0 \operatorname{cth} kh. \quad (30)$$

Компоненты вектора \vec{h}_e примут вид:

$$h_{ey} = akH_0 \operatorname{th} z e^{-ky} \cos kx; \quad (31)$$

$$h_{ex} = akH_0 \operatorname{th} z e^{-ky} \sin kx.$$

Изменение магнитной энергии вне гравитирующей среды можно подсчитать по формуле:

$$\delta M_e = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \left[\int_{\cos \alpha z}^{\infty} (\vec{H}_0 + \vec{h}_e)^2 dy - \int_0^{\infty} H_0^2 dy \right] dy \right\}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) найдем:

$$\delta M_e = -\frac{a^2 H_0^2 z \operatorname{ch} z}{8\pi h \operatorname{sh} z} + \frac{a^2 H_0^2 z \operatorname{cth}^2 z}{16\pi h}. \quad (33)$$

Складывая (26) и (33), получим изменение магнитной энергии:

$$\delta M = \delta M_i + \delta M_e = \frac{a^2 H_0^2}{16\pi h} z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z). \quad (34)$$

4. Объединяя результаты (14) и (34), получим общее изменение гравитационной и магнитной энергии:

$$\delta E = \delta \Omega + \delta M = \pi G \rho^2 h a^2 F_s(z), \quad (35)$$

где введено обозначение

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1 + \operatorname{th} z)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z); \quad (36)$$

(в дальнейшем индекс „нуль“ при H не пишется).

$$H_s = 4\pi \rho h \sqrt{C}. \quad (37)$$

H_s — характеристическая константа, имеющая размерность напряженности магнитного поля.

Об устойчивости или неустойчивости слоя можно судить по знаку функции $F_s(z)$. При некоторых конкретных значениях параметра H/H_s вид кривых $F_s(z)$ представлен на фиг. 2. Асимптотические значения функции $F_s(z)$ имеют следующий вид:

$$1. \text{ при } z \rightarrow \infty \quad F_s(z) \rightarrow \infty; \quad (38)$$

$$2. \text{ при } z \rightarrow 0$$

$$F_s(z) = 1 - \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \frac{1}{1+z} + \frac{\left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1}{z(1+z)} \quad (39)$$

Из последнего выражения видно, что при малых z знак функции зависит от отношения H/H_s .

Действительно, из (38) и (39) видно, что

$$\text{при } H/H_s \geq 1 \quad F_s(z) > 0, \text{ для любых } z;$$

$$\text{при } H/H_s < 1 \quad F_s(z) > 0, \text{ если } z > z_s;$$

$$F_s(z) < 0, \text{ если } z < z_s,$$

где z_s является единственным положительным корнем уравнения:

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1 + \operatorname{th} z)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z) = 0. \quad (40)$$

Решение этого уравнения можно провести графическим путем. Однако, имея в виду, что при $H_0 = 0$, $z_s = 0,64$ и при стремлении H_0 к H_s численное значение корня z_s уменьшается (см. также фиг. 2), можно

приблизительно удовлетвориться решением следующего алгебраического уравнения второй степени относительно z :

$$xz^2 + \beta z + c = 0$$

$$z = 1 + \frac{\delta}{3} \left(\frac{H}{H_s} \right)^2; \quad \beta = \left[1 + 2 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad c = \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1,$$

