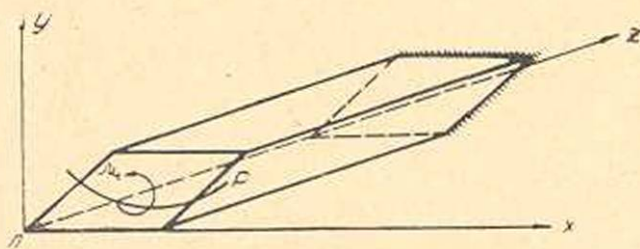


Р. С. Минасян

О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма

В работе дается решение задачи о кручении и изгибе анизотропного призматического стержня (фиг. 1), когда последний в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси. Решение представляется одновременно двумя



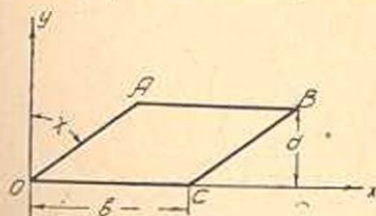
Фиг. 1.

видами разложения в ряд. Выполнение граничных условий приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Приводится способ вычисления с избытком и недостатком функциональных рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Дается численный пример. Для улучшения оценок вводится понятие бирегулярных систем.

§ 1. Кручение анизотропного стержня.

Постановка задачи и построение решения

Рассмотрим задачу кручения анизотропного призматического стержня, имеющего поперечное сечение в виде параллелограмма $OABC$, грань OA которого составляет угол χ с осью OY . (фиг. 2).



Фиг. 2.

В этом случае функция напряжений $\psi(x, y)$, как известно [1], удовлетворяет уравнению

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = -2\theta \quad (1.1)$$

где a_{ik} — упругие постоянные материала стержня, причем $a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0$;

ϑ — неизвестный угол кручения.

Условия на контуре поперечного сечения будут

$$\psi(x, 0) = \psi(x, a) = \psi(\omega y, y) = \psi(b + \omega y, y) = 0, \quad (1.2)$$

где $\omega = \operatorname{tg} \chi$.

При этом составляющие напряжений определяются из формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Прежде, чем переходить к отысканию решения, преобразуем систему координат:

$$x - \omega y = \xi, \quad \sqrt{\beta} y = \eta \quad (1.4)$$

где

$$\beta = \frac{a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}}{a_{55}}. \quad (1.5)$$

В этом случае, обозначив

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \frac{\vartheta}{\zeta} U(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{a_{45} + \omega a_{55}}{\sqrt{a_{55}}}, \\ \zeta = a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

уравнение (1.1) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = -2. \quad (1.7)$$

При этом неизвестный угол кручения ϑ определится из соотношения

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_t}. \quad (1.8)$$

Здесь

$$C_t = \frac{2}{\zeta \sqrt{\beta}} \iint_{\Omega} U(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.9)$$

— жесткость при кручении, Ω — область поперечного сечения, M_t — скручивающий момент.

Для нахождения функции $U(\xi, \eta)$ воспользуемся работой [2]. Будем искать решение уравнения (1) одновременно посредством двух разложений в ряд:

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta, \quad (1.10)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad d_1 = \sqrt{\beta} d, \quad f_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{\xi} U(\xi, \eta) \sin \gamma_k \eta d\eta, \quad (1.11)$$

$$\varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{\xi} U(\xi, \eta) \cos \gamma_k \eta d\eta.$$

Умножая уравнение (1.7) соответственно на $\frac{2}{d_1} \sin \gamma_k \eta d\eta$ и $\frac{2}{d_1} \cos \gamma_k \eta d\eta$ и интегрируя от 0 до d_1 , для определения $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_k''(\xi) + 2\alpha \gamma_k \varphi_k'(\xi) - \gamma_k^2 f_k(\xi) = -4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k d_1}, \quad (1.12)$$

$$\varphi_k''(\xi) - 2\alpha \gamma_k f_k'(\xi) - \gamma_k^2 \varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \left[S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) - 2 \int_0^{\xi} \cos \gamma_k \eta d\eta \right].$$

Здесь обозначено

$$S_1(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \quad S_2(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=d_1}. \quad (1.13)$$

Решая уравнения (1.12) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям (1.2), для $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ получим следующие выражения:

$$f_k(\xi) = - \frac{2}{\gamma_k d_1 \operatorname{sh} \gamma_k b} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) \int_0^{\xi} [p_k(t) \cos \alpha \gamma_k (\xi - t) - \right.$$

$$- q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (\xi - t)] \operatorname{sh} \gamma_k t dt + \operatorname{sh} \gamma_k \xi \int_{\xi}^b [p_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t - \xi) +$$

$$+ q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t - \xi)] \operatorname{sh} \gamma_k (b - t) dt \Big\}, \quad (1.14)$$

$$\varphi_k(\xi) = - \frac{2}{\gamma_k d_1 \operatorname{sh} \gamma_k b} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) \int_0^{\xi} [p_k(t) \sin \alpha \gamma_k (\xi - t) + \right.$$

$$+ q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (\xi - t)] \operatorname{sh} \gamma_k t dt - \operatorname{sh} \gamma_k \xi \int_{\xi}^b [p_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t - \xi) -$$

$$- q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t - \xi)] \operatorname{sh} \gamma_k (b - t) dt \Big\}.$$

где

$$\nu = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad p_k(\xi) = -2 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k},$$

$$q_k(\xi) = S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) - 2 \int_0^{d_1} \cos \gamma_k \eta d\eta, \quad (1.15)$$

В выражения для $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ входят неизвестные функции $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$. Для определения последних потребуем, чтобы вторым представлением (1.10) функции $U(\xi, \eta)$ также выполнялись граничные условия (1.1) на прямых $\eta = 0$ и $\eta = d_1$:

$$\frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi) = 0; \quad \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \varphi_j(\xi) = 0. \quad (1.16)$$

