ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 3, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора*

§ 3. Тауберовые теоремы

В настоящем параграфе излагаются тауберовые теоремы для $(C_\gamma, 1)$ и (A_γ) методов суммирования.

Начнем с метода $(C_\gamma, 1)$.

Определение 7. Условимся говорить, что последовательность положительных чисел $\{\alpha_\nu\}$ удовлетворяет условию (α, γ), если из

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{m(n)}\frac{1}{\gamma_\nu}=0,\ 0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2\leqslant\cdots\to\infty,\quad \sum_1^\infty\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty$$

следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{m(n)}\frac{1}{\alpha_\nu}=0,\quad \nu=1,2,\cdots.$$

Теорема 10. Суммируемость ряда $\sum_0^\infty a_n$ по методу $(C_\gamma, 1)$ влечет за собой его сходимость (в обычном смысле), если только $a_n>-\frac{C}{\alpha_n}$, $n\geqslant n_0(C)$, $C>0$ — произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию (α, γ).

Лемма 1. Если члены ряда $\sum_1^\infty a_n$, начиная с некоторого номера $n_0(c)$, удовлетворяют условию

$$a_n>-\frac{C}{\alpha_n},$$

где $C>0$ — произвольное число, $\{\alpha_n\}$ — заданная последовательность положительных чисел, то справедливо:

$$\dot{S}_p^{(1)}+\frac{\dot{S}_p^{(1)}-\dot{S}_{p_1}^{(1)}}{\prod\limits_{\nu=p_1+1}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1}-C\sum_{p_1+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}<S_p<\dot{S}_q^{(1)}+$$

* Начало см. предыдущий нашего журнала.

$$+\frac{\dot{S}_q^{(1)}-\dot{S}_p^{(1)}}{\prod\limits_{p+1}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1}+C\sum_{p+1}^{q}\frac{1}{\alpha_\nu}, \tag{13}$$

где $0<n_0<p_1<p<q$ — *произвольные целые числа,* $\dot{S}_m^{(1)}$ — *введено в определение 2.*

Обозначим

$$\sigma_{pq}=\sum_{m=p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}S_{m-1}=$$

$$=\dot{S}_q^{(1)}\prod_{\nu=2}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-\dot{S}_p^{(1)}\prod_{\nu=2}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}=\dot{S}_q^{(1)}-\dot{S}_p^{(1)}. \tag{14}$$

Пусть теперь $p<\mu<q$, тогда

$$S_\mu=S_p+(a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_\mu)>S_p-C\sum_{\nu=p+1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Это значит, что

$$\sigma_{pq}=\sum_{m=p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}S_{m-1}>\left(S_p-C\sum_{p+1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\sum_{m=p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}$$

или согласно (14)

$$S_p<\frac{S_q^{(1)}-S_p^{(1)}}{\sum\limits_{p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}}+C\sum_{\nu=p+1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_\nu},$$

$$S_p<\dot{S}_q^{(1)}+\frac{S_q^{(1)}-S_p^{(1)}-\dot{S}_q^{(1)}\sum\limits_{p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}}{\sum\limits_{p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}}+C\sum_{p+1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Заметив теперь, что

$$\sum_{p}^{q}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}=\prod_{2}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-\prod_{2}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1} \tag{15}$$

и

$$S_m^{(1)}=\acute{S}_m^{(1)}\prod_{2}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1};$$

получаем

$$S_p<\acute{S}_q^{(1)}+\frac{-\acute{S}_p^{(1)}\prod\limits_{2}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}+\acute{S}_q^{(1)}\prod\limits_{2}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}}{\prod\limits_{2}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}\left(\prod\limits_{p+1}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1\right)}+C\sum_{p+1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Таким образом получаем

$$S_p<\acute{S}_q^{(1)}+\frac{\acute{S}_q^{(1)}-\acute{S}_p^{(1)}}{\prod\limits_{p+1}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1}+C\sum_{\nu=p}^{q}\frac{1}{\alpha_\nu}. \tag{16}$$

Оценим теперь S_p снизу.