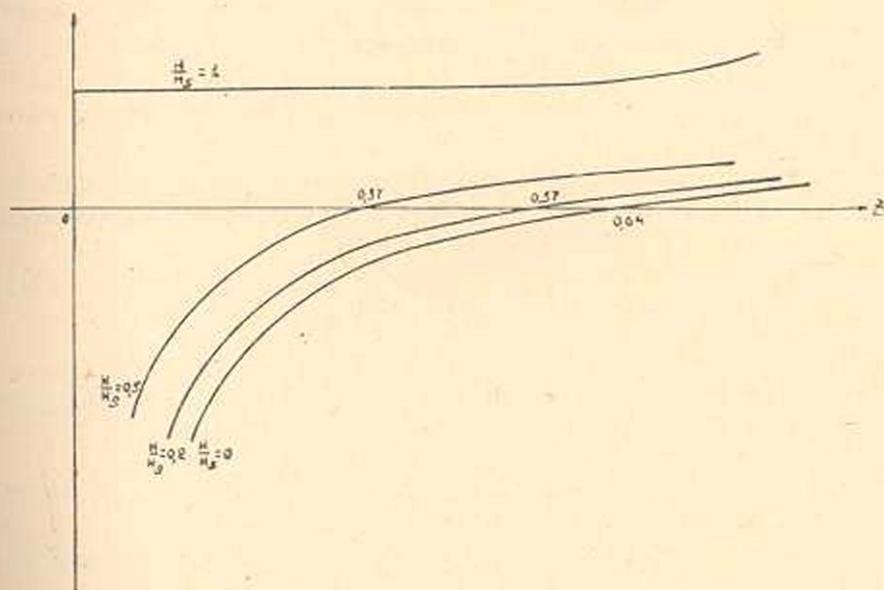
которое получается путем замены гиперболических функций, встречающихся в уравнении (40), их главными значениями при $z \rightarrow 0$.

Полученные выше результаты приводят к следующим выводам:

а) При $H > H_s = 4\pi\rho h\sqrt{G}$ слой устойчив по отношению к поперечным возмущениям любой длины, поскольку при этом деформация сопровождается увеличением суммарной (гравитационной и магнитной) энергии ($\delta E > 0$). Иными словами, все гармоники возмущения в данном случае являются устойчивыми.

б) При $H < H_s = 4\pi\rho h\sqrt{G}$ могут появляться как устойчивые, так

$\xi(z)$



Фиг. 2.

и неустойчивые гармоники. Все гармоники для которых $z < z_s$, являются неустойчивыми, они приводят к уменьшению суммарной энергии. Гармоники, удовлетворяющие условию $z > z_s$, устойчивы. Другими словами, слой становится неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям, если длина периодической структуры свободной поверхности превышает некоторое критическое значение ($\lambda > \lambda_s$).

где λ_s определяется формулой:

$$\lambda_s = \frac{2\pi h}{z_s},$$

z_s , следовательно и λ_s зависят от параметров h , H/H_s , и не зависят от плотности среды.

в) При $z = z_s$, $\delta E = 0$, следовательно, слой с вполне определенной длиной ($\lambda = \lambda_s$), периодической структуры свободной поверхности представляет собою конфигурацию изоэнергетическую по сравнению с плоским слоем.

г) При $H \rightarrow H_s$ область неустойчивых гармоник сокращается (см. фиг. 2) и при $H = H_s$ появление таких гармоник исключается.

Важно отметить, что изменение магнитной энергии положительно ($\delta M > 0$) при любых λ , следовательно, неустойчивость слоя обусловлена характерной особенностью дальнего и коллективного взаимодействия гравитационных сил [9].

Таким образом, магнитное поле оказывает стабилизирующее воздействие, передает жидкому проводящему слою гибкость, и деформация при $H > H_s$ приобретает как бы «упругий» характер.

5. Целесообразно доказать, что все устойчивые гармоники ($z > z_s$) приводят к периодическому изменению амплитуды во времени, а при неустойчивых гармониках амплитуда неограниченно возрастает и слой распадается на отдельные части.

Предполагая зависимость амплитуды от времени, найдем уравнение движения с помощью функции Лагранжа.