Умножим оба уравнения (1.16) на $\frac{2}{b} \sin \delta_k \xi d\xi$, где $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b . При этом, вследствие равномерной сходимости рядов, входящих в левые части (1.16), возможна перестановка

знаков суммы и интеграла. Для нахождения значения $\int_0^b \varphi_j(\xi) \sin \delta_k \xi d\xi$

воспользуемся уравнениями (1.12), а также условиями (1.2). После некоторых преобразований для определения коэффициентов Фурье функций $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$ получим следующие соотношения:

$$g_k = -2\alpha\nu\delta_k^3 \frac{\text{ch } \nu\delta_k d_1 + \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \text{sh } \nu\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - (-1)^j] \times$$

$$\times \frac{[1 - (-1)^k] m_j + [1 + (-1)^k] n_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2}, \quad (1.17)$$

$$h_k = -2\alpha\nu\delta_k^3 \frac{\text{ch } \nu\delta_k d_1 - \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \text{sh } \nu\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} [1 + (-1)^j] \times$$

$$\times \frac{[1 - (-1)^k] m_j + [1 + (-1)^k] n_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k.$$

Здесь обозначено

$$g_k = \frac{2\delta_k}{d_1} \int_0^b [S_1(\xi) + S_2(\xi)] \sin \delta_k \xi d\xi;$$

$$h_k = \frac{2\delta_k}{d_1} \int_0^b [S_1(\xi) - S_2(\xi)] \sin \delta_k \xi d\xi;$$

$$m_k = \gamma_k [f'_k(0) + f'_k(b)]; \quad n_k = \gamma_k [f'_k(0) - f'_k(b)]; \quad (1.18)$$

$$t_k = 8\nu \frac{1 - (-1)^k}{\delta_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1} \right).$$

При этом величины m_k и n_k , входящие в (1.17), определяются, согласно (1.18) и (1.14), из следующей системы уравнений:

$$m_k = -2\alpha \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - (-1)^j] \times \\ \times \frac{[1 - (-1)^k] g_j + [1 + (-1)^k] h_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2}; \quad (1.19)$$

$$n_k = -2\alpha \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} [1 + (-1)^j] \times \\ \times \frac{[1 - (-1)^k] g_j + [1 + (-1)^k] h_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2} + u_k,$$

где

$$u_k = 8\nu \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right). \quad (1.20)$$

§ 2. Исследование полученных систем линейных уравнений (1.17) и (1.19). Определение выражений для $\phi(x, y)$, составляющих напряжений и жесткости при кручении

Займемся исследованием полученной совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (1.17) и (1.19). Как легко видеть, данные системы разбиваются на четыре отдельные совокупности систем. При этом, как будет показано ниже, неизвестные

$$g_{2k+1} = m_{2k+1} = h_{2k} = n_{2k} = 0. \quad (1.20)$$

Определим суммы модулей коэффициентов каждого из уравнений полученных систем. Для сумм модулей коэффициентов уравнений систем (1.17) получим следующие выражения:

$$s(g_k) = |\alpha| \left(1 - \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ash} \nu \delta_k d_1} \right); \\ s(h_k) = |\alpha| \left[1 + \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ash} \nu \delta_k d_1} - \frac{4\nu}{\delta_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) \right]. \quad (2.1)$$

Аналогичные значения получаются и для сумм модулей коэффициентов систем (1.19). В каждом из этих выражений вторые сла-

гаемые убывают с экспоненциальной скоростью и, начиная с некоторого k , суммы модулей коэффициентов, вследствие неравенства $\alpha^2 < 1$, становятся меньше 1. Заметим, что почти во всех практически интересных случаях, когда $|\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$, суммы модулей коэффициентов строго меньше единицы для всех k и при любых отношениях сторон $\frac{d}{b}$, т. е. системы (1.17) и (1.19) вполне регулярны. Свободные члены t_k и u_k этих систем стремятся к нулю с возрастанием k . Из теории бесконечных систем [3] следует единственность ограниченного решения и сходимость метода последовательных приближений. Кроме того, как видно из (1.17), для g_{2k+1} и m_{2k+1} , а также для h_{2k} и n_{2k} получаются однородные системы, не имеющие, согласно общей теории [3], ограниченного решения, отличного от нуля. Поэтому имеем $g_{2k+1} = m_{2k+1} = h_{2k} = n_{2k} = 0$.

Что касается g_{2k} , n_{2k+1} и т. п., то с возрастанием k они стремятся к нулю. Как будет показано ниже, в частном примере, решения мажорантной системы также убывают со скоростью $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Перейдем теперь к получению выражений для $U(\xi, \eta)$, а также для функции напряжений $\psi(x, y)$, составляющих напряжений τ_{xz} , τ_{yz} и жесткости при кручении C_t .

