

Н. Е. Товмасян

О существовании решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае несуммируемых граничных значений

Известно, что задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет решение для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, когда область удовлетворяет некоторым условиям.

В настоящей работе дано доказательство существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, когда граничная функция имеет конечное число точек разрыва.

Пусть D — трехмерная область, где для любого непрерывного граничного условия задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет решение, т. е. область нормальная. На границе σ области D дана функция $f(p)$, которая непрерывна на всех точках границы, кроме точки $p = p_0$, где имеет разрыв произвольного порядка. В малой окрестности точки p_0 граница области D имеет непрерывно меняющуюся нормаль, и прямые, параллельные нормали в точке p_0 , в малой окрестности p_0 пересекают границу области один раз.

Теорема. При вышеуказанных условиях налагаемых на область D и функцию $f(p)$ существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т. е. существует функция $U(p)$ такая, что она:

1. непрерывна в точках $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$,
2. гармонична в области D ,
3. $U(p)|_{\sigma} = f(p)$.

Если разрыв функции — первого порядка, то теорема очевидна. Действительно, если определим на σ функция $f_n(p)$, которые равны $f(p)$, если $\overline{pp_0} > \frac{1}{n}$ и в остальной части непрерывно продолжаются так, что модуль не меняется, то последовательность решений $U_n(p)$ соответствующая этим граничным значениям $f_n(p)$, равномерно сходится вне сферы с центром в p_0 и сколь угодно малым радиусом r_0 , так как

$$|U_n(p) - U_{n+k}(p)| \leq 2M \cdot \frac{1}{n \cdot r_{p,p_0}}, \quad \text{если } r_{p,p_0} > \frac{1}{n},$$

где

$$M = \sup_{\substack{p \in \sigma \\ \sigma \neq p_0}} |f(p)|.$$

потому что это неравенство имеет место на границе области

$$D_1 = D \cdot M \left(\overline{pp_0} > \frac{1}{n} \right).$$

Следовательно, предельная функция последовательности удовлетворяет нашей теореме.

В общем случае теорема будет доказана, если покажем существование такой функции $U_1(p)$, что:

1. $U_1(p)$ непрерывна в точках $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$.

2. гармонична в области D ,

3. $|U_1(p) - f(p)| < L$, где L — постоянное положительное число.

Действительно, $U(p) = U_1(p) + U_2(p)$ удовлетворяет нашей теореме, где $U_2(p)$ решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, с граничным значением $f(p) - U_1(p)$ в области D , существование которого следует из вышеуказанного.

Докажем существование функции $U_1(p)$.

Берем как начало координат точку $p = p_0$. Положительным направлением оси z пусть будет направление внешней нормали поверхности в этой точке.

При наших предположениях относительно области и границы, вокруг точки p_0 существует окрестность $2r_0$, причем уравнение поверхности дается в виде $z = z(x, y)$, а $|\operatorname{tg}(n, z)| < \alpha$, где n — направление нормали в этой точке, а α — заранее заданное достаточно малое положительное число.

Построим замкнутые поверхности σ_1 и σ_2 , которые в $S(p_0, r_0)$ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_1 &= z(x, y) + h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}); \\ z_2 &= z(x, y) - h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $S(p_0, r_0)$ — сфера с центром в p_0 и радиусом r_0 , а $h(r)$ — возрастающая функция с непрерывной производной, причем $h(0) = 0$. В остальной части σ_1 и σ_2 непрерывно продолжаются, так что не имеют с σ других общих точек, кроме точки p_0 .

Обозначим $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma'$, а область, ограниченную поверхностью σ' , — через D' .

Определим на поверхности σ' функцию $g(p)$ следующим образом: $g(p') = f(p)$, если $pp' \leq r_0$, $p' \in \sigma'$, $p \in \sigma$ и если p и p' имеют одинаковые ортогональные проекции на плоскости (x, y) . В остальной части σ' функция $g(p)$ продолжается непрерывно.

Для доказательства теоремы докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если

1. $|h'(r)| < \alpha$, (α некоторое положительное число)
2. $h(r) < r^k \left[f\left(\frac{r}{2c_1}\right) \right]^{-1}$,

где

$$f(r) = \max_{pp_0 > r} |f(p)| \quad c_1 = \sqrt{1 + 4\alpha^2}, \quad (2)$$

то в области D' , при граничных значениях $g(p)$, существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Доказательство. Определим на σ' непрерывные функции следующим образом:

$$f_1(p) = \begin{cases} g(p), & \text{если } \overline{pp_0} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

В остальной части продолжаем непрерывно так, чтобы максимум модуля не менялся.

$$f_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{pp_0} \geq \frac{1}{n-1} \\ g(p) - f_{n-1}(p), & \text{если } \frac{1}{n} \leq \overline{pp_0} \leq \frac{1}{n-1} \\ 0, & \text{если } \overline{pp_0} \geq \frac{1}{n+1} \end{cases} \quad (4)$$

В остальной части продолжаем непрерывно так, чтобы максимум модуля не менялся.