Рассмотрим

$$\sigma_{p_1p}=S_p^{(1)}-S_{p_1}^{(1)},$$

где $0<n_0<p_1<p$ — произвольное целое положительное число, зная, что при $p_1<\mu<p$ справедливо:

$$S_\mu=S_p-(a_p+a_{p-1}+\cdots+a_{\mu+1})<S_p+C\sum_{\nu=\mu+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}<$$

$$<S_p+C\sum_{\nu=p_1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Это значит, что

$$\sigma_{p_1p}=\sum_{m=p_1}^{p}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\sum\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}S_{m-1}<$$

$$<\left(S_p+C\sum_{\nu=p_1+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\sum_{m=p_1}^{p}\frac{\prod\limits_{1}^{m-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m}(\gamma_\nu-\gamma_1)}$$

или

$$\dot S_p^{(1)} - \dot S_{p_1}^{(1)} < \left(S_p + C\sum_{p_1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu} \right) \sum_{p_1}^{p} \frac{\prod\limits_{1}^{m-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{2}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_1)}$$

и

$$S_p > \frac{\dot S_p^{(1)} - \dot S_{p_1}^{(1)}}{\sum\limits_{m=p_1}^{p} \frac{\prod\limits_{1}^{m-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{1}^{m} (\gamma_\nu - \gamma_1)}} - C \sum_{p_1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}.$$

В силу соотношений (15) путем повторения уже знакомых выкладок получим

$$S_p > \dot S_p^{(1)} + \frac{\dot S_p^{(1)} - \dot S_{p_1}^{(1)} - \dot S_p^{(1)} \prod\limits_{2}^{p} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} + \dot S_p^{(1)} \prod\limits_{2}^{p_1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}}{\prod\limits_{2}^{p} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} - \prod\limits_{2}^{p_1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}} - C \sum_{p_1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}$$

или

$$S_p > \dot S_p^{(1)} + \frac{(\dot S_p^{(1)} - \dot S_{p_1}^{(1)}) \prod\limits_{2}^{p_1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}}{\prod\limits_{2}^{p_1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} \left(\prod\limits_{p_1+1}^{p_1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} - 1 \right)} - C \sum_{p_1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Следовательно,

$$S_p > \dot S_p^{(1)} + \frac{\dot S_p^{(1)} - \dot S_{p_1}^{(1)}}{\prod\limits_{p_1+1}^{p} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} - 1} - C \sum_{p_1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}. \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) следует неравенство (13), чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ и $n_1 = n_1(\varepsilon)$ справедливо:

$$(\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\gamma_\nu - \gamma_1} < \prod_{\nu=n}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} - 1 < \gamma_1 \sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\gamma_\nu - \gamma_1} \exp\left(\gamma_1 \sum_{n}^{m} \frac{1}{\gamma_\nu - \gamma_1} \right), \tag{18}$$

где $m > n \geqslant n_1$ — произвольные числа.

Имеем

$$\prod_{\nu=n}^{m} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} = \prod_{\nu=n}^{m} \left(1 + \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1} \right) = \exp \sum_{\nu=n}^{m} \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu - \gamma_1} \right).$$

Заметим теперь, что при $\gamma_\nu - \gamma_1 > \gamma_1$

$$\ln\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)=\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-\frac{1}{2}\frac{\gamma_1^2}{(\gamma_\nu-\gamma_1)^2}+\cdots<\frac{\gamma_1}{\gamma_\nu-\gamma_1}.$$

С другой стороны,

$$\ln\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)>\frac{\gamma_1}{\gamma_\nu-\gamma_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)^2.$$

При достаточно большом $n_1 = n_1(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — число сколь угодно малое и $\nu \geqslant n_1$ будем иметь

$$(\gamma_\nu-\varepsilon)\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}<\sum_{\nu=n}^{m}\ln\left(1+\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)<\gamma_1\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}$$

или

$$\exp\left((\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)<\prod_{\nu=n}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}<\exp\left(\gamma_1\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right),$$

но

$$\exp\left((\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)-1>(\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}$$

а с другой стороны

$$\exp\left((\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right)-1<\gamma_1\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\exp\left(\gamma_1\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}\right).$$

Этим доказана справедливость неравенства (18).