Предварительно обозначим

$$\begin{aligned} g_{2k} &= \frac{16\gamma}{\pi} G_{2k}; & h_{2k+1} &= \frac{16\gamma}{\pi} G_{2k+1}; \\ m_{2k} &= \frac{16\gamma}{\pi} N_{2k}; & n_{2k+1} &= \frac{16\gamma}{\pi} N_{2k+1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда, согласно (1.17) и (1.19), для определения неизвестных G_k и N_k окончательно придем к следующей совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} G_k &= -4\alpha\gamma\delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\delta_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{j+k}] N_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k^*, \\ N_k &= -4\alpha\gamma\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh} \gamma\gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{j+k}] G_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2} + u_k^*, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где свободные члены t_k^* и u_k^* имеют вид

$$t_k^* = \frac{1 - (-1)^k}{2kd_1} b \left(\operatorname{cth} \gamma\delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha\delta_k d_1}{\operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \right); \quad (2.4)$$

$$u_k^* = \frac{1 - (-1)^k}{2k} \left(\operatorname{cth} \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \gamma_k b} \right). \quad (2.4)$$

При этом, согласно (1.18) и (2.2), для функций $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$ получаем следующие выражения:

$$S_1(\xi) = \frac{8\nu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{\delta_k} \sin \delta_k \xi; \quad S_2(\xi) = \frac{8\nu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k G_k}{\delta_k} \sin \delta_k \xi. \quad (2.5)$$

Определив из (1.14) и (2.5) функцию $f_k(\xi)$ и подставив ее значение в первое из разложений (1.10), после некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \eta(d_1 - \eta) - \frac{8d_1}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k d_1]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k \eta \operatorname{sh} \gamma_k (d_1 - \eta) + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \gamma_k \eta] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \gamma_k \eta}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) - \\ & - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \gamma_k \xi]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как нетрудно видеть из этого выражения, на контуре области поперечного сечения функция $U(\xi, \eta)$ обращается в нуль, внутри же области ряды в правой части выражения (2.6) весьма быстро сходятся.

К другому представлению функции $U(\xi, \eta)$ придем, определив из (1.14) и (2.5) $\varphi_k(\xi)$ и подставив ее во второе из разложений (1.10):

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \xi(b - \xi) - \frac{8d_1}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k d_1]} \times \\ & \times [\cos \alpha \gamma_k \eta \operatorname{sh} \gamma_k (d_1 - \eta) - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \gamma_k \eta] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \gamma_k \eta}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \gamma_k \xi]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (1.5), для функции напряжений $\psi(x, y)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{\theta}{\zeta} \left\{ \beta y(d - y) - \frac{8\sqrt{\beta} d}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k (x - \alpha y)}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \lambda_k d + (-1)^k \cos \mu_k d]} \times \right. \\ & \times [\sin \mu_k y \operatorname{sh} \lambda_k (d - y) + (-1)^k \sin \mu_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda_k y] - \\ & \left. - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [\cos \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) - \\ & - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y)] \Big\}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{\vartheta}{\zeta} \left\{ (x - \omega y)(b - x + \omega y) - \frac{8\sqrt{\beta}d}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \times \right. \\ & \times \frac{G_k \sin \delta_k (x - \omega y)}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} [\cos \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d - y) - \\ & - (-1)^k \cos \mu \delta_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \cdot [\sin \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) + \\ & + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y)] \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{(1 - \alpha^2) \beta}, \quad \mu = \alpha \sqrt{\beta}.$$

Для вычисления значений функции $\psi(x, y)$ или ее производных можно воспользоваться любым из двух представлений (2.8), предпочитая одно другому в зависимости от быстроты сходимости рядов в исследуемых точках.

Получим теперь выражения для жесткости при кручении C_t и составляющих напряжений τ_{xz} , τ_{yz} . Подставив значение $U(\xi, \eta)$ из (2.6) в (1.9), придем к следующему выражению для жесткости C_t :

$$C_t = \frac{2\sqrt{\beta}d^4}{\zeta} \left[\frac{b}{6d} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} N_k \right]. \quad (2.10)$$

С другой стороны, согласно (1.9) и (2.8), имеем:

$$C_t = \frac{2b^2d}{\zeta} \left[\frac{1}{6} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} G_k \right]. \quad (2.11)$$

Далее, используя, например, (2.11), получим, согласно (1.8), величину угла закручивания ϑ :

$$\vartheta = \frac{M_t \zeta}{2b^2d} \left[\frac{1}{6} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} G_k \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Другое выражение для ϑ получим из (1.8) и (2.11).

Наконец, из (1.3) и (2.3) будем иметь:

$$\tau_{yz} = - \frac{8\sqrt{\beta}d\vartheta}{\zeta\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k (x - \omega y)}{\delta_k [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times [\sin \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d-y) + (-1)^k \sin \mu \delta_k (d-y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y] - \\ & - \frac{8\theta}{\zeta \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k (x-\omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-x-\omega y) + \\ & + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b-x+\omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x-\omega y) \{ \alpha \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (b-x+\omega y) + \\ & + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x-\omega y) \}], \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично получаем для τ_{xz} :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{8V\sqrt{\beta}d\theta}{\zeta \pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k (x-\omega y)}{\delta_k [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} \times \\ & \times [\cos \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d-y) \{ \omega \operatorname{ctg} \delta_k (x-\omega y) + \mu \operatorname{tg} \mu \delta_k y + \lambda \operatorname{cth} \lambda \delta_k (d-y) \} - \\ & - (-1)^k \cos \mu \delta_k (d-y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y \{ \omega \operatorname{ctg} \delta_k (x-\omega y) - \mu \operatorname{tg} \mu \delta_k (d-y) - \\ & - \lambda \operatorname{cth} \lambda \delta_k y \}] + \frac{8\theta}{\zeta \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k (x-\omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-x+\omega y) \{ \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \sqrt{\beta} \gamma_k y + \\ & + \omega \alpha \operatorname{ctg} \alpha \gamma_k (x-\omega y) - \omega \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (b-x+\omega y) \} + \\ & + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b-x+\omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x-\omega y) \{ \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \sqrt{\beta} \gamma_k y - \\ & - \omega \alpha \operatorname{ctg} \alpha \gamma_k (b-x+\omega y) + \omega \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x-\omega y) \}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В случае, если $\omega=0$, т. е. когда поперечное сечение стержня обращается в прямоугольник, выражения (2.13) и (2.14) значительно упрощаются.