Обозначим

$$g(r) = \max_{pp_0 > r} |g(p)|.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |f_1(p)| &\leq g(1) \\ |f_n(p)| &\leq g\left(\frac{1}{n}\right) + |f_{n-1}(p)| \leq g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n-1}\right) + \dots + g(1) \\ |f_n(p)| &\leq ng\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$g(p) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(p), \quad (6)$$

когда $p \neq p_0$.

Пусть $U_n(p)$ — гармонические функции, соответствующие граничным значениям $f_n(p)$. Покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$ равномерно сходится в той части области D' , которая находится вне некоторой окрестности точки p_0 .

Этим лемма будет доказана, т. к. сумма ряда будет удовлетворять условиям леммы.

Оценим $U_n(p)$.

Сравним $U_n(p)$ с функцией, которая гармонична вне сферы $S(p_0, \frac{1}{n-1})$ и на той части сферической поверхности, которая лежит внутри D' , принимает значение $n \cdot g(\frac{1}{n})$, а в остальной части сферической поверхности равна нулю. Очевидно, что $|U_n(p)|$ меньше этой функции, когда $\overline{pp_0} > \frac{1}{n}$. Следовательно, используя интеграл Пуассона, при помощи которого представляется эта функция, получим:

$$|U_n(p)| \leq n^2 g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot S_{\frac{1}{n-1}}, \quad \text{если } \overline{pp_0} > \frac{2}{n}, \quad (7)$$

где S_r — площадь той части $S(p_0, r)$, которая лежит внутри области D' . Оценим S_r в зависимости от $h(r)$.

Уравнение кривой пересечения σ с $S(p_0, r)$, когда $r < r_0$, будет

$$z = z(x, y) \quad (8)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Согласно предположению относительно σ , функции $z(x, y)$, $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ непрерывны по x и по y .

Запишем (8) в полярных координатах

$$z = z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad (9)$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2.$$

Из (9) ясно, что ρ и φ связаны следующим образом

$$\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = r^2. \quad (10)$$

Здесь ρ — функция от φ с непрерывной производной.

Действительно, каждому фиксированному φ соответствует по крайней мере одно ρ , т. к. функция $\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - r^2$ в точках $\rho = 0$, $\rho = r$ имеет различные знаки и непрерывна по ρ . Она однозначна, т. к. в противном случае существовало бы такое φ_0 , для которого имело бы место

$$\rho_1^2 + z^2 (\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) = r^2,$$

$$\rho_2^2 + z^2 (\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) = r^2, \quad \rho_1 \neq \rho_2.$$

Вычитая, получим

$$(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2) = [z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) + z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0)] \times \\ \times [z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) - z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0)] \quad (11)$$

$$z(\rho_i \cos \varphi_0, \rho_i \sin \varphi_0) = z(\rho_i \cos \varphi_0, \rho_i \sin \varphi_0) - z(0, 0) = \\ = \rho_i \times [z_x(\rho_i^* \cos \varphi_0, \rho_i^* \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 + z_y(\rho_i^* \cos \varphi_0, \rho_i^* \sin \varphi_0) \sin \varphi_0], \\ 0 \leq \rho_i^* \leq \rho_i, \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

$$z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) - z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) = \\ = (\rho_2 - \rho_1) [z_x(\bar{\rho} \cos \varphi_0, \bar{\rho} \sin \varphi_0) \times \\ \times \cos \varphi_0 + z_y(\bar{\rho} \cos \varphi_0, \bar{\rho} \sin \varphi_0) \sin \varphi_0] \quad \bar{\rho} \in [\rho_1, \rho_2]. \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}(n, z) = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}, \quad \text{откуда} \quad |z_x| < \alpha, \quad |z_y| < \alpha. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (13) в (11) и используя (14), получим $4\alpha^2 \geq 1$.

Беря $\alpha < \frac{1}{2}$, получим противоречие.

Обозначим

$$F(\varphi, \rho) = \rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - r^2,$$

тогда

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| = |2z \times (z_x \rho \cos \varphi + z_y \rho \sin \varphi)| \leq 8\alpha^2 \rho^2.$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \rho} \right| = |2\rho + 2z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot [z_x \cos \varphi + z_y \sin \varphi]| \geq 2\rho(1 - 4\alpha^2),$$

откуда получим, что функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную.