Доказательство теоремы 10. Обозначим

$$A_p=\dot{S}_p^{(1)}+\frac{\dot{S}_p^{(1)}-\dot{S}_{p_1}^{(1)}}{\prod\limits_{p_1+1}^{p}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1}-C\sum_{p_1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu},$$

$$B_q=\dot{S}_q^{(1)}+\frac{\dot{S}_q^{(1)}-\dot{S}_p^{(1)}}{\prod\limits_{p+1}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_1}-1}+C\sum_{p}^{q}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Согласно условию теоремы

$$\lim_{p\to\infty}\dot{S}_p^{(1)}=\lim_{q\to\infty}\dot{S}_q^{(1)}=S, \tag{19}$$

с другой стороны

$$|A_p-S|\leqslant|\dot{S}_p^{(1)}-S|+\frac{|\dot{S}_p^{(1)}-\dot{S}_{p_1}^{(1)}|}{(\gamma_\nu-\varepsilon)\sum\limits_{\nu=p_1+1}^{p}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}}+C\sum_{p_1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu},$$

$$|B_q-S|\leqslant|\dot{S}_q^{(1)}-S|+\frac{|\dot{S}_q^{(1)}-\dot{S}_p^{(1)}|}{(\gamma_1-\varepsilon)\sum\limits_{p+1}^{q}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}}+C\sum_p^q\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

При заданном $\varepsilon>0$ в силу (19) найдется число $n_2=n_2(\varepsilon, C)$ такое, что при произвольных $q>p>p_1\geqslant n_2$ будем иметь

$$|\dot{S}_p^{(1)}-S|<\varepsilon,\quad |\dot{S}_p^{(1)}-\dot{S}_{p_1}^{(1)}|<\varepsilon,\quad |\dot{S}_p^{(1)}-\dot{S}_q^{(1)}|<\varepsilon.$$

Возьмом теперь $q=q(p)$ и $p_1=p_1(p)$ так, чтобы

$$(\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=p_1+1}^{p}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}=\sqrt{\varepsilon},\quad (\gamma_1-\varepsilon)\sum_{\nu=p+1}^{q}\frac{1}{\gamma_\nu-\gamma_1}=\sqrt{\varepsilon},$$

тогда

$$|A_p-S|<\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}+C\sum_{p_1}^{q}\frac{1}{\alpha_\nu},$$

$$|B_q-S|<\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}+C\sum_{p}^{q}\frac{1}{\alpha_\nu}.$$

В силу условия (α, γ) получаем, что

$$\lim_{p\to\infty}A_p=\lim_{p\to\infty}B_{q(p)}=S.$$

Следовательно, согласно (13)

$$\lim_{p\to\infty}S_p=S.$$

Этим теорема доказана.

В частном случае, когда $\alpha_\nu=\gamma_\nu$, $\nu=1, 2,\cdots$, доказанная выше теорема является прямым обобщением известной тауберовой теоремы для метода суммирования $(C, 1)$.

Тауберова теорема для обобщенного ряда Тейлора

Теорема 11. *Из суммируемости ряда $\sum\limits_0^\infty a_n$ по методу (A_γ) при условии $a_n=\left(\frac{1}{\gamma_n}\exp\left(-\delta\sum\limits_1^n\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\right)$, где $\delta>0$— произвольное сколь угодно малое число, $0<\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\cdots$, $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty$, следует его сходимость (к той же сумме) в обычном смысле.*

Лемма 1. Для всякого $x \in (0, 1)$ *справедливо неравенство:*

$$1 - \omega_n(x) < C \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \varkappa} x^{\varkappa},$$