Задаваясь значениями упругих постоянных, отношением сторон $\frac{d}{b}$, а также величиной $\omega = \operatorname{tg} \chi$, решением усеченных систем уравнений из (2.3) найдем оценки для G_k и N_k сверху и снизу. Подставляя эти оценки в выражения для $\phi(x, y)$, τ_{yz} , τ_{xz} , а также C_t , найдем значения этих величин с избытком и недостатком. Для этого поступаем следующим образом: возьмем среднеарифметические верхних и нижних оценок неизвестных G_k и N_k и подставим их, например, в (2.13). Получим выражения для средних значений τ_{yz}^* :

$$\tau_{yz}^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(G_k^+ + G_k^-) Q_k(x, y) + (N_k^+ + N_k^-) R_k(x, y)]. \quad (2.15)$$

Здесь знаки $+$ и $-$ над G_k и N_k обозначают соответственно верхнюю или нижнюю оценки G_k и N_k ;

$$Q_k(x, y) = - \frac{8V\sqrt{\beta} d \sin \delta_k (x - \omega y)}{\zeta \pi \delta_k b [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} [\sin \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d - y) + (-1)^k \sin \mu \delta_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y]; \quad (2.16)$$

$$R_k(x, y) = - \frac{8 \vartheta \sin V \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\zeta \pi \gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k (x - \omega y) \times \\ \times \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) [\alpha \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (x - \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (b - x + \omega y)] + \\ + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y) [\alpha \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x - \omega y)]];$$

Для определения значений τ_{yz} с избытком или недостатком к выражению (2.15) прибавляем либо вычитаем величину

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(G_k^+ - G_k^-) |Q_k(x, y)| + (N_k^+) |R_k(x, y)|]. \quad (2.17)$$

При этом, очевидно, $|\tau_{yz} - \tau_{yz}^*| \leq T(x, y)$, откуда следуют оценки для τ_{yz} :

$$\tau_{yz}^- = \tau_{yz}^* - T(x, y); \quad \tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^* + T(x, y). \quad (2.18)$$

Для получения желаемой близости между оценками возьмем столько уравнений в усеченных системах, чтобы сумма первых m членов ряда (2.17) была меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. При этом, вследствие ограниченности G_k и N_k и достаточно быстрой сходимости ряда (2.17), m можем выбрать так, чтобы сумма ряда (2.17) от $k = m + 1$ до $k = \infty$ была тоже меньше заданного числа ε .

Полученные выше выражения для функции $\phi(x, y)$, касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} упрощаются в случае, если материал стержня изотропен или ортотропен. Заметим, что задачу кручения изотропного стержня с сечением в виде параллелограмма в частном случае, когда угол $\chi = 45^\circ$, способом сшивания решила Е. А. Александрян [4].

В заключение параграфа отметим небезынтересный случай анизотропии, когда отношение упругих постоянных $\frac{a_{45}}{a_{55}}$ равно тангенсу угла между осью Oy и гранью OA , взятому с обратным знаком: $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\omega$. В этом случае $\alpha = 0$; $\nu = 1$, и преобразованием (1.4) задача сводится к задаче кручения изотропного стержня с прямоугольным поперечным сечением. При этом ряды в уравнениях (2.3) исчезают и бесконечные системы линейных уравнений (2.3) для определения неизвестных G_k и N_k вырождаются в равенства

$$G_k = \frac{1 - (-1)^k}{2kd_1} b \operatorname{th} \frac{\delta_k d_1}{2}; \quad N_k = \frac{1 - (-1)^k}{2k} \operatorname{th} \frac{\gamma_k b}{2}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.6), получим решение уравнения (1.7)

$$U(\xi, \eta) = \eta(d_1 - \eta) - \frac{4}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^3 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k b}{2}} \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{b}{2} - \xi \right) \sin \gamma_k \eta, \quad (2.20)$$

совпадающее с классическим решением [5].

§ 3. Численный пример. Некоторые замечания к вопросу оценок решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим, в качестве примера, кручение анизотропного стержня с прямоугольным поперечным сечением, отношения упругих постоянных и сторон которого соответственно равны: $\frac{a_{45}}{a_{44}} = -0.4$; $\frac{a_{55}}{a_{44}} = 0.8$; $\frac{b}{d} = 2$. В этом случае величины, входящие в предыдущие выражения, будут

$$\omega = 0; \alpha = -\sqrt{0.2}; \beta = 1.25; \gamma = \sqrt{0.8}; \mu = -0.5; \lambda = 1.$$

Прежде чем переходить к вычислению неизвестных G_k и N_k из (2.3), остановимся вкратце на вопросе оценки решений совокупности бесконечных систем линейных уравнений.

Пусть имеем совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{j,k} x_j + \beta_{j,k} y_j) + r_k; \quad (3.1)$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{j,k}^* x_j + \beta_{j,k}^* y_j) + r_k^*.$$

Обозначим для краткости

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| = \alpha_k; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{j,k}| = \beta_k; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}^*| = \alpha_k^*; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{j,k}^*| = \beta_k^*. \quad (3.2)$$

Вопрос двухсторонней оценки неизвестных x_k и y_k , наряду с вопросами существования и единственности решений, широко освещен в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3], а также в большой работе Б. М. Кояловича [6] и ряде других исследований. Как известно [3], для регулярных систем имеет место следующая оценка:

$$|x_k| < K; |y_k| < K; \quad K = \sup_{(k, i)} \left\{ \frac{|r_k|}{1 - \alpha_k - \beta_k}; \frac{|r_i^*|}{1 - \alpha_i^* - \beta_i^*} \right\}. \quad (3.3)$$

Улучшение оценок неизвестных для больших k было дано Б. М. Кояловичем [6], введшим понятие лимитант. Однако иногда вычисление лимитант бывает сопряжено со значительными трудностями. При этом оценка получается одна для решений обеих систем, даже если свободные члены одной из систем обращаются в нуль.

