ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 3, 1958 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Костандян

Кручение вала с насаженным диском

§ 1. Постановка задачи

Для валов переменного сечения показано, что, при кручении, перемещение каждой точки перпендикулярно к осевой плоскости, проходящей через эту точку. Это перемещение обозначим через V. Возьмем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и совместим ось z с осью вала. В силу симметричности задачи относительно оси z, тангенциальное перемещение V не зависит от угла φ. Из всех компонентов тензора напряжений остаются отличными от нуля только две касательные напряжения $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$. В дальнейшем $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$ обозначаются соответственно через τ_z и τ_r.

Тангенциальное перемещение $V(r, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{V}{r}\right)+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{V}{r}\right)=0,$$

а напряжения определяются следующими формулами

$$\tau_r = Gr\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right);$$

$$\tau_z = Gr\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{r}\right),$$

где $G=\mu$ модуль сдвига.

Положив $V=r\Psi(r, z)$, получим

$$\left.\begin{aligned}\tau_r &= Gr\frac{\partial\Psi}{\partial r};\\ \tau_z &= Gr\frac{\partial\Psi}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0. \tag{1.2}$$

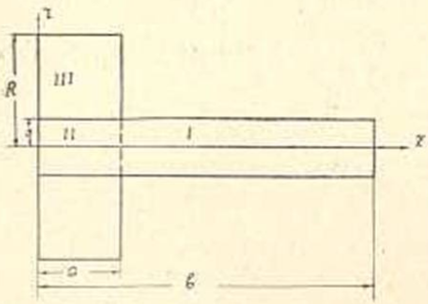
На контуре осевого сечения функция $\Psi(r, z)$ удовлетворяет следующему граничному условию [2]

$$\frac{d\Psi}{dn}=\frac{1}{G}\frac{p(l)}{r(l)}, \tag{1.3}$$

где $p(l)$ — интенсивность внешней нагрузки, $r(l)$—радиус сечения в данной точке контура, а l—длина дуги по образующей вала.

Рассмотрим кручение кругового цилиндрического вала конечной длины, на одном конце которого насажен диск из другого материала (фиг. 1). Внешние радиусы вала и диска обозначим соответственно через s и R, длину вала через b и толщину диска через a.

Пусть крутящая нагрузка распределена по всей свободной поверхности вала и диска, по следующим законам:



Фиг. 1.

$$\left.\begin{array}{ll}
\tau_z(r,0)=\varphi_1(r) & 0\leqslant r\leqslant s\\
\tau_z(r,0)=\varphi_2(r) & s\leqslant r\leqslant R\\
\tau_r(R,z)=\varphi_3(z) & 0\leqslant z\leqslant a\\
\tau_z(r,a)=\varphi_4(r) & s\leqslant r\leqslant R\\
\tau_r(s,z)=\varphi_5(z) & a\leqslant z\leqslant b\\
\tau_z(r,b)=\varphi_6(r) & 0\leqslant r\leqslant s
\end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Предположим, что функции $\{\varphi_i\}$ кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Тогда функции φ_i могут быть представлены в виде рядов Фурье и Фурье—Дини [6]

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi_3(z)=\dfrac{c_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\cos\dfrac{k\pi z}{a} & 0<z<a;\\
\varphi_5(z)=\dfrac{g_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k\cos\dfrac{k\pi(z-a)}{b-a} & a<z<b;\\
\varphi_1(r)=a_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kJ_1\left(\mu_k\dfrac{r}{s}\right) & 0<r<s;\\
\varphi_2(r)=b_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_kW_1(\lambda_kr) & s<r<R;\\
\varphi_4(r)=f_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_kW_1(\lambda_kr) & s<r<R;\\
\varphi_6(r)=\beta_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_kJ_1\left(\mu_k\dfrac{r}{s}\right) & 0<r<s,
\end{array}\right\} \tag{1.5}$$

где $J_n\left(\mu_k\dfrac{r}{s}\right)$—функция Бесселя n-ого порядка первого рода;

$$W_n(\lambda_kr)=\frac{J_n(\lambda_kr)}{J_2(\lambda_kR)}-\frac{Y_n(\lambda_kr)}{Y_2(\lambda_kr)}, \tag{1.6}$$