Возьмем $\alpha < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, тогда

$$|\rho'(\varphi)| < \frac{4\alpha^2 r}{1 - 4\alpha^2} < 8\alpha^2 r. \quad (15)$$

Следовательно, уравнение этой кривой запишется следующим образом

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \\ z = z(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi). \quad (16)$$

Обозначим через l , длину этой кривой

$$l_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\rho(\varphi) \sin \varphi + \rho'(\varphi) \cos \varphi)^2 + (\rho(\varphi) \cos \varphi + \rho'(\varphi) \sin \varphi)^2 + [z_r \cdot (-\rho(\varphi) \sin \varphi + \rho'(\varphi) \cos \varphi) + z_y \cdot (\rho(\varphi) \cos \varphi + \rho'(\varphi) \sin \varphi)]^2} d\varphi \quad (17)$$

Из (9), (15) и (17) следует

$$l_r \leq 8\pi r.$$

Обозначим через l_1 кривую пересечения σ_1 и $S(\rho_0, r)$.

Аналогично можно показать, что ее уравнение можно записать в следующем виде

$$x = \rho_1(\varphi) \cos \varphi$$

$$y = \rho_1(\varphi) \sin \varphi$$

$$z = z(\rho_1(\varphi) \cos \varphi, \rho_1(\varphi) \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2(\varphi) + z^2(\rho_1(\varphi) \cos \varphi, \rho_1(\varphi) \sin \varphi)})$$

где $\rho_1(\varphi)$ определяется из уравнения

$$\rho_1^2 + [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)})]^2 = r^2. \quad (18)$$

Оценим расстояние между точками l_r и l_1 , соответствующими одному и тому же φ

$$d = \sqrt{(\rho - \rho_1)^2 + [z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}) - h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)})]^2}.$$

Пользуясь неравенствами $|z_x| < \alpha$, $|z_y| < \alpha$ и уравнением (10) получим

$$|z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) - z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)| < 2\alpha |\rho_1 - \rho|; \quad (19)$$

$$h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) = h(r) +$$

$$+ h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) -$$

$$- h(\sqrt{\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}) \leq h(r) + 3\alpha |\rho - \rho_1|. \quad (20)$$

Из (10) и (18) получим

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_1)(\rho + \rho_1) &= [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) + \\ &+ z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)] [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + \\ &+ h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) - z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (19) и (20) получим

$$|\rho - \rho_1| |\rho + \rho_1| \leq [2\alpha (\rho + \rho_1) + 3\alpha |\rho - \rho_1| + h(r)] (5\alpha |\rho - \rho_1| + h(r))$$

Т. К.

$$|h'(r)| < \alpha, \quad h(0) = 0, \quad \text{то } h(r) < \alpha \cdot r.$$

Из (10) следует $\rho^2 + 4\alpha^2 \rho^2 > r^2$, $\rho > \frac{r}{2}$, следовательно

$$h(r) < 2\alpha\rho.$$

Деля обе части (21) на $\rho_1 + \rho$, получим

$$\begin{aligned} |\rho - \rho_1| &\leq 6\alpha [5\alpha |\rho - \rho_1| + h(r)] = 30\alpha^2 |\rho - \rho_1| + 6\alpha h(r); \\ |\rho - \rho_1| (1 - 30\alpha^2) &\leq 6\alpha h(r) \\ |\rho - \rho_1| &\leq c_2 \alpha h(r). \end{aligned} \quad (23)$$

Используя оценки (19), (20) и (23), получим

$$d < c_2 h(r), \quad (24)$$

откуда вытекает, что минимальное расстояние между точками $S(p_0, r)$, которые находятся внутри области D' , и l_r не превосходит $c_3 h(r)$.

Возьмем на l_r точки $p_1, \dots, p_n$ так, чтобы длина дуги $p_i p_{i+1}$ равнялась $c_3 h(r)$, причем n настолько велико, чтобы впервые $p_n p_1 \leq c_3 h(r)$ и $p_1 \neq p_n$.

Берем эти точки как центры и строим сферы радиусом $2c_3 h(r)$. Очевидно, что S_r целиком принадлежит этим сферам.

Легко вычислить площадь той части поверхности $S(p_0, r)$, которая лежит внутри одной сферы $S(p_i, 2c_3 h(r))$. Это будет $\pi [c_3 h(r)]^2$.

Но число таких сфер $S(p_i, 2c_3 h(r))$ меньше $\frac{l_r}{c_3 h(r)} + 1$, значит

$$S_r \leq \pi [c_3 h(r)]^2 \cdot \left[\frac{8\pi r}{h(r)} + 1 \right] < c_4 r h(r).$$

Следовательно,

$$S_{\frac{1}{n-1}} \leq c_4 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot h \left(\frac{1}{n-1} \right). \quad (25)$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$g(r) \leq f \left(\frac{r}{c_1} \right), \quad \text{где } c_1 = \sqrt{1 + 4\alpha^2}. \quad (26)$$

Из (25) и (26) и второго условия леммы, получим

$$|U_n(p)| < \frac{c_5}{n^2}, \quad \text{если } \overline{pp_0} > \frac{2}{n}, \quad (27)$$

что и доказывает лемму.