В некоторых случаях может быть удобной следующая оценка.

Пусть, каковы бы ни были k и i , для сумм модулей коэффициентов уравнений систем (3.1) имеют место неравенства

$$1 - \alpha_k > 0; \quad 1 - \beta_i^* > 0; \quad \rho_{ki} = (1 - \alpha_k)(1 - \beta_i^*) - \beta_k \alpha_i^* > 0. \quad (3.4)$$

Тогда, если существуют два числа X и Y

$$X = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{\beta_k} + \frac{|r_i^*|}{1 - \beta_i^*}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*}}; \quad Y = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{1 - \alpha_k} + \frac{|r_i^*|}{\alpha_i^*}}{\frac{1 - \beta_i^*}{\alpha_i^*} - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k}}, \quad (3.5)$$

такие, что $|r_k| \leq (1 - \alpha_k)X - \beta_k Y$; $|r_i^*| \leq (1 - \beta_i^*)Y - \alpha_i^* X$, то существует ограниченное решение системы (3.1), которое может быть найдено методом последовательных приближений, причем

$$|x_k| \leq X, \quad |y_k| \leq Y. \quad (3.6)$$

Очевидно, что для регулярных систем условия (3.4) выполняются для любых k и i (заметим, в частности, что для совокупности систем (2.4) эти условия выполняются для любых значений отношения сторон $\frac{b}{d}$ и всех k и i при $|\alpha| \leq \sqrt{\frac{7}{8}}$). Легко также видеть, что всегда $X \leq K$; $Y \leq K$. В самом деле, перепишем, например, выражение для X так:

$$X = \sup_{(k, i)} \frac{\left(\frac{1 - \alpha_k}{\beta_k} - 1 \right) \frac{|r_k|}{1 - \alpha_k - \beta_k} + \left(1 - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*} \right) \frac{|r_i^*|}{1 - \alpha_i^* - \beta_i^*}}{\frac{1 - \alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*}} \leq K.$$

Заметим, что оценками (3.5) особенно удобно пользоваться, когда из свободных членов системы (3.1) либо r_k , либо r_i^* равны нулю. Кроме того, разбивая исследуемую систему уравнений на части, можно получить улучшенные оценки неизвестных при больших K . Для иллюстрации рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений (получающуюся при определении установившегося потока тепла в бесконечном прямом уголке, когда на боковых стенках поддержи-

вается нулевая температура, а внутри уголка происходит тепловыделение постоянной интенсивности)

$$m_k = \frac{2k}{\pi(1 + \operatorname{ch} k\pi)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j^2 + k^2} + \frac{1 - (-1)^k}{k^2}. \quad (3.7)$$

Сумма модулей коэффициентов k -го уравнения системы (3.7) равна $e^{-k\pi} \left(\operatorname{ch} k\pi - \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k\pi} \right)$, откуда, согласно общей теории регулярных систем, имеем $K = 3,039$. Примем теперь $x_1 = m_1$; $y_k = m_k$ (при $k \geq 2$). Тогда для величин (3.2) получаем следующие значения $\alpha_1 = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi}$; $\beta_1 = \frac{\pi \operatorname{ch} \pi - 2}{\pi(\operatorname{ch} \pi + 1)}$; $\alpha_k = \frac{k}{\pi(k^2 + 1)}(1 - e^{-2k\pi})$; $\beta_k = e^{-k\pi} \left(\operatorname{ch} k\pi - \frac{3k^2 + 1}{k^2 + 1} \cdot \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k\pi} \right)$; и из (3.5) имеем $\lambda = 2,536$; $\gamma = 0,721$. Таким образом, не решая ни одного уравнения системы (3.7), для неизвестных m_k при $k \geq 2$ получаем значительно лучшую оценку, чем получаемая по общей теории.

Далее, при исследовании систем иногда условие (3.5) бывает удобно (по сравнению с условием регулярности) тем, что при изменении параметров, которые, как правило, входят в выражения коэффициентов $\alpha_{j,k}$; $\beta_{j,k}$; $\alpha_{j,k}^*$; $\beta_{j,k}^*$, бывают случаи, когда условие регулярности нарушается для некоторых уравнений совокупности (3.1), тогда как условие (3.5) (его можно назвать для краткости условием бирегулярности систем) остается верным. Рассмотрим, например, систему, аналогичную (2,3), коэффициенты при неизвестных которой соответственно равны

$$\alpha_{j,k} = 0; \quad \beta_{j,k} = 4\alpha\gamma\delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \cdot \frac{1 + (-1)^{j+k}}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2};$$

$$\beta_{j,k}^* = 0; \quad \alpha_{j,k}^* = 4\alpha\gamma\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh} \gamma\gamma_k b} \cdot \frac{1 + (-1)^{j+k}}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2}.$$

Как легко вычислить, при $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1,23}}$ для любого k или i можно указать такое значение отношения $\frac{b}{d}$ (и наоборот), для которого либо β_k , либо α_i^* становятся больше 1,0042, тогда как при всех k и i величина $\rho_{ki} = 1 - \beta_k \alpha_i^* > 0,014$.

Практически, для облегчения отыскания границ неизвестных x_k и y_k , вместо (3.5) во многих случаях можно пользоваться более грубыми оценками:

$$X_1 = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{\beta_k}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i}{\beta_k}} + \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_i^*|}{1 - \beta_i^*}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*}};$$

$$Y_1 = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{1 - \alpha_k}}{1 - \beta_i^* - \frac{\beta_k}{\alpha_i}} + \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_i^*|}{\alpha_i^*}}{1 - \beta_i^* - \frac{\beta_k}{\alpha_i^*}}.$$

Так, для приведенного выше примера имеем $X_1 = 2.553$; $Y_1 = 0.783$.

