

М. Л. Тер-Микаелян

К квантовой электродинамике в среде I

§ 1. В в е д е н и е

Работа посвящена исследованию влияния диэлектрических и магнитных свойств среды на радиационные поправки. При вычислении радиационных поправок с необходимостью входит интегрирование по всем возможным значениям четырехмерного импульса виртуального фотона. Поскольку поведение длинноволновых квантов описывается макроскопическими уравнениями Максвелла, постольку применение микроскопических уравнений квантовой электродинамики является некоторым приближением к действительности.

Однако, рассмотрение этого вопроса было вызвано не столь простыми обстоятельствами. Мы объясним идею работы на примере радиационных поправок к кулоновскому рассеянию. Хорошо известно, что при непосредственном вычислении этих поправок получается логарифмически расходящийся результат. Для получения экспериментально наблюдаемого значения поправок необходимо компенсировать эту расходимость прибавлением поперечника тормозного излучения мягких квантов. В итоге получается конечный результат, который естественно должен являться функцией максимальной энергии, излученного кванта (которая в свою очередь определяется чувствительностью экспериментальной установки). Однако, в результате работ Ландау-Померанчука и автора оказалось, что формулы для тормозного излучения при учете среды коренным образом изменяются. Это означает, что изменится величина радиационных поправок. Для расчета последних необходимо научиться писать матричные элементы, для процессов высокого порядка в квантовой электродинамике с учетом влияния среды. Настоящая статья посвящена выводу матрицы рассеяния, с учетом влияния только поляризации среды. Может возникнуть вопрос насколько последовательным является использование макроскопических уравнений. Не является ли точная система микроскопической квантовой электродинамики достаточной. Дело в том, что последнюю систему мы решаем применительно к нескольким частицам, используя параметр разложения $\frac{e^2}{\hbar c}$, использование же макроскопической электродинамики позволяет учесть влияние сосед-

них атомов и переход в микроскопические уравнения происходит только тогда, когда $\frac{Ne^2}{m\omega_0^2} \rightarrow 0$ (где N — плотность частиц; ω_0 — атомная частота). Некоторые вопросы затронутые в этой статье были уже исследованы в работах ряда авторов (Гинзбург, Соколов, Ватсон, Яух и т. д.) в основном применительно к теории излучения Черенкова.

Все литературные ссылки можно найти в статье Рязанова М. [1].

§ 2. Классическая теория

Мы будем пользоваться записью макроскопических уравнений Максвелла в форме предложенной Мандельштамом—Таммом [2].

После введения тензора индукции G_{ik} и тензора поля F_{ik} макроскопические уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = J^i \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \quad (2)$$

где

$$i \neq k \neq l$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad G^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В последующем мы придерживаемся обозначений принятым в работе [3]. Если мы введем потенциалы $A^i\{\varphi, \vec{A}\}$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \quad (4)$$

то уравнение (2) выполняется автоматически. Запишем связь между тензорами G^{ik} и F_{ik} . Следуя [2] мы имеем для однородной изотропной среды

$$G^{ij} = \epsilon^{ia} \epsilon^{jb} F_{ab} \quad (5)$$

В системе покоя, введенный четырехмерный тензор диэлектрической и магнитной проницаемости имеет вид

$$\epsilon^{ia} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

В противоположность общепринятому написанию связи между F_{ik} и G_{ik} .

$$G_{ij} u^j = \varepsilon F_{ik} u^k$$

$$F_{kl} u_l + F_{li} u_k + F_{lk} u_l = \mu (G_{kl} u_l + G_{li} u_k + G_{lk} u_l) \quad (7)$$

условие (5) более компактно и не содержит u^i — скорости среды. Легко проверить, непосредственным вычислением, что (5) и (7) эквивалентны. Подставляя (5) в (1) мы имеем

$$\varepsilon^{il} \varepsilon^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = -J^i. \quad (8)$$

Если наложить на потенциалы условие Лоренца

$$\varepsilon^{km} \frac{\partial A_m}{\partial x^k} = 0 \quad (9), \text{ то (8) переписывается}$$

$$\varepsilon^{il} \varepsilon^{km} \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^m} = J^i. \quad (9)$$

Легко видеть, что к потенциалам еще можно прибавить $\frac{\partial \chi}{\partial x^k}$, где функция χ удовлетворяет уравнению $\varepsilon^{km} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^m \partial x^k} = 0$. Переход к обычной электродинамике в пустоте происходит при замене тензора ε^{ik} на метрический тензор g^{ik} .