Оценим значение функции $U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$ в любой точке $p \in D'$.

$$|U(p)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p) \right| \leq \left| \sum_{\frac{2}{n} > \overline{pp_0} = r} U_n(p) \right| + \sum_{\frac{2}{n} < \overline{pp_0} = r} |U_n(p)|. \quad (28)$$

Очевидно,

$$\left| \sum_{k=1}^n U_k(p) \right|_{p \in \sigma'} \leq n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right). \quad (29)$$

Наибольший индекс n первого слагаемого (28) удовлетворяет следующим неравенствам 1) $\frac{2}{n} > r$, 2) $\frac{2}{n+1} \leq r$

$$\frac{1}{n} > \frac{r}{2}, \quad n > \frac{2}{r} - 1. \quad (30)$$

Из (27), (28), (29), (30) получим

$$|U(p)| \leq \frac{c_6}{r} f\left(\frac{r}{2c_1}\right). \quad (31)$$

Лемма 2. Если $h(r)$ удовлетворяет условиям 1-ой леммы и дополнительному условию

$$h(r) \leq r \frac{\delta(c_7 r, \varepsilon)}{f(c_7 r)},$$

то $|U(p) - f(p)|_{p \in \sigma, p \neq p_0}$ ограничено, где $U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$

функция, построенная для 1-ой леммы, C_7 — некоторая постоянная, а $\delta(r, \varepsilon) = \inf_{p_1 p_0 > r} p_1 p$ при

$$|f(p_1) - f(p)| \geq \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем из точки $p_1 \in \sigma$ шар радиусом $r_1 < \overline{p_1 p_0} < \frac{r_0}{2}$ и рассмотрим область $D^* = M(\overline{p p_1} < r_1) \cdot D'$.

Из (31) очевидно, что в этой области

$$U(p) < \frac{c_6}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right), \quad \text{где } r = \overline{p_0 p_1}, \text{ и}$$

$$|U(p_1) - f(p_1)| \leq \max_{\substack{p' \in \sigma' \\ p, p' < r_1}} |U(p') - f(p_1)| +$$

$$+ \left| \frac{c_6}{r - r_1} f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) + f(r) \right| \cdot \frac{\overline{S}_r(p_1)}{4\pi r_1^2}, \quad (32)$$

где $\widehat{S}_r(p_1)$ — площадь той части $S(p_1, r_1)$, которая лежит в области D' .

$$U(p') - f(p_1)|_{p' \in \sigma'} = f(\bar{p}') - f(p_1),$$

причем $\bar{p}'$ — точка пересечения поверхности σ с прямой, проведенной из точки p' параллельно оси z .

Легко видеть, что

$$\overline{p'p_1} \leq c_1 r_1, \quad \text{если} \quad \overline{p'p_1} < r_0. \quad (33)$$

Следовательно, если брать

$$r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1},$$

то из (33) получим, что первое слагаемое (32) меньше ε .

Оценим $\widehat{S}_r(p_1)$.

Обозначим кривые пересечения сферы $S(p_1, r_1)$ с σ_1 и σ_2 соответственно через $l_r(p_1)$ и $l'_r(p_1)$.

Эти уравнения $l_r(p_1)$ и $l'_r(p_1)$ будет

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z(x_1, y_1))^2 &= r_1^2, \\ z &= z(x, y). \end{aligned} \quad (34)$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z(x_1, y_1))^2 = r_1^2,$$

$$z = z(x, y) + h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}).$$

В параметрическом виде

$$x = x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi,$$

$$z = z(x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi);$$

(34').

$$x = x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} z &= z(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi) + h(\sqrt{(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi)}), \end{aligned}$$

где φ — угол между осью x и проекцией на плоскость (x, y) отрезка, соединяющего данную точку кривой с точкой p_1 , а $\rho(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ соответственно — длины этих проекций, когда p_1 принадлежит 1-ой или 2-ой кривым. Легко получить, что $\rho(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ зависят от φ следующим образом:

$$\rho^2 + [z(x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi) - z(x_1, y_1)]^2 = r_1^2 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 + [z(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + \\ + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)}) - z(x_1, y_1)]^2 = r_1^2 \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, что $V(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 \leq r + r_1$, т. к. $(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)$ на плоскости (x, y) — проекция точки кривой $l_r(p_1)$.

$$|z(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)| \leq \\ \leq 2a \sqrt{(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2} \leq 2a(r + r_1).$$

Следовательно,

$$h(V(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)) \leq \\ \leq h(c_1(r + r_1)). \quad (37)$$