Кинетическую энергию движения жидких частиц, приходящуюся на единицу длины возмущенного слоя, можно вычислить по формуле:

$$\delta T = \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \int_{-h}^{a \cos kx} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (41)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей, который, ввиду предположения несжимаемости и невязкости жидкой массы, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (42)$$

Потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ должен удовлетворять условию

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0,$$

означающему отсутствие вертикальных скоростей жидких частиц на центральной плоскости $y = -h$. Учитывая справедливость последнего требования, решение (42) представим в виде:

$$\varphi(x, y) = A \cosh k(h + y) \cos kx. \quad (43)$$

Постоянную A можно определить из условия:

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} = \frac{dy}{dt}, \quad \text{где } y = a \cos kx.$$

Отсюда найдем

$$A = -\frac{1}{kshkh} \frac{da}{dt}. \quad (44)$$

Следовательно, решение (43) примет вид:

$$\varphi(x, y) = -\frac{da \operatorname{ch} k(h+y)}{dt \operatorname{ch} kh} \operatorname{cosh} kx. \quad (45)$$

Находя отсюда $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и подставляя в выражение кинетической энергии (41), получим:

$$\delta T = \rho \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 kh} \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^{\operatorname{ch} kx} [\operatorname{sh}^2 k(h+y) \cos^2 kx + \operatorname{ch}^2 k(h+y) \sin^2 kx] dx dy.$$

Проводя вычисления в рассматриваемом приближении, найдем:

$$\delta T = \frac{h\rho \operatorname{ch} z}{4z \operatorname{sh} z} \left(\frac{da}{dt} \right)^2. \quad (46)$$

С помощью (46) и (36) составим функцию Лагранжа:

$$L = \delta T - \delta E = \frac{h\rho}{4z} \operatorname{cth} z \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \pi G \rho^2 h F_s(z) a^2.$$

Имея в виду уравнения движения в обобщенных координатах в форме Лагранжа, получим:

$$\ddot{a} + 4\pi G \rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z) a = 0. \quad (47)$$

Решение этого уравнения будет:

$$a = \operatorname{const} \cdot \exp \{ \pm p t \}, \quad (48)$$

где

$$p^2(z) = -4\pi G \rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z). \quad (49)$$

На фиг. 3 представлен вид кривых функции $(4\pi G \rho)^{-1} p^2(z)$ при некоторых конкретных значениях параметра H/H_s .

Для устойчивых гармоник ($z > z_s$), $p(z)$ будет чисто мнимой величиной. Это приводит к периодическому изменению амплитуды во времени. А периодичность наступает при $z < z_s$, так как $p(z)$ становится действительной величиной.

Очень существенно отметить тот факт, что среди неустойчивых гармоник ($z < z_s$) имеется гармоника, обладающая максимальной неустойчивостью.

Действительно, из (49) видно, что $p^2(z) = 0$ при $z = 0$ и $z = z_s$ следовательно, существует такое значение z_m , при котором функция $p(z)$ максимальна (см. также фиг. 3), а z_m является единственным положительным корнем уравнения:

$$\frac{d}{dz} \{ z \operatorname{th} z F_s(z) \} = 0. \quad (50)$$

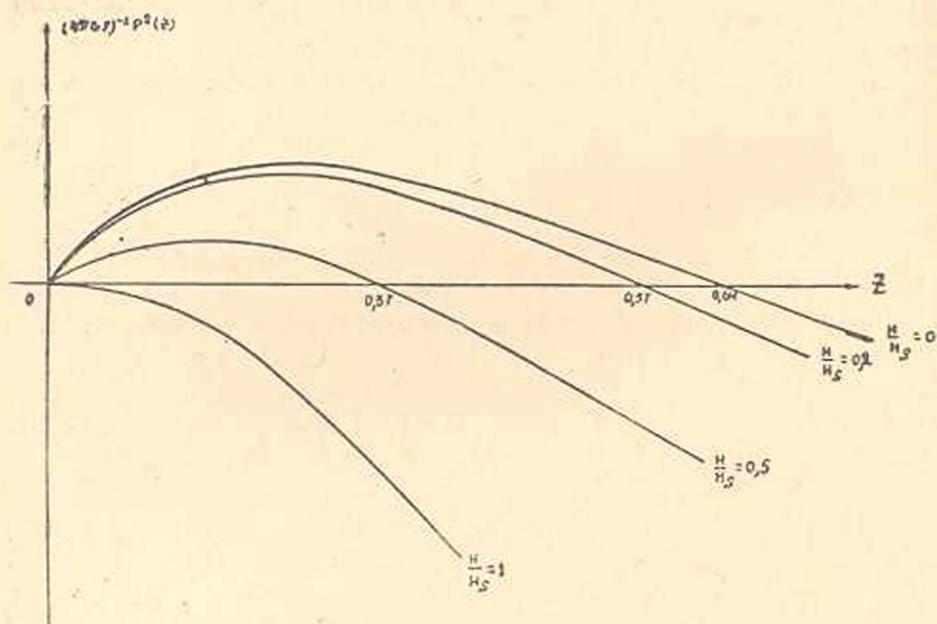
Выполняя дифференцирование, заменяя гиперболические функции первыми членами разложения при малых z и отбрасывая члены содержащие z выше второй степени, получим:

$$\alpha' z^2 + \beta' z + C = 0$$

где

$$\alpha' = \left[2 + 3 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad \beta' = \left[3 + 3 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad C = \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1.$$

Искомое значение z_m приблизительно будет положительным корнем этого уравнения. Для нахождения более точного значения z_m придется уравнение (50) решать графическим методом.



Фиг. 3.

Эта гармоника называется максимально неустойчивым, так как она проявляется прежде всего среди неустойчивых гармоник и ее амплитуда нарастает наиболее быстро.

Можно утверждать, что $\lambda_m = \frac{2\pi h}{z_m}$ приблизительно выражает горизонтальную длину тех «частей», на которые распадается слой. Максимальное значение функции $p(z)$ (обозначим его через p_m) представляет время релаксации, необходимое для проявления неустойчивости.

6. Рассмотрим конкретный пример для иллюстрации полученных результатов. Возьмем Галактический слой, принимая $h = 100$ пс; $\rho = 2 \cdot 10^{-23}$ г/см³.

При этом найдем:

$$H_s = 4\pi\rho h \sqrt{C} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ гаусс.}$$

Следовательно, Галактический слой будет устойчивым по отношению к поперечным возмущениям любой длины, если $H > 2 \cdot 10^{-5}$ гаусс. Когда $H < 2 \cdot 10^{-5}$ гаусс и $\lambda > \lambda_s$, наступает неустойчивость.

Для некоторых конкретных значений отношения H/H_s , найдены

безразмерные величины z_s ; z_m ; $p_m (4\pi G\rho)^{-1/2}$ и соответствующие им значения λ_s ; λ_m ; p_m^{-1} (см. таблицы 1 и 2).

Анализ численных данных, приведенных в таблице 2, действительно показывает, что с ростом напряженности магнитного поля от

Таблица 1

Зависимость безразмерных величин z_s ; z_m ; $p_m (4\pi G\rho)^{-1/2}$ от отношения H/H_s

H/H_s	z_s	z_m	$p_m (4\pi G\rho)^{-1/2}$
0	0,64	0,3	0,371
0,1	0,62	0,276	0,366
0,2	0,58	0,261	0,351
0,5	0,37	0,175	0,256
0,6	0,29	0,141	0,212
0,9	0,07	0,037	0,0648

Таблица 2

Зависимость λ_s ; λ_m ; p_m^{-1} от напряженности магнитного поля

H (гаусс)	λ_s (парсек)	λ_m (парсек)	p_m^{-1} (годы)
0	$0,981 \cdot 10^3$	$2,093 \cdot 10^3$	$2,085 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{-5}$	$1,013 \cdot 10^3$	$2,275 \cdot 10^3$	$2,114 \cdot 10^7$
$0,4 \cdot 10^{-5}$	$1,083 \cdot 10^3$	$2,406 \cdot 10^3$	$2,205 \cdot 10^7$
10^{-5}	$1,637 \cdot 10^3$	$3,588 \cdot 10^3$	$3,017 \cdot 10^7$
$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,165 \cdot 10^3$	$4,454 \cdot 10^3$	$1,650 \cdot 10^7$
$1,8 \cdot 10^{-5}$	$8,971 \cdot 10^3$	$1,697 \cdot 10^4$	$1,150 \cdot 10^8$

нуля до критического значения H_s возрастают длины неустойчивых волн, максимально неустойчивых гармоник и время релаксаций, необходимых для проявления неустойчивости.