где $Y_n(\lambda_k r)$ функция Бесселя второго рода n-ого порядка, а числа $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ являются соответственно корнями уравнений

$$J_2(x) = 0;$$

$$W_2(sx) = \frac{J_2(sx)}{J_2(Rx)} - \frac{Y_2(sx)}{Y_2 Rx)}. \tag{1.7}$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ справедливы следующие формулы:

$$\int_0^s x J_1\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) J_1\left(\frac{\mu_p}{s}x\right) dx = \frac{\mu_k}{\mu_p}\int_0^s x J_2\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) J_2\left(\frac{\mu_p}{s}x\right) dx =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad p \neq k \\ \frac{1}{2}[sJ_1(\mu_k)]^2 \quad \text{при} \quad p = k; \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\int_s^R x W_1(\lambda_k x)\, W_1(\lambda_p x)\, dx = \frac{\lambda_k}{\lambda_p}\int_s^R x W_2(\lambda_k x)\, W_2(\lambda_p k)\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0 \qquad \text{при} \qquad p \neq k \\ \frac{1}{2}\{[RW_1(\lambda_k R)]^2 - [sW_1(\lambda_k s)]^2\} \quad \text{при} \quad p = k; \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\int_0^s x^2 J_1\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) dx = \int_s^R x^2 W_1(\lambda_k x)\, dx = 0. \tag{1.10}$$

Из формул (1.8) — (1.10) следует, что коэффициенты разложений (1.5) определяются единственным образом. Внешняя нагрузка должна удовлетворять уравнениям равновесия, т. е. сумма крутящих моментов должна равняться нулю.

$$M = \int_F r(l)\, p(l)\, dF = 2\pi \int_l r^2(l)\, p(l)\, dl,$$

где

$$p(l) = \tau_r \frac{dz}{dl} - \tau_z \frac{dr}{dl}.$$

Составим сумму крутящих моментов, действующих на вал и на диск

$$\Sigma M = 2\pi\left\{-\int_0^s r^2 \tau_z(r, 0)\, dr - \int_s^R r^2 \tau_z(r, 0)\, dr + \right.$$

$$+\int_0^a R^2\tau_r(R,z)\,dz-\int_R^s r^2\tau_z(r,a)\,dr+\int_a^b s^2\tau_r(s,z)\,dz-$$

$$-\int_s^0 r^2\tau_z(r,b)\,dz\Big\}.$$

Подставляя значение τ_z и τ_r из (1.4) в предыдущие интегралы, имея в виду (1.5) и значения интегралов (1.10), получим

$$-\frac{1}{2\pi}\sum M=\frac{a_0-\beta_0}{4}s^4+\frac{b_0-f_0}{4}(R^4-s^4)-$$

$$-\frac{c_0aR^2}{2}-\frac{g_0(b-a)s^2}{2}=0 \qquad (1.12)$$

Это соотношение представляет уравнение равновесия крутящих моментов, действующих на вал с диском.

Область осевого сечения разделим на три части, как показано на фиг. 1. Ищем функцию $\Psi(r,z)$ в виде

$$\Psi(r,z)=\begin{cases}\Psi_1(r,z) & \text{в области I;}\\ \Psi_2(r,z) & \text{в области II;}\\ \Psi_3(r,z) & \text{в области III.}\end{cases}$$

На смежных сторонах областей I, II, и II, III неизвестные напряжения формально разложим в ряды

$$\left.\begin{aligned}\tau_r(s,z)&=\frac{\eta_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\cos\frac{k\pi z}{a} && 0<z<a;\\ \tau_z(r,a)&=\xi_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right) && 0<r<s,\end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

где $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$—пока неизвестные коэффициенты.