Произведя те же операции, которые применяли для оценки S_r и используя (37), получим

$$\bar{S}_r(p_1) \leq c_8 h(c_1(r + r_1)) \cdot r_1.$$

Из полученной оценки, из уравнения $r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1}$ и из условий леммы легко получим, что второе слагаемое (32) ограничено, если взять $c_7 \leq \frac{1}{8c_1^2}$. Действительно,

$$I_2 = \left[\frac{c_8}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) + f(r) \right] \cdot \frac{\bar{S}_r(p_1)}{4\pi r_1^2} \leq \\ \leq \frac{2c_8 \cdot c_8}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) \cdot \frac{h(c_1(r + r_1))}{4\pi r_1^2} \cdot r_1.$$

Из определения $\delta(r, \varepsilon)$ следует, что

$$r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1} < \frac{r}{2}$$

$$I_2 \leq \frac{4c_8 \cdot c_8}{r} \cdot f\left(\frac{r}{4c_1}\right) \cdot \frac{h(2c_1 \cdot r) \cdot 2c_1}{4\pi \delta(r, \varepsilon)} \leq c_9 \frac{f\left(\frac{r}{4c_1}\right)}{r \delta(r, \varepsilon)} \cdot \frac{\delta(c_7 \cdot 2c_1 r, \varepsilon)}{f(2 \cdot c_7 \cdot c_1 r)} \leq c_{10},$$

что и доказывает лемму.

Второе условие леммы выполняется, если взять

$$|h'(r)| < a,$$

$$h(r) < \min \left\{ \frac{r \delta(c_7 \cdot r, \varepsilon)}{f(c_7 \cdot r)}, r^4 \cdot \left[f\left(\frac{r}{2c_1}\right) \right]^{-1} \right\} = \varphi(r). \quad (38)$$

Очевидно, что $\varphi(r)$ будет убывающей непрерывной функцией от r и стремится к нулю, когда r стремится к нулю.

Пусть $h(r)$ удовлетворяет 2-ому условию леммы.

Возьмем область $D_m = M\left(\overline{pp_0} > \frac{1}{m}\right) \cdot D + D'$ и на его границе σ^m определим новую функцию $q(p)$, которая равна $g(p)$ на общей части σ' и $\sigma^{(m)}$, а в остальной части непрерывно продолжается.

По методу построения гармонической функции $U(p)$ для 1-ой леммы построим функции $U^{(m)}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(m)}(p)$ в области D_m для граничной функции $q(p)$. Очевидно, что мы можем брать граничные значения так, что

$$\begin{aligned} U_n^{(m)}(p) \Big|_{p \in \sigma^{(m)} \cdot \sigma'} &= U_n(p) \\ U_n^{(m)}(p) \Big|_{\substack{p \in \sigma^{(m)} \cdot \sigma'' \\ p \in \sigma^{(m)}}} &= 0, \quad \text{если } n \geq m+1 \end{aligned} \quad (39)$$

По методу построения области D' построим D'' и D''' . Вместо $h(r)$ берем соответственно $\frac{h(r)}{2}$ и $\frac{h(r)}{4}$ так, что любые две поверхности из $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$, кроме точки p_0 , не имеют других общих точек.

Лемма 3. Существует функция $V^{(m)}(p)$, которая:

$$1. \text{ имеет вид } V^{(m)}(p) = \omega(p) + \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p)$$

$$2. |V^{(m)}(p) - U(p)| < \varepsilon, \text{ если } p \in D''',$$

где ε — произвольное положительное число, N — целое число, $U(p)$ — функция, построенная для 1-ой леммы, а $\omega(p)$ — гармоническая функция в области $D'' + D$.

Доказательство. Легко заметить, что для $U_n^{(m)}(p)$ и для $U_n(p)$ имеет место следующая оценка

$$|U_n^{(m)}(p)| < \frac{c_5}{n^2}, \quad \text{если } \frac{1}{n-1} \leq \min\left(r_0, \frac{1}{m}, \frac{\overline{pp_0}}{2}\right)$$

$U_n^{(m)}(p) - U_n(p)$ — гармоническая в области D' и

$$U_n^{(m)}(p) - U_n(p) \Big|_{p \in \sigma'} = \begin{cases} 0 & \text{при } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{m} \\ U_n^{(m)}(p) & \text{при } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{m}, p \in \sigma_2 \\ 0 & \text{при } \overline{pp_0} > \frac{1}{m}, p \in \sigma_1, \end{cases} \quad (40)$$

если $n \geq m+1$.

Следовательно, из (40) получим

$$|U_n^{(m)}(p) - U_n(p)| < \frac{c_5}{n^2}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{n-1} \leq \min\left(r_0, \frac{1}{2m}\right). \quad (41)$$

Значит для ε существует такое N , что

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} U_n(p) - \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p) \right| < \varepsilon, \quad \text{если } p \in D'. \quad (42)$$

Обозначим

$$V_N(p) = \sum_{n=1}^N U_n(p). \quad (43)$$

Покажем, что для этой функции в области D'' имеет место формула Грина. Для этого достаточно показать, что его производная по любому направлению в этой области ограничена.