Если во всех предыдущих результатах приравнять $H = 0$, получим решение задачи о гравитационной устойчивости (соответственно и неустойчивости) слоя в собственном поле гравитационных сил. При этом обычная неустойчивость наступает тогда, когда длина возмущения почти в пять раз превышает толщину слоя ($\lambda_x = 4,9d$; d — толщина слоя). Длина волны максимально устойчивой гармоники — порядка $\lambda_m = 10,9d$, а время релаксации — порядка $2,085 \cdot 10^7$ лет.

Отношение $\lambda_m/d = 10,9$ показывает, что образования, возникающие в результате гравитационной неустойчивости слоя, далеко не имеют круговых сечений. Они вытянуты вдоль слоя [11].

Постепенное увеличение плотности Галактического слоя может ускорить время, необходимое для развития неустойчивости. Если возраст рассматриваемого слоя превышает вычисленное время развития неустойчивости, необходимо предположить о существовании сильных магнитных полей.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Власову за ценные указания.

Московский Государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ленинградский педагогический институт
им. М. М. Налбандяна.

Բ. Ս. Հովհաննիսյան

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ՇԵՂՈՒԿ ՀԱՂՈՐԴԻԶ
ՀԱՐԹ ԶՈՒԳԱԶԵՌ ՇԵՐՏԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված է անասման երկարություն ունեցող հեղուկ հագորդիչ շերտի գրավիտացիոն անկայունության հարցը լաճական տատանումների նկատմամբ իր սեփական գրավիտացիոն և շերտին ուղղահայաց մագնիսական դաշտերում: Ուսումնասիրությունը կատարված է մագնիսական հիդրոդինամիկայի մաթեմատիկական ապարատի օգնությամբ, դժային մոտավորության շրջանակներում, հեղուկ գրավիտացիոն մասսային վերադրելով անասման մեծ էլեկտրահարգունակություն:

Ուսումնասիրությունը կատարված է հիմնականում Չանդրասեկարի և Ֆերմիի մեթոդով [1]: Հոդվածում ապացուցված է, որ ուսումնասիրվող շերտը կալուն է ցանկացած ալիքի երկարություն ունեցող լաճական տատանումների նկատմամբ, եթե միայն մագնիսական դաշտի լարվածությունը գերազանցում է մի որոշակի կրիտիկական մեծությունից: Հակառակ դեպքում, սկսած ալիքի երկարության մի որոշակի արժեքից, շերտը դառնում է գրավիտացիոն անկայուն և արժեքում է առանձին մասերի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chandrasekar C. и Ферми. Э. Проблемы гравитационной устойчивости в магнитном поле. «Проблемы современной физики», 2, 1954.
2. Gjellestad Guo. On equilibrium configurations of celestial fluid spheroid with a magnetic field. *Astrophys. J.* 119, № 4, 1954.
3. Ferraro. V. C. A. On the equilibrium of magnetic stars. *Astrophys. J.* 119, № 4, 1954.
4. Chandrasekhar S. Limbur P. On the pulsation of a star in which there is a prevalent magnetic field. *Astrophys. J.* 119, № 1, 1954.
5. Оганесян Р. С. К теории гравитационной устойчивости. Кандидатская диссертация. МГУ, 1956.
6. Власов А. А. О переносе массы и заряда поверхностными волнами. *ЖЭТФ.* 27, 1954.
7. Оганесян Р. С. О гравитационной устойчивости шнандрической конфигурации. *Астр. Журн.* XXXIII, вып. 6, 1956.
8. Альфвэн Х. Космическая электродинамика. Москва, 1952.
9. Власов А. А. Теория многих частиц. Москва, 1950.
10. Паренато П. П. Курс звездной астрономии. Москва, 1954.
11. Гуревич Л. Э., Лебединский А. И. Известия АН СССР, серия физическая, 14, № 6, 1950.