Граничные условия для функций Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 получим приравнивая нулю перемещение на оси вала и из (1.1), (1.3)

$$\left.\begin{aligned}rG_1\frac{d\Psi_1}{dz}\Big|_{z=b}&=\beta_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right) && 0<r<s;\\ sG_1\frac{d\Psi_1}{dr}\Big|_{r=s}&=\frac{g_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a} && a<z<b;\\ r\,G_1\frac{d\Psi_1}{dz}\Big|_{z=a}&=\xi_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right) && 0<r<s;\end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

$$[r\Psi_1(r,z)]_{r=0}=0 \qquad a<z<b.$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&G_1 r \frac{d\Psi_2}{dz}\Big|_{z=0} = a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) && 0<r<s;\\
&[r\Psi_2(r,z)]_{r=0} = 0 && 0<z<a;\\
&G_1 r \frac{d\Psi_2}{dz}\Big|_{z=a} = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) && 0<r<s;\\
&G_1 s \frac{d\Psi_2}{dr}\Big|_{r=s} = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos\frac{k\pi z}{a} && 0<z<a;
\end{aligned}
\right| \tag{1.15}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&G_2 r \frac{d\Psi_3}{dz}\Big|_{z=0} = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r) && s<r<R;\\
&G_2 r \frac{d\Psi_3}{dz}\Big|_{z=a} = f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r) && s<r<R;\\
&G_2 R \frac{d\Psi_3}{dr}\Big|_{r=R} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\frac{k\pi z}{a} && 0<z<a;\\
&G_2 s \frac{d\Psi_3}{dr}\Big|_{r=s} = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos\frac{k\pi z}{a} && 0<z<a.
\end{aligned}
\right| \tag{1.16}
$$

где G_1 и G_2—модули сдвига соответственно для вала и для диска.

Принимая во внимание, что каждая разделенная часть остается в равновесии, если учтено действие других частей, для η_0 и ξ_0 получим

$$\eta_0 = c_0 \frac{R^2}{s^2} - \frac{b_0 - f_0}{2as^2}(R^4 - s^4);$$

$$\xi_0 = \beta_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s^2}. \tag{1.17}$$

Функции

$$\Psi_1(r,z) = \frac{1}{G_1}\left\{ g_0 \frac{r^2 - 4z^2}{4s^2} + z\left(\beta_0 + \frac{2g_0 b}{s^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k(z-a)}{s} - \xi_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k(b-z)}{s}\right]\frac{s}{\mu_k}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s}} +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{b-a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)k}\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}\Bigg\}, \quad \begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ a\leqslant z\leqslant b\end{pmatrix}; \quad (1.18)$$

$$\Psi_2(r,z)=\frac{1}{G_1}\left\{\left[a_0-\beta_0-\frac{2g_0(b-a)}{s^2}\right]\frac{1}{8a}r^2+\right.$$

$$+\left[\beta_0-a_0+\frac{2g_0(b-a)}{s^2}\right]\frac{z^2}{2a}+a_0 z+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{s}-\right.$$

$$\left.-a_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k(a-z)}{s}\right]\frac{s}{\mu_k}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}}+$$

$$+\frac{a}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{k\cdot I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a}\Bigg\}, \quad \begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix}; \quad (1.19)$$

$$\Psi_3(r,z)=\frac{1}{G_2}\left\{\frac{b_0-f_0}{8a}r^2+\frac{R^2}{8a}\left[(b_0-f_0)R^2-2ac_0\right]\frac{1}{r^2}-\frac{b_0-f_0}{2a}z^2+\right.$$

$$+b_0 z+K+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k \operatorname{ch}\lambda_k z-b_k\operatorname{ch}\lambda_k(a-z)\right]\frac{W_1(\lambda_k r)}{\lambda_k \operatorname{sh}\lambda_k a}-$$

$$-\frac{a}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\eta_k\Delta_1\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-c_k\Delta_1\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\cos\frac{k\pi z}{a}}{k\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}\Bigg\}, \quad \begin{pmatrix}s\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix}; \quad (1.20)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Delta(x,y)&=I_2(x)K_2(y)-I_2(y)K_2(x);\\ \Delta_1(x,y)&=I_1(x)K_2(y)+K_1(x)I_2(y),\end{aligned}\right\} \quad (1.21)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) и всем граничным условиям (1.14)—(1.16). [2, 1, 3, 4].