Вычислим гармоническую меру $\omega(S_r, M(pp_0 < r), p)$, которую в дальнейшем будем коротко обозначать через $\omega(S_r, p)$.

$$\omega(S_r, p) = \frac{r}{4\pi} \int_{S_r} \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{(r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2)^{3/2}}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что $\omega(S_r, p)$ получит наибольшее значение, когда S_r есть сегмент, центр которого находится на прямой $\overline{pp_0}$. Значит

$$\omega(S_r, p) \leq \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{(r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2)^{3/2}} \quad (45)$$

где

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{S_r}{2\pi r^2}.$$

Вычислим интеграл, получим

$$\omega(S_r, p) \leq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{r}{\rho} + 1 \right) \left[1 - \frac{r - \rho}{\sqrt{(r - \rho)^2 + \frac{\rho S_r}{\pi r}}} \right]. \quad (46)$$

Отсюда легко получить, что

$$\omega(S_r, p) \leq \omega(S_{r_1}, p) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{r_1} \right) \left[1 - \frac{r - r_1}{\sqrt{(r - r_1)^2 + \frac{r_1 S_r}{\pi r}}} \right], \quad \text{если}$$

$r_1 < r$, далее

$$\frac{\omega(S_r, p) - \omega(S_{r_1}, p)}{\omega(S_{r_1}, p) (r - r_1)} \leq \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{r}{r_1}}{\sqrt{(r - r_1)^2 + \frac{r_1 S_r}{\pi r}}}. \quad (46')$$

Очевидно, что $\omega(S_r, p)$ имеет непрерывную производную по r , когда $r \leq r_0$.

Переходя к пределу в (46'), когда $r_1 \rightarrow r$, получим

$$\frac{d \ln \omega(S_r, p)}{dr} = \frac{1}{2r} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}}, \quad \omega(S_r, p) \leq \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}} e^{-\int_p^r \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr} \quad (47)$$

Из (25), (43) и (47) получим

$$\begin{aligned} |V_N(p)| &\leq N \cdot f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) \cdot \omega\left(S_{\frac{1}{N+1}}, p\right) \leq \\ &\leq N \cdot f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) \cdot \frac{e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr}}{\sqrt{N+1} \cdot \sqrt{p}}, \quad \text{если } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{N+1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Легко показать, что если описывать вокруг каждой точки p , $\overline{pp_0} = \rho$ области D'' сферы радиусом $\frac{h(p)}{4}$, то они принадлежат области D' , откуда, используя известную формулу для оценки производной гармонической функции, получим (l любое направление)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V_N(p)}{\partial l} \right|_{p \in D''} &\leq \frac{\max_{\overline{pp'} = \frac{h(p)}{4}} |V_N(p)|}{\frac{h(p)}{4}} \leq \frac{4Nf\left(\frac{1}{c_1 N}\right)}{h(p) \cdot \sqrt{N+1} \sqrt{\rho - \frac{h(p)}{4}}} \cdot \\ &\cdot e^{-\int_{\rho + \frac{h(p)}{4}}^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr} = \\ &= \frac{4Nf\left(\frac{1}{c_1 N}\right)}{V \rho h(p)} \cdot e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr}. \end{aligned} \quad (49)$$

Берем уравнение

$$\frac{e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr}}{\frac{c_4}{\pi} \cdot \rho \cdot h(p)} = A(\rho), \quad (50)$$

где $A(\rho)$ — положительная функция с непрерывной производной. Логарифмируя и беря производную из обеих частей, получим линейное

дифференциальное уравнение относительно $\sqrt{\frac{c_4}{\pi} r h(r)}$, одно из частных решений которого есть

$$\sqrt{\frac{c_4}{\pi} r h(r)} = \frac{1}{2} \int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{A'(z)}{A(z)} dz} d\tau,$$

откуда и

$$h(r) = \frac{\pi}{4c_4 r} \left(\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{A'(z)}{A(z)} dz} d\tau \right)^2.$$

Берем $A(z) = e^{-\int_0^z \frac{c_{12} dr}{V \varphi(r) \cdot r}}$. Очевидно, что $|A(z)| < 1$.
Тогда

$$h(r) = \frac{\pi}{4c_4 \cdot r} \left[\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{c_{12} dz}{V \varphi(z) \cdot z}} d\tau \right]^2. \quad (51)$$

Имея в виду, что $\varphi(r)$ — возрастающая непрерывная функция, получим

$$\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{c_{12}}{V \varphi(r) \cdot r} dr} d\tau \leq \int_0^r e^{-\frac{c_{12}(r-\tau)}{V \varphi(r) \cdot r}} d\tau = \frac{1 - \sqrt{\varphi(r) \cdot r}}{c_{12}}. \quad (52)$$

Из этой оценки легко получим, что можно взять c_{12} так, чтобы $h(r)$ удовлетворяла условию 2-ой леммы. С другой стороны, легко видеть, что $h(r)$ удовлетворяет (50), если взять вместо $A(r)$ $c_{13} A(r)$, где c_{13} — некоторая постоянная.