Перейдем теперь к вычислению неизвестных G_k и N_k из (2.3) при заданных выше значениях постоянных.

Взяв усеченную систему и применяя предыдущие оценки, а также замечая, что свободные члены систем (2.3) стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{k}$, получим:

$$\begin{array}{ll} 1.5705 < G_1 < 1.5706 & 0.4297 < G_2 < 0.4306 \\ 0.7488 < G_3 < 0.7493 & 0.4698 < G_4 < 0.4728 \\ 0.5273 < G_5 < 0.5288 & 0.4075 < G_6 < 0.4140 \\ 0.4290 < G_7 < 0.4315 & 0.3567 < G_8 < 0.3685 \\ 0.3697 < G_9 < 0.3738 & 0.3190 < G_{10} < 0.3371 \\ 0.3282 < G_{11} < 0.3341 & 0.2913 < G_{12} < 0.3163 \\ 0.2981 < G_{13} < 0.3062 & 0.2660 < G_{14} < 0.3033 \\ 0.2744 < G_{15} < 0.2849 & \end{array}$$

$$\frac{4.288}{2k+1} < G_{2k+1} < \frac{1.86}{\sqrt{2k+1}} + \frac{4.372}{2k+1} \quad (k > 7) \quad \frac{3.724}{2k} < G_{2k} < \frac{2.73}{\sqrt{2k}} + \frac{3.812}{2k} \quad (k > 7) \quad (3.8)$$

$$\begin{array}{ll} 1.2017 < N_1 < 1.2028 & 0.5284 < N_2 < 0.5292 \\ 0.5202 < N_3 < 0.5296 & 0.3861 < N_4 < 0.3900 \\ 0.3740 < N_5 < 0.4037 & 0.3139 < N_6 < 0.3238 \\ 0.3025 < N_7 < 0.3590 & 0.2687 < N_8 < 0.2860 \\ 0.2580 < N_9 < 0.3399 & 0.2367 < N_{10} < 0.2615 \\ 0.2272 < N_{11} < 0.3163 & 0.2128 < N_{12} < 0.2443 \\ 0.1178 < N_{13} < 0.3250 & 0.1942 < N_{14} < 0.2313 \\ 0.1021 < N_{15} < 0.3140 & 0.1788 < N_{16} < 0.2206 \end{array}$$

$$\frac{1.532}{2k+1} < N_{2k+1} < \frac{1.99}{\sqrt{2k+1}} + \frac{2.700}{2k+1} \quad (k > 7) \quad \frac{2.985}{2k} < N_{2k} < \frac{1.83}{\sqrt{2k}} + \frac{3.057}{2k} \quad (k > 8)$$

Из этих оценок видно, что значения G_k и N_k как с недостатком, так и с избытком с возрастанием индекса k стремятся к нулю соответственно со скоростью $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Подставляя найденные значения G_k и N_k , например, в (2.11), определим величину жесткости при кручении C_t :

$$C_t^- = 0,55055 \frac{d^4}{a_{44}}; \quad C_t^+ = 0,55075 \frac{d^4}{a_{44}}. \quad (3.9)$$

Как видно из (3.9), оценки для C_t сверху и снизу практически совпадают. Аналогичные оценки для C_t получим из (2.10). Подставляя значения C_t из (3.9) в (1.5), получим величину угла кручения ϑ :

$$\vartheta^- = 1,81570 \frac{a_{44}}{d^3} M_t; \quad \vartheta^+ = 1,81637 \frac{a_{44}}{d^3} M_t. \quad (3.0)$$

Прежде, чем переходить к вычислению значений составляющих напряжений, отметим, что величины $\frac{G_k}{k}$ и $\frac{N_k}{k}$ монотонно убывают с возрастанием k (отдельно по четным и нечетным k). Это обстоятельство облегчает вычисление оценок в знакпеременных рядах, входящих в выражения для составляющих напряжений.

Ниже приведены значения τ_{xz} и τ_{yz} в некоторых точках.

Таблица 1

Значения напряжения τ_{xz} (выраженные в отношениях к $\frac{M_t}{d^3}$)

x	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	$b = 2d$
1	2	3	4	5	6
$\tau_{xz}^+(x, 0)$	0	+2,0631	+2,0623	+1,5666	0
$\tau_{xz}^-(x, 0)$	0	+1,9757	+2,0298	+1,4794	0
$\tau_{xz}^*(x, 0)$	0	+2,0194	+2,0461	+1,5230	0
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8035	+1,0194	+0,8626	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8019	+1,0185	+0,8609	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8027	+1,0190	+0,8618	0
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1392	0	+0,1401	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1401	0	+0,1392	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1397	0	+0,1397	0

1	2	3	4	5	6
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8609	-1,0185	-0,8019	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8626	-1,0194	-0,8035	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8618	-1,0190	-0,8027	0
$\tau_{xz}^+(x, d)$	0	-1,4794	-2,0298	-1,9757	0
$\tau_{xz}^-(x, d)$	0	-1,5666	-2,0623	-2,0631	0
$\tau_{xz}^*(x, d)$	0	-1,5230	-2,0461	-2,0194	0

Таблица 2

Значения напряжения τ_{yz} (выраженные в отношениях к $\frac{M_1}{d^3}$)

x	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	$b = 2d$
$\tau_{yz}^+(x, 0) = \tau_{yz}^-(x, 0)$	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,4463	-0,2200	+0,0429	+0,3345	+0,9502
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,5505	-0,2211	+0,0426	+0,3333	+0,8463
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,4984	-0,2206	+0,0428	+0,3339	+0,8983
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,3804	-0,3989	0	+0,3998	+1,4548
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,4548	-0,3998	0	+0,3989	+1,3804
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,4176	-0,3994	0	+0,3994	+1,4176
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,8463	-0,3333	-0,0426	+0,2211	+1,5505
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,9502	-0,3345	-0,0429	+0,2200	+1,4463
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,8983	-0,3339	-0,0428	+0,2206	+1,4984
$\tau_{yz}^+(x, d) = \tau_{yz}^-(x, d)$	0	0	0	0	0

В этих таблицах даны значения оценок сверху и снизу составляющих напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , а также значения их среднеарифметических $\tau_{xz}^* = \frac{\tau_{xz}^+ + \tau_{xz}^-}{2}$ и $\tau_{yz}^* = \frac{\tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^-}{2}$.