Уравнение (9) следует из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] A_\mu \quad (10)$$

и дополнительного условия (9), требуя выполнения последнего независимо от (10).

Выбор лагранжиана в форме (10) который не является градиентно-инвариантным, значительно упрощает все последующие выкладки. От обычного явно градиентно-инвариантного лагранжиана (мы опускаем сейчас член со взаимодействием)

$$L = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(в системе покоя $L = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \mu H^2)$) лагранжиан (10) отличается на величину четырехмерной дивергенции (с учетом выполнения условия Лоренца)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \varepsilon^{lm} \varepsilon^{kj} \left(A_k \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - A_m \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \right).$$

Это обеспечит над градиентную инвариантность теории [4]. Выпишем еще плотность энергии

$$T^{00} = -\varepsilon^{0m} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \frac{\partial A_i}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \quad (11)$$

и плотность импульса

$$T^{0n} = -\varepsilon^{0m} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \frac{\partial A_j}{\partial x^n} \quad (12)$$

§ 3. Установление перестановочных соотношений матрица рассеяния

При установлении перестановочных соотношений будем вначале исходить из обычной схемы квантовой механики.

Введем согласно схеме квантования полей Паули и Гейзенбергу канонически сопряженный импульс

$$\pi^i = \frac{\partial L_\Phi}{\partial A_{i0}} = -\varepsilon^{i0} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^0} \quad (13)$$

где

$$L_\Phi = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \quad (14)$$

Тогда перестановочные соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} [A_i(\vec{x}, t), A_j(\vec{x}', t)] &= [\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] = 0 \\ [A_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{ij}^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Квантовые уравнения Гамильтона-Якоби, получаются из классических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial x_0} &= \frac{\partial H^0}{\partial \pi^i} = [H^0, A_i] \\ \frac{\partial \pi^i}{\partial x_0} &= -\frac{\partial H^0}{\partial A_i} = [H^0, \pi^i]. \end{aligned} \quad (16)$$

Заменой классических скобок Пуассона

$$[H^0, f] = \frac{\partial f}{\partial A^i} \frac{\partial H^0}{\partial \pi_i} - \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \frac{\partial H^0}{\partial A^i}$$

на квантовые скобки, умноженные на $\frac{i}{\hbar}$. Мы сразу напомним эти уравнения в четырехмерном виде

$$\begin{aligned} i\hbar g^{an} \frac{\partial A_i}{\partial x^a} &= [A_i, p^n] \\ i\hbar g^{an} \frac{\partial \pi_i}{\partial x^a} &= [\pi_i, p^n] \end{aligned} \quad (17)$$

($g^{nn} = +1$ при $n=0$ и $g^{nn} = -1$ при $n=1, 2, 3$).

Нулевая компонента этого уравнения, есть квантовый аналог классического уравнения (16) p^n и H^0 входящие в уравнения (17) и (16) суть полные энергия и импульс поля (т. е. интеграл по объему от выражений (10) и (11)), причем поскольку гамильтониан есть функция канонически сопряженных величин и их производных по простран-

ственным переменным, то вместо переменных $A_{i,0}$ нужно подставить π^i согласно формуле (13).

Непосредственным вычислением можно показать, что уравнения (16) приводят к классическому уравнению Максвелла для потенциалов, а квантовые уравнения (17) приводят к квантованному уравнению, имеющему тот же вид, что и классическое уравнение (9) для потенциалов, которые однако, теперь подчиняются перестановочным соотношениям (15).

Для построения матрицы рассеяния нам понадобятся ковариантные перестановочные соотношения. Их можно установить из следующих соображений. Прежде всего из гамильтонова формализма нам известны перестановочные соотношения для одного времени, во вторых необходимо получить правильный переход к вакууму (когда $\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$). Мы запишем эти соотношения в виде

$$[A_i(x) A_j(x')] = (a\delta_i^j + b\epsilon_i^j) D(x - x'). \quad (18)$$

Поскольку $A(x)$ подчиняется однородному уравнению, то и $D(x - x')$ должно подчиняться уравнению (9), (причем $J^i = 0$), кроме того $D(x - x')$ есть нечетная функция своего аргумента. Этих условий оказывается достаточно для определения коэффициентов a , b и функции $D(x - x')$. Заметим, что если представить функцию $D(x - x')$, по аналогии с вакуумом, как разность опережающей и запаздывающей функции Грина

$$D(x) = \Delta_A(x) - \Delta_R(x), \quad (19)$$

где $\Delta_A(x)$ и $\Delta_R(x)$ удовлетворяют неоднородным уравнениям (9) (с δ функцией вместо J^i), то можно автоматически получить правила обхода полюсов, исходя из аналитических свойств диэлектрической и магнитной постоянных.