Потребуем, чтобы на линии контакта $r=s$, $0\leqslant z\leqslant a$ равнялись касательные напряжения и перемещения для обеих областей, т. е.

$$\tau_r^{II}=\tau_r^{III}, \quad r=s \quad 0<z<a;$$

$$V^{II}=V^{III} \quad r=s \quad 0<z<a,$$

или, что тоже самое,

$$G_1 \frac{d\Psi_2}{dr}\Big|_{r=s} = G_2 \frac{d\Psi_3}{dr}\Big|_{r=s}, \qquad 0<z<a; \tag{1.22}$$

$$\Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z), \qquad 0<z<a. \tag{1.23}$$

Условие (1.22) мы уже принимали, когда предполагали, что на смежной линии областей II и III τ_r разлагается на один и тот же ряд для обеих областей (последние граничные условия в (1.15) и (1.16)). На линии смежения областей I и II потребуем, чтобы

$$V^{\text{II}} = V^{\text{I}}, \quad \Psi_2(r, a) = \Psi_1(r, a) \quad 0<r<s; \tag{1.24}$$

$$\frac{d\Psi_1}{dz}\Big|_{z=a} = \frac{d\Psi_2}{dz}\Big|_{z=a} \qquad 0<r<s, \tag{1.25}$$

т. е. перемещения и касательные напряжения равны с обеих сторон.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции $\Psi_i (i=1, 2, 3)$ в формулах (1.18) — (1.20) построены так, что условия (1.23) и (1.25) удовлетворяются.

§ 2. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

1°. Функции $\Psi_1(r, z)$ и $\Psi_2(r, z)$ должны удовлетворять условию (1.24), т. е.

$$\Psi_1(r, a) = \Psi_2(r, a) \qquad 0<r<s. \tag{2.1}$$

Составляя это равенство, после несложных действий, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k (b-a)}{s} - a_k \operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s} - \right.$$

$$\left. - \beta_k \operatorname{csch}\frac{\mu_k (b-a)}{s}\right]\frac{sJ_1\left(\frac{\mu_k r}{s}\right)}{\mu_k r} - (r^2 - 4a^2)\,[2g_0 b +$$

$$+ (\beta_0 - a_0)s^2]\,\frac{1}{8as^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{k\pi r}(-1)^{k+1}\eta_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)} +$$

$$+ \frac{b-a}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)k}, \quad 0<r<s. \tag{2.2}$$

Умножив обе части равенства (2.2) на $r^2 J_1\left(\frac{\mu_p}{s} r\right)$ и интегрируя по r в пределах $(0, s)$, используя формулы (1.8), (1.10) и значение интегралов

$$\int_0^s r J_1\left(\frac{\mu_p}{s} r\right) I_1(\beta r)\, dr = \frac{\beta s I_2(\beta s) J_1(\mu_p)}{\beta^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}; \tag{2.3}$$

$$\int_0^s r^4 J_1\left(\frac{\mu_p}{s} r\right) dr = \frac{2s^5 J_1(\mu_p)}{\mu_p^2}, \tag{2.4}$$

получим

$$\xi_p \operatorname{ch}\frac{\mu_p b}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_p a}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_p (b-a)}{s}\, s J_1(\mu_p) =$$

$$= \frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\eta_k \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} + \Big[a_p \operatorname{csch}\frac{\mu_p a}{s} +$$

$$+ \beta_p \operatorname{csch}\frac{\mu_p (b-a)}{s}\Big] s J_1(\mu_p) + \frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} +$$

$$+ [2g_0 b + (\beta_0 - a_0)s^2]\cdot\frac{s}{4a\mu_p}. \tag{2.5}$$

2°. Функции $\Psi_2(r, z)$ и $\Psi_3(r, z)$ должны удовлетворять условию (1.23), т. е.

$$\Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z) \qquad 0 < z < a. \tag{2.6}$$

Из формул (1.19) и (1.20) составим равенство (2.6)

$$\frac{1}{G_1}\Big\{\Big[a_0 - \beta_0 - \frac{2g_0(b-a)}{s^2}\Big]\frac{s^2 - 4z^2}{8a} + a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\xi_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{s} -$$

$$- a_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k (a-z)}{s}\Big]\frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}} + \frac{a}{\pi s}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{G_2}\Big\{\frac{b_0 - f_0}{8a}s^2 + \frac{R^2}{8as^2}[(b_0 - f_0)R^2 - 2a c_0] - \frac{b_0 - f_0}{2a}z^2 + b_0 z + K +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}[f_k \operatorname{ch}\lambda_k z - b_k \operatorname{ch}\lambda_k (a-z)]\frac{W_1(\lambda_k s)}{\lambda_k s \operatorname{sh}\lambda_k s} -$$

$$- \frac{a}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\eta_k \Delta_1\left(\frac{k\pi s}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - c_k \frac{a}{k\pi s}\Big]\frac{\cos\frac{k\pi z}{a}}{k\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}\Big\}, \quad 0 < z < a. \tag{2.7}$$

Здесь использована формула Вронского $I_n(x)K_{n+1}(x)+I_{n+1}K_n(x)=\frac{1}{x}$.