Значит, беря $h(r)$, которая определяется из уравнения (51), получим

$$\left| \frac{\partial V_N(p)}{\partial l} \right| \leq c_{14} V_N f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) e^{\int_1^{r_0} \frac{V \pi}{V c_1 r h(r)} dr} \quad (53)$$

Получим, что производная функции $V_N(p)$ в области D'' по любому направлению ограничена, откуда вытекает, что формула Грина применима в области D''

$$V_N(p) = \int_{S_0} \left[\frac{1}{r_{p0}} \cdot \frac{\partial V_N(0)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{p0}} \right) \cdot V_N(0) \right] dS_0.$$

Применим метод перенесения полюсов для гармонических функ-

ций $\frac{1}{r^{p_0}}$ и $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{p_0}} \right)$ из формулы (54) и перенесем полюсы во внутрь сферы радиуса $r = \frac{1}{2}$ с центром в точке p_0 так, что абсолютное значение разности полученной функции $\omega_2(p)$ и функции $V_N(p)$ в области D''' меньше $\frac{\varepsilon}{2^2}$, откуда вытекает, что функция $\omega_2(p)$ — гармоническая в области $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{2} \right)$ и $|\omega_2(p) - V_N(p)| < \frac{\varepsilon}{2^2}$, если $p \in D'''$. (55)

Аналогично из $\omega_2(p)$ получим $\omega_3(p)$, которая

1. гармоническая в области $D'' + D \cdot M(pp_0 > 1/3)$,
2. $|\omega_3(p) - \omega_2(p)| < \frac{\varepsilon}{2^3}$, если $p \in D''' + D \cdot M(pp_0 > 1)$.

Вообще $\omega_n(p)$ удовлетворяет условиям

1. гармоническая в $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n} \right)$,
2. $|\omega_n(p) - \omega_{n-1}(p)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, если $p \in D''' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n-2} \right)$.

Очевидно, что последовательность $\omega_2 \dots \omega_n \dots$ равномерно сходится в области D и что предельная функция $\omega(p)$, гармоническая в области D , удовлетворяет условию

$$|\omega(p) - V_N(p)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } p \in D'''. \quad (56)$$

Легко видеть, что построенная функция

$$V^{(m)}(p) = \omega(p) + \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p) \quad (57)$$

удовлетворяет условию леммы.

Из 1-ой, 2-ой, 3-ей лемм вытекает, что можно построить последовательность функций $V_1(p) \dots V_n(p) \dots$ таких, что

2. $V_n(p)$ гармонична в области $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n+2} \right)$,
2. $|V_n(p) - V_{n-1}(p)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, если $p \in D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n} \right)$,
3. $|V_1(p) - f(p)| < M$, если $p \in \sigma$, $p \neq p_0$.

Следовательно, последовательность функций $V_1(p) \dots V_n(p) \dots$ равномерно сходится внутри области $D + D''$ и предельная функция $V(p)$ гармонична в этой области и

$$|V(p) - f(p)| \leq M + \varepsilon, \text{ если } p \in \sigma, p \neq p_0. \quad (58)$$

что заканчивает доказательство теоремы.

Следствие. Теорема верна, если число разрывов функции конечно.

Доказательство. Пусть эти точки будут $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Построим функции $f_1(p), f_2(p), \dots, f_{m-1}(p)$ так, что $f_k(p) = f(p)$ в малой окрестности p_k , где $f(p)$ не имеет других точек разрыва, кроме p_k , а в остальной части непрерывны.

Берем $f_m(p) = f(p) - f_1(p) - \dots - f_{m-1}(p)$. Очевидно, что функции $f_m(p)$ имеют одну точку разрыва и что сумма гармонических функций $U_1(p), \dots, U_m(p)$, являющихся решениями нашей задачи, которые соответствуют граничным условиям $f_1(p), \dots, f_m(p)$, удовлетворяет нашей теореме.

Из доказательства 2-ой и 3-ей лемм вытекает.

Следствие: к каждой функции на σ , которая имеет разрывы в конечном числе точек, можно приблизиться при помощи функций, которые гармоничны везде, кроме этих точек, если σ имеет непрерывно меняющуюся нормаль.

По методу доказательства теоремы Келдыша и Лаврентьева* можно легко показать, что.