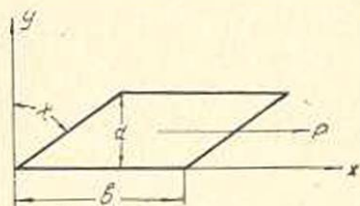
§ 4. Изгиб анизотропной консоли.

Постановка задачи и построение решения

Рассмотрим теперь задачу изгиба анизотропной консоли силой P , приложенной к свободному концу в центре тяжести поперечного сечения и направленной параллельно оси ox (фиг. 3).

Координатные оси берем параллельно главным осям сечения. В этом случае напряжения в сечении стержня будут [1]

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \\ \sigma_z = -\frac{P_z}{I} \left(x - \frac{b + \omega d}{2} \right), \quad (4.1)$$



Фиг. 3.

где, как и выше, $\omega = \operatorname{tg} \chi$, I — момент инерции сечения относительно оси $x = \frac{b}{2}$. Уравнения равновесия при этом сведутся к следующему

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{P}{I} \left(x - \frac{b + \omega d}{2} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Будем искать касательные напряжения в виде

$$\tau_{xz} = \frac{P}{I} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{2} (x - \omega y) (b - x + \omega y) - \frac{\omega^2}{2} y (d - y) \right]; \\ \tau_{yz} = -\frac{P}{I} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\omega}{2} y (d - y) \right]. \quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.3) в уравнения совместности, для определения $\psi(x, y)$ получаем уравнение [1]

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = \\ = (2a_{13} - a_{45} - \omega a_{55}) \left(\frac{b + \omega d}{2} - x \right) + (a_{36} + 2\omega a_{45} + 2\omega^2 a_{55}) \left(\frac{d}{2} - y \right). \quad (4.4)$$

Граничные условия для функции $\psi(x, y)$ на контуре s , согласно [7], будут

$$\psi \Big|_s = \frac{P}{2I} \int_0^s [\omega y (d - y) (\omega dy - dx) + (x - \omega y) (b - x + \omega y) dy] = 0. \quad (4.5)$$

Производя преобразования

$$x - \omega y = \xi, \quad \sqrt{\beta} y = \eta, \quad \psi(x, y) = \frac{U(\xi, \eta)}{\zeta}, \quad (4.6)$$

придем к следующему уравнению для функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = \\ = A \left(\frac{b}{2} - \xi \right) + B \left(\frac{d_1}{2} - \eta \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$A = 2a_{13} - a_{45} - \omega a_{55}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{\beta}} [2\omega a_{13} + a_{36} + \omega a_{45} + \omega^2 a_{55}]. \quad (4.8)$$

Аналогично § 1, ищем функцию $U(\xi, \eta)$ в виде

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta; \quad (4.9)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

причем $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$f_k'(\xi) + 2\alpha \gamma_k f_k'(\xi) - \gamma_k^2 f_k(\xi) = \frac{2}{d_1} p_k(\xi); \quad (4.10)$$

$$\varphi_k'(\xi) - 2\alpha \gamma_k \varphi_k'(\xi) - \gamma_k^2 \varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} [S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) + q_k(\xi)],$$

где

$$p_k(\xi) = \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k} A \left(\frac{b}{2} - \xi \right) - \frac{1 + (-1)^k}{\gamma_k} d_1 B; \quad q_k(\xi) = \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} B; \quad (4.11)$$

$$\varphi_0(\xi) = A d_1 \left(\frac{b}{2} - \xi \right); \quad S_1(\xi) = \left. \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}; \quad S_2(\xi) = \left. \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=d_1}.$$

Удовлетворяя граничным условиям и используя первое из разложений (4.9), придем к следующему выражению для функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = - \frac{\eta(d_1 - \eta)}{12} [3A(b - 2\xi) - B(d - 2\eta)] - \\ - \frac{1}{2\alpha b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma \delta_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1]} [\sin \alpha \delta_k \eta \operatorname{sh} \gamma \delta_k (d_1 - \eta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^k \sin \alpha \delta_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \nu \delta_k \eta] - \\
& - \frac{1}{2 \nu d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\
& \times \sin \gamma_k \eta \left\{ N_k - 4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[A - (\alpha A + B) \left(2\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{2}{d_1} (2\alpha A + B) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^4 \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} [\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) - \\
& - \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi] \sin \gamma_k \eta.
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Аналогично получаем другое представление функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
U(\xi, \eta) &= \frac{A}{12} \xi (b - \xi) (b - 2\xi) - \frac{1}{24} (2\alpha A + B) (d_1 - 2\eta) (d_1^2 + 2\eta d_1 - \\
& - 2\eta^2) - \frac{1}{2 \nu b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1]} [\cos \alpha \delta_k \eta \operatorname{sh} \nu \delta_k (d_1 - \\
& - \eta) + (-1)^k \cos \alpha \delta_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \nu \delta_k \eta] - \\
& - \frac{1}{2 \nu d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) - (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\
& \times \cos \gamma_k \eta \left\{ N_k - 4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[A - (\alpha A + B) \left(2\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{2}{d_1} (2\alpha A + B) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^4 \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} [\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) + \\
& + \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi] \cos \gamma_k \eta.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Неизвестные G_k и N_k , входящие в выражения (4.12) и (4.13), определяются из следующей совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
G_k &= -4\alpha \nu \delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+k}] N_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k; \\
N_k &= -4\alpha \nu \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+k}] G_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \delta_j^2 \gamma_k^2} + u_k;
\end{aligned} \quad (4.14)$$