Умножив равенство (2.7) на $\cos\frac{p\pi z}{a}$ и интегрируя в пределах $0<z<a$, получим

$$a(-1)^{p+1}\tau_{1p}=\frac{2\frac{p\pi}{a}}{\dfrac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}+\dfrac{G_1}{G_2}\dfrac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a},\ \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}+\frac{(-1)^{p+1}\,2\frac{p\pi s}{a}}{\dfrac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{G_1I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}+\dfrac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a},\ \frac{p\pi R}{a}\right)}{G_2\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{G_1s}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{G_2s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^pf_a-b_k}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\lambda_k^2}W_1(\lambda_ks)+\frac{a}{2G_2}\left(\frac{a}{p\pi s}\right)^2\frac{c_p}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}+$$

$$\left.+\left(\frac{a}{p\pi}\right)^2\left[\left(\frac{f_0}{G_2}-\frac{\beta_0}{G_1}-\frac{2g_0(b-a)}{G_1s^2}\right)(-1)^p-\frac{b_0}{G_2}+\frac{a_0}{G_1}\right]\right\}. \quad (2.8)$$

Введем обозначения

$$\xi_p\,\mathrm{sh}\frac{\mu_pb}{s}\,\mathrm{csch}\frac{\mu_pa}{s}\,\mathrm{csch}\frac{\mu_p(b-a)}{s}\,sJ_1(\mu_p)=L_p,\quad \frac{a}{\alpha}(-1)^{p+1}\tau_{1p}=F_p. \quad (2.9)$$

где $\alpha>0$—пока неизвестное число, которое в дальнейшем выбирается так, чтобы система была вполне регулярна. Тогда бесконечная система линейных уравнений (2.5) и (2.10) приводится к виду

$$L_p=\sum_{k=1}^{\infty}a_{pk}F_k+R_p\quad p=1,2,3\cdots \quad (2.10)$$

$$F_p=\sum_{k=1}^{\infty}b_{pk}L_k+D_p\quad p=1,2,3\cdots \quad (2.11)$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\alpha\mu_p}{as} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}; \tag{2.12}$$

$$b_{pk} = \frac{2p\pi}{\alpha s a} \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s}}{\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1}{G_2}\frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)}; \tag{2.13}$$

$$R_p = sJ_1(\mu_p)\left[\frac{a_p}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}} + \frac{\beta_p}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(b-a)}{s}}\right] +$$

$$+ \frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} - [2g_0 b + (\beta_0 - a_0)s^2]\frac{s}{4a\mu_p}; \tag{2.14}$$

$$D_p = \frac{2p\pi s}{\alpha a} \frac{(-1)^{p+1}}{\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{G_1 I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{G_2\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{G_1 s}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{\mu_k}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} + \frac{1}{G_2 s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^p f_k - b_k}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2} W_1(\lambda_k s) + \right.$$

$$+ \frac{a}{2G_2}\left(\frac{a}{2\pi s}\right)^2 \frac{c_p}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} + \left(\frac{a}{p\pi}\right)^2\left[\left(\frac{f_0}{G_2} - \frac{\beta_0}{G_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2g_0(b-a)}{G_1 s^2}\right)(-1)^p - \frac{b_0}{G_2} + \frac{a_0}{G_1}\right]\right\}. \tag{2.15}$$

Совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.10) и (2.11) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p \quad p = 1, 2, 3 \cdots, \tag{2.16}$$

если ввести обозначения

$$Z_{2p-1} = L_p;\quad Z_{2p} = F_p;\quad B_{2p-1} = R_p;\quad B_{2p} = D_p;$$

$$A_{2p,2k} = 0;\quad A_{2p,2k-1} = b_{pk};\quad A_{2p-1,2k-1} = 0;\quad A_{2p-1,2k} = a_{pk}. \tag{2.17}$$

§ 3. Исследование бесконечной системы линейных уравнений

В обозначениях (2.9) введенное число $\alpha > 0$ можно выбирать таким образом, чтобы система (2.16) была вполне регулярной [7].