Теорема 1. Чтобы в двухмерной области D существовало решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждого данного граничного значения $f(p)$, которое непрерывно в любой точке, кроме точки $p = p_0$, необходимо:

А. существование монотонно стремящейся к нулю при $t \rightarrow 0$ функции $r(t) > 0$ так, чтобы любую точку z в области D можно было соединить с точкой p_0 линией Жордана, которая находилась бы внутри окружности $|z| < r(|z'|)$ в области D .

Теорема 2. Если двухмерная нормальная область D удовлетворяет условию А и существует малая окрестность точки p_0 , где нет точек из дополняющих областей, для которых точка p_0 — не граничная точка, то существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждого вышеуказанного граничного значения $f(p)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему уважаемому руководителю профессору С. Н. Мергеляну за постановку задачи и доценту Р. А. Александриану за ряд ценных указаний.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1 II 1958

* См. например С. Н. Мергелян УМН., том VII, вып. 2 (48) 1952, стр. 59–63.

Ն. Ե. ԹԱՎԱՏՅԱՆ

ԼԱՊԼԱՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ
ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՈՋ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐԵԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ
ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԴԵՊՓՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ արված է Լապլասի համարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյություն ապացույցը և արդ լուծումը կառուցելու մեթոդը, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ չէ վերջավոր թվով կետերում: Թող D -ն լինի եռաչափ տիրույթ, որտեղ ամեն մի անընդհատ եզրային արժեքի զեպքում Դիրիխլեի խնդիրը Լապլասի համարման համար ունի լուծում: Այսինքն D տիրույթը նորմալ է: Նրա σ մակերևույթի վրա արված է $f(p)$ ֆունկցիան, որն անընդհատ է բոլոր կետերում, բացի $p = p_0$ կետից: p_0 կետի փոքր շրջակայքում σ մակերևույթն ունի անընդհատ փոփոխվող նորմալ և ուղիղները, որոնք ղուգահեռ են p_0 կետում մակերևույթի նորմալին, p_0 կետի փոքր շրջակայքում մակերևույթին հասում են մեկ անգամ:

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. D տիրույթի և $f(p)$ ֆունկցիայի վրա վերը արված ենթադրությունների զեպքում գոյություն ունի Դիրիխլեի խնդրի լուծումը Լապլասի համարման համար, այսինքն գոյություն ունի $U(p)$ ֆունկցիա, որը

1. Անընդհատ է, երբ $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$:

2. Հարմոնիկ է D տիրույթում

3. $U(p)|_{p \in \sigma} = f(p)$
 $p \neq p_0$

Յույց է արվում, որ թեորեմը ճիշտ է նաև այն զեպքում, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ չէ վերջավոր թվով կետերում:

Այս թեորեմի ապացուցման հղանակից բխում է հետևյալ կարևոր հետևանքը:

Հետևանք. Եթե σ մակերևույթը ունի անընդհատ փոփոխվող նորմալ, ապա σ -ի վրա արված ամեն մի վերջավոր թվով կետերում խզումներ ունեցող ֆունկցիային հարասարաչափ կերպով կարելի է մոտենալ ֆունկցիաներով, որոնք հարմոնիկ են ամենուրեք, բացի արդ խզման կետերից:

Երկչափ տարածության զեպքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1. Որպեսզի երկչափ D տիրույթում գոյություն ունենա Լապլասի համարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծումը, յուրաքանչյուր աված $f(p)$ եզրային արժեքի զեպքում, որն անընդհատ է ամեն մի կետում, բացի $p = p_0$ կետից, անհրաժեշտ է, որ՝

Ա. Գոյություն ունենա մոնոտոն կերպով զերոյի ձգտող, երբ $t \rightarrow 0$, $r(t) > 0$ ֆունկցիա, այնպես որ D տիրույթի ամեն մի կետը հնարավոր լինի միացնել p_0 կետի հետ ժողպանյան կորով, որը գտնվի $|\xi| < r(|z|)$ շրջանի և D տիրույթի ներսում:

Թեորեմ 2. Եթե երկչափ նորմալ D տիրույթը բավարարում է Ա պայմանին և գոյություն ունի p_0 կետի փոքր շրջակայք, որտեղ չկան կետեր D

տիրույթի լրացուցիչ տիրույթներից, որոնց համար p_0 կետը եզրային կետ է, ապա գոյություն ունի Դիրիխլեի խնդրի լուծումը Լապլասի համարաման համար D տիրույթում, վերևում նշված $f(p)$ եզրային արժեքի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функции комплексного переменного. УМН, том VII, выпуск 2 (48), 1952.
2. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики.
3. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. УМН, вып. VIII, (1941).
4. Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. УМН, том XI, вып. 5 (71), 1956.
5. Мергелян С. Н. УМН, VIII, вып. 4 (5), 1953.