причем свободные члены уравнений (4.14) имеют вид:

$$t_k = -\frac{4[1 - (-1)^k]}{\delta_k^2} \left[\frac{\nu}{2} \delta_k d_1 B \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 + \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) - B + \right. \\ \left. + (A + 2\alpha B) \left(\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) \right] - \frac{1 + (-1)^k}{\delta_k} 2\nu b A \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right); \quad (4.15)$$

$$u_k = -4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[\frac{\nu}{2} \gamma_k b A \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b + \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) - \right. \\ \left. - A + (2\alpha A + B) \left(\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] - \\ - \frac{1 + (-1)^k}{\gamma_k} 2\nu d_1 B \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right).$$

Что касается постоянных α , ν и d_1 , то они определяются из (1.6), (1.11) и (1.15).

Коэффициенты при неизвестных G_k и N_k систем уравнений (4.14) совпадают с соответствующими коэффициентами систем (2.3), свободные члены t_k и u_k так же стремятся к нулю с возрастанием k , как и свободные члены уравнений (2.3). Поэтому все сказанное выше относительно решений бесконечных систем линейных уравнений (2.4) справедливо также и для систем (4.14).

Принимая во внимание (4.6), из (4.12) или (4.13) получим выражение для функции $\psi(x, y)$, после чего, согласно (4.3), определим величины касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

Заметим, что в случае, если $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\operatorname{tg} \chi$, то $\alpha = 0$, $\nu = 1$, и преобразованием (4.6) задача сводится к задаче изгиба изотропной консоли с прямоугольным поперечным сечением [8].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 8 II 1958

Ռ. Ս. Մինսյան

ՋՈՒԳԱՆԵՌԱԳԾԱՏԻՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՈՒ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հոդվածում արվում է զուգահեռադժարին լայնական հատվածք ունեցող անիզոտրոպ պլրիզմատիկ ձողերի ոլորման ու ծաման խնդիրների էֆեկտիվ լուծումը:

Ձողի ոլորման դեպքում, ինչպես հայտնի է [1], լարումների ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ հավասարմանը

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = -2\theta$$

որտեղ a_{ik} -երը ձողի նյութի առաձգական հաստատուններն են, ընդ որում $a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0$, իսկ θ -ն ուղրման անհալա անկյունն է:

Լուծումը որոշվում է միաժամանակ երկու տեսակ շարքերով ներկայացմամբ

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta;$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

որտեղ

$$U(\xi, \eta) = \frac{\zeta}{\beta} \psi(x, y); \quad \xi = x - \omega y, \quad \eta = \sqrt{\beta} y, \quad \omega = \operatorname{tg} \chi,$$

$$\zeta = a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}; \quad \beta = \frac{\zeta}{a_{55}}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad d_1 = \sqrt{\beta} d.$$

Դիֆերենցիալ հավասարման և եզրային պայմաններին բավարարումը բերում է գծային հանրահաշվային հավասարումների անվերջ սխառնների լուծմանը: Յուրյ է տրվում, որ համարյա բոլոր զործնականորեն հետաքրքիր դեպքերում այդ սխառնները լիովին սեղուլար են: Անհիզոտրոպիայի մասնավոր դեպքում, երբ $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\omega$, հավասարումների անվերջ սխառնները վերածվում են սուրորական հավասարությունների, ու վերևում նշված ձևավորումով օգնությունը խնդիրը բերվում է ազդանկյուն կտրվածք ունեցող իզոտրոպ ձողի ուղրմանը, և լուծումը համընկնում է կլասիկ լուծման հետ [5]:

Տրվում է լարումների, և առհասարակ, ֆունկցիոնալ շարքերի վերից ու վարից գնահատման եղանակ:

Դիտարկվում է մի հաշվային օրինակ: Անվերջ սխառններից որոշվող անհալաների գնահատականների լավացման համար ներմտծվում է սխառնների բխեզուլարություն հասկացողությունը:

Ձողի ծաման դեպքում հավասարակշռության հավասարումներին բավարարելու համար շոշափող լարումներն որոնվում են հետևյալ կերպ՝

$$\tau_{xz} = \frac{P}{J} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{2} (x - \omega y) (b - x + \omega y) - \frac{\omega^2}{2} y (d - y) \right],$$

$$\tau_{yz} = -\frac{P}{J} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} y (d - y) \right],$$

որտեղ $\psi(x, y)$ ֆունկցիան վերահիշյալ եղանակով որոշվում է համառեզուլտային հավասարումից և եզրագծի վրա զրո լինելու պայմանից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Минасян Р. С. О решении задачи Дирихле уравнений с неразделяющимися переменными для прямоугольника. ДАН Армянской ССР, т. XXIII, № 4, 1956.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
4. Александрян Е. А. О кручении некоторых призматических стержней. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. 5, № 2, 1952.
5. Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires présentés par divers savants..., Sciences math. et phys., t. 14, 1856, Paris.
6. Кондрович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных уравнений. Известия физико-математ. института им. В. А. Стеклова, т. III, 1930.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. Гостехиздат, 1947.
8. Saint-Venant B. Mémoire sur la flexion des prismes. Journal de Math. pures et appliquées (Liouville), Ser. II, t. I, 1856.