где $C > 0$ — *постоянная, не зависящая от* n *и* $\varkappa$; $0 < \varkappa \leq \gamma_1$ — *произвольное число.*

Действительно,

$$\omega_n(x) = \frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число, $x \in (0, 1]$; это значит, что

$$\omega_n(x) = 1 + \frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{-\varkappa - i\infty}^{-\varkappa + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}$$

так как

$$\operatorname*{Res}_{\zeta = 0} \left(\frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu x^{-\zeta}}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} \right) = 1 \text{ и } 0 < \varkappa < \gamma_1.$$

Продолжая оценку, будем иметь

$$1 - \omega_n(x) < \frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi} \int\limits_{-\varkappa - i\infty}^{-\varkappa + i\infty} \frac{x^{-Re\zeta} |d\zeta|}{\prod\limits_{0}^{n} |\zeta + \gamma_\nu|}$$

или

$$1 - \omega_n(x) < C \prod_{2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \varkappa} x^{\varkappa},$$

Заметим, что в случае $\varkappa = \gamma_1$, в качестве контура интегрирования следует брать $(-\varkappa - i\infty, -\varkappa - ir)$, $|\zeta + \gamma_1| < r$, $Re(\zeta + \gamma_1) > 0$, и $(-\varkappa + ir, -\varkappa + i\infty)$ и, после оценки интеграла, перейти к пределу, когда $r \to 0$.

Лемма 2. Если $a_n = 0\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$, то

$$\prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu - \alpha}{\gamma_\nu} \sum_{1}^{n} |a_k| \frac{\prod_{1}^{k} \gamma_\nu}{\prod_{1}^{k} (\gamma_\nu - \alpha)} < C, \tag{20}$$

где $\alpha > 0$ — *произвольное число,* $\alpha \leqslant \gamma_1$, $C > 0$ — *не зависящее от* n *число.*

Действительно,

$$\sum_{1}^{n} |a_k| \frac{\prod_{1}^{k} \gamma_\nu}{\prod_{2}^{k} (\gamma_\nu - \alpha)} < C \sum_{1}^{n} \frac{\prod_{1}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod_{2}^{k} (\gamma_\nu - \alpha)} =$$

$$C\left(\prod_{2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \alpha} - 1\right) < C \prod_{2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \alpha}.$$

Лемма 3. Если ряд $\sum_{0}^{\infty} a_n$ *суммируем по методу* (A_γ) *и* $a_n = 0\left(\frac{1}{\gamma_n} \exp\left(-\delta \sum_{1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\right)$, *где* $\delta > 0$ — *произвольное число, то*

$$|S_n| = \left|\sum_{1}^{n} a_k\right| < A(\delta),$$

где $A(\delta) > 0$ — *не зависящее от* n *число.*

Действительно, пусть

$$\lim_{x \to 0+} \varphi(x) = \lim_{x \to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = S.$$

Это значит, что при достаточно малом $x = x(\varepsilon)$ будет

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon.$$

Далее

$$S_m - S = \varphi(x) - S + S_m - \varphi(x) =$$

$$= \varphi(x) - S + \sum_{k=1}^{m} a_k [1 - \omega_k(x)] - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x)$$

или

$$|S_m - S| \leqslant |\varphi(x) - S| + C \sum_{k=1}^{m} |a_k| \prod_{\nu=2}^{k} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \alpha} x^\alpha +$$

$$+ \left|\sum_{m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x)\right|. \tag{21}$$

Согласно лемме 2 имеем

$$x^{\alpha}\sum_{k=1}^{m}|a_k|\prod_{\nu=2}\frac{\gamma_\nu-\alpha}{\gamma_\nu}<C_1 x^{\alpha}\prod_{2}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha};$$

примем

$$x^{\alpha}=\prod_{2}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha} \tag{22}$$

где $0<\alpha\leqslant\gamma_1$ — по прежнему произвольное, не зависящее от m число. Это значит, что

$$x^{\alpha}\sum_{k=1}^{m}|a_k|\prod_{\nu=2}^{k}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha}<C_1. \tag{23}$$