Рассмотрим отдельно два следующих случая.

1°. Для нечетных строк

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p-1,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{2\mu_p\alpha}{as} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\mu_p^2}{s^2} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} =$$

$$= \alpha\left(\operatorname{cth}\frac{\mu_p a}{s} - \frac{s}{\mu_p a}\right) \leqslant \alpha, \tag{3.1}$$

в силу обозначений (2.17), (2.12). Причем использовано неравенство

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leqslant 1,\quad 0 \leqslant x < \infty \tag{3.2}$$

и значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi}\right). \tag{3.3}$$

2°. Для четных строк из (2.16) в силу (2.17) и (2.13)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2}{\alpha s} \frac{\frac{p\pi}{a}}{\left|\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1}{G_2} \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}\right|} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s}}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}. \tag{3.4}$$

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Показано [1], что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} = \frac{as}{2p\pi} \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}; \tag{3.6}$$

и

$$\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) = I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) - K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) > 0. \tag{3.7}$$

Ясно, что

$$\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) = I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) + K_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) > 0, \tag{3.8}$$

так как

$$I_n(x) > 0, \quad k_n(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > 0, \quad R(n) > -\frac{1}{2}, \tag{3.9}$$

Показано [3], что

$$I_{n+1}(x) \leqslant I_n(x) \quad \text{при } R(n) > -\frac{1}{2}, \quad x > 0 \tag{3.10}$$

и

$$K_n(x) \leqslant K_{n+1}(x) \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Имея в виду (3.5) — (3.10), для оценки (3.4) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,\,k}| \leqslant \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\dfrac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \dfrac{G_1}{G_2} \dfrac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times$$

$$\times \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{\dfrac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \dfrac{G_1 I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{G_2 I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot \dfrac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\alpha} \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \leqslant \frac{1}{2\alpha}. \tag{3.11}$$

Выбирая $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, для оценок (3.1) и (3.11) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{pk}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 1, 2, 3 \cdots \tag{3.12}$$

Тем самым доказана вполне регулярность бесконечной системы линейных уравнений (2.16).

Совокупность свободных членов системы (2.16) ограничена и стремится к нулю при $p \to \infty$ [1]

$$B_p = 0\,(p^{-\delta}), \; (0 < \delta < 1) \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{3.13}$$

Напряжения определяются формулами (1.1), где в соответствующих областях надо брать соответствующие функции перемещения $\Psi_i \, (i = 1, 2, 3)$ и модули сдвига.

В качестве численного примера рассмотрен вал с насаженным диском для следующих соотношений параметров $a = \frac{\pi}{2} s$, $b = 3\pi s$, $R = 3s$ и $G_2 = 2G_1$. Крутящая нагрузка приложена к торцу вала по линейному закону $\tau_z(r, b) = \tau_1 \frac{r}{s}$ и равномерно распределена по боковой поверхности диска $\tau_r(R, z) = \tau_2$.

Аналогичную задачу рассмотрел H. Saito [8] для бесконечно длинного вала с диском.