Легко видеть, что

$$\Delta_A(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\epsilon_A^{ij} k_i k_j} d^4k \quad (20)$$

$$\Delta_R(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\epsilon_R^{ij} k_i k_j} d^4k. \quad (21)$$

Обход полюсов в запаздывающей функции Грина легко получить исходя из аналитических свойств $\epsilon(\omega)$ в системе покоя. Известно [5], что $\epsilon(\omega)$ есть аналитическая функция в верхней полуплоскости. Поэтому при $t < 0$ мы замкнем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексного переменного k_0 и получим $\Delta_R(t < 0) = 0$. Отметим, что полюса подинтегрального выражения (21), при наличии небольшой мнимой части в диэлектрической про-



ницаемости лежат ниже действительной оси переменной $k_0 = \omega$. Кроме того сама диэлектрическая постоянная в нижней полуплоскости может иметь особенности. Что касается опережающей функции Грина, то ситуация тут полностью противоположная, если заметить, что вместо обычного $\epsilon(\omega)$ нужно взять „опережающую“ диэлектрическую (и магнитную) проницаемость. Аналитические свойства такого $\epsilon_A(\omega)$ можно получить, если в обычном определении $\epsilon(\omega)$ [5]

$$D(t) = E(t) + \int_0^{\infty} E(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\epsilon_R(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (22)$$

изменить знак перед τ в аргументе функции $E(t-\tau)$. Легко видеть, что $\epsilon_A(\omega)$ будет иметь особенности только в верхней полуплоскости; там же лежат полюса подинтегрального выражения (20). Отсюда следует $\Delta_A(-x) = \Delta_R(x)$. Правила обхода перестановочной функции Грина сразу получаются из соотношения (19).

После этих замечаний постоянные a и b легко вычислить и они оказываются равными

$$b = \frac{i\hbar}{\epsilon} \quad a = -\frac{i\hbar}{\epsilon\sqrt{\mu}} (1 + \epsilon\mu). \quad (23)$$

Выпишем полные операторные уравнения макроскопической электродинамики.

Вид уравнений для спинорного поля, полностью совпадает с уравнением для пустоты

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi = -e\gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (24)$$

$$\epsilon^{ik} \epsilon^{em} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^e \psi]. \quad (25)$$

Решение этих уравнений будем, как это обычно делается, искать в виде ряда по $\frac{e^2}{\hbar c}$.

$$A_\mu = A_\mu^0 + \frac{e}{V\hbar c} A_\mu^1 + \dots \quad (26)$$

$$\psi = \psi^0 + \frac{e}{V\hbar c} \psi^1 + \dots$$

Свободные поля удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[(A_\mu^0(x) A_\nu^0(x'))] = (ag_{\mu\nu} + b\epsilon_{\mu\nu}) D(x-x') \quad (27)$$

$$[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x')]_+ = -i S_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (28)$$

Остальные антикоммутаторы равны нулю. Анализ и решение уравнений (24) и (25) полностью совпадает с соответствующим решением для случая пустоты [6]. В процессе расчета нужно воспользоваться соотношением

$$\epsilon^{em} (a g_{mk} + b \varepsilon_{mk}) = -i \hbar \delta_k^m \quad (29)$$

которое легко проверяется в системе покоя, если учесть соотношения (23). Мы приходим тогда к выражению для S матрицы

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t dt^n P[V(t') V(t'') \dots V(t^n)] \quad (30)$$

где $V = S d^3 x J_1 A_1$, полностью совпадающему со случаем пустоты [6].

Физический институт АН Армянской ССР

Поступило 23 VI 1958

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՐԱԽԼԻԱՆ

ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ 1

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է կոմպրիանային մակրոսկոպիկ էլեկտրոդինամիկայի կոտուցման հարցը:

Արտածված են կոմպրիանա տեղափոխանակային առնչությունները, S մատրիցայի միջոցով դրսևված են հավասարումների լուծումները:

Տեսության ձևակերպման ժամանակ օգտագործված է Մանդելշտամի-Տամմի տառարկած ձևով հավասարումների դրսևումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Рязанов М. И. ЖЭТФ 32, 1244, 1957.
2. Мандельштам Л. И. Собрание сочинений, т. стр. 273.
3. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, ин. яз. Москва, 1957.
4. Боголюбов Н. И., Ширков Д. В. Введение в теория квантовых полей. Гостехиздат, Москва, 1957, стр. 33.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, Москва, 1958.
6. Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, Москва, 1953, § 21.