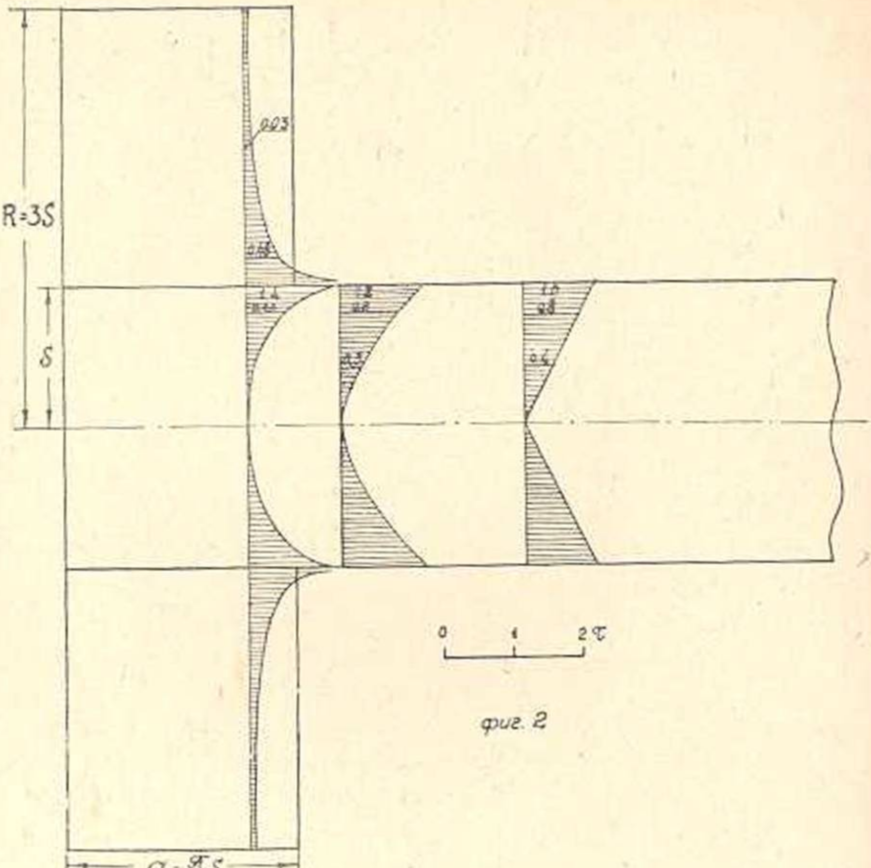
Методом последовательных приближений получены значения шести неизвестных коэффициентов и оценки для остальных. Найдены численные значения напряжений τ_z для точек вала и диска, которые приведены в таблице 1.

Для наглядного представления закона распределения касательного напряжения τ_z на фиг. 2 приведены эпюры этих напряжений по некоторым сечениям.

Таблица 1

$\frac{\tau_z}{\tau_1}$

$\frac{r}{s}$ \ $\frac{z}{a}$	0	0,8	1,2	2
0	0	0	0	0
0,4	0	0,0561	0,2745	0,3997
0,8	0	0,4450	0,8004	0,8004
1	0	1,3553	1,1617	1,0002
1,2	0	0,4571	—	—
2	0	0,0317	—	—
3	0	0,0068	—	—



фиг. 2

Ереванский Государственный универститет

Поступило 6 II 1958

Բ. Ա. Կոստանդյան

ՎԵՐԱԴՐԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՈՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է վերադրած սկավառակով լիսեռի ոլորման խնդրի լուծումը, երբ լիսեռն ու սկավառակը տարբեր նյութերից են։

Լիսեռը ոլորվում է սկավառակի և լիսեռի ազատ մակերևույթի վրա կիրառված, առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ուժերով։

Խնդիրը լուծվում է անդափոխությունների ֆունկցիայի օգնությամբ։ Լուծումը ներկայացվում է շարքերով, ըստ Բեսսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների։

Ինտեգրման գործակիցները որոշվում են անվերջ լիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների սիստեմից։ Ուսումնասիրվել է թվային օրինակ, երբ ոլորող ուժը կիրառված է սկավառակի կողմնային մակերևույթի վրա հավասարաչափ բաշխված և լիսեռի հիմքի վրա գծային օրենքով բաշխված ուժե-

բով։ Օրինակում սկավառակի և լիսեռի սահքի մոդուլները վերցված են $\frac{G_2}{G_1} = 2$ *հարաբերությամբ։ Կազմված են լարումների բաշխման էպյուրները։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения. ПММ, т. XV, в. 4, 1951.
2. *Соляник-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. *Костандян Б. А.* О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы. Известия АН Армянской ССР, том VII, № 4, 1954.
4. *Костандян Б. А.* О кручении полого ступенчатого вала. Известия АН Армянской ССР, том IX, № 3, 1956.
5. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Гостехиздат, М., 1949.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1949.
8. *Hideo Saito.* Torsion of a circular shaft press—pitted with a dtsc. ZAMP, Vol. VI, 1955, № 6, pp. 498—503.