Для третьего слагаемого правой части неравенства (21) будем иметь

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n\omega_n(x)\right|\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\leqslant$$

$$\leqslant A\exp\left(-\delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=A\exp\left(-\delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\frac{\prod\limits_{1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)}<$$

$$<\frac{A}{\alpha}\exp\left(-\delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)x^{-\alpha}\prod_{1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha}.$$

В силу (22) имеем:

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}a_n\omega_n(x)\right|<\frac{A}{\alpha}\exp\left(-\delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\prod_{1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+\alpha}\prod_{1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha}.$$

Но

$$\prod_{1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu+\alpha}<\exp\left(-\alpha\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu+\alpha}\right),$$

$$\prod_{1}^{m}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\alpha}<\exp\left(\alpha\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu-\alpha}\right).$$

Это значит, что

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty} a_n\omega_n(x)\right| < \frac{A}{\alpha}\exp\left(-\delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}\right)\exp\left(\alpha\sum_{1}^{m}\frac{2\alpha}{\gamma_\nu^2-\alpha^2}\right).$$

Используя произвольность числа α, всегда можно добится того, чтобы имели

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty} a_n\omega_n(x)\right| < A_1(\delta),$$

где $A_1(\delta) > 0$ — не зависящая от m постоянная,

Действительно, достаточно взять $\delta < \gamma_1^2$ и $4\alpha^2 = \delta$, тогда

$$2\alpha^2\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2-\alpha^2} < 4\alpha^2\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2} = \delta\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu^2}.$$

Таким образом доказано, что

$$|S - S_n| < A_2(\delta)$$

где $A_2(\delta) > 0$ — число, не зависящее от n. Этим доказано, что

$$|S_n| < |S| + A_2(\delta) = A(\delta).$$

Лемма 4. Пусть $|a_n| < \dfrac{C}{\gamma_n}$ *и,* $C > 0$ *— некоторая постоянная*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\omega_n(x), \quad \text{где} \quad x \in (0, 1],$$

тогда $$x^\nu\varphi^{(\nu)}(x) = o(1),$$

когда $$x \to 0+, \ \nu = 1, 2, \cdots. \tag{25}$$

Для доказательства заметим, что

$$\varphi'(x) = -x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)};$$

значит согласно условию леммы

$$|x\varphi'(x)| \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{1}^{n-1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$= \frac{C}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta} = C,$$

где как и везде при $n = 1$, $\prod_{1}^{n-1}\gamma_\nu = 1$.

Далее, имеем

$$\varphi''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{(x^{-\zeta-1})'_x d\zeta}{\prod_1^n (\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{[(\zeta+\gamma_1)+1-\gamma_1]\, x^{-\zeta-2}}{\prod_1^n (\zeta+\gamma_\nu)} d\zeta =$$

$$= x^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_2^n (\zeta+\gamma_\nu)} +$$

$$+ x^{-2}(1-\gamma_1) \sum_1^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta+\gamma_\nu)}$$

или

$$|x^2\varphi''(x)| \leqslant C\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_2^n (\zeta+\gamma_\nu)} +\right.$$

$$\left. + |1-\gamma_1| \sum_1^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta+\gamma_\nu)} \right) =$$

$$= C_1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} + |1-\gamma_1| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} \right) < A,$$

где $A > 0$ — число не зависящее от x.

Продолжая этот процесс, в силу применимости математической индукции будем иметь

$$|x^n \varphi^{(n)}(x)| < C_1,$$

где $n = 1, 2, 3, \cdots$.

С другой стороны, известна теорема Ландау:

Если $g(x)$ на $(0, 1)$ дважды дифференцируема,

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= 0(1) \\ x^2 g''(x) &= 0(1) \end{aligned}\right\} \quad \text{когда} \quad x \to 0+,$$

то
$$xg'(x) = o(1), \quad \text{когда} \quad x \to 0+.$$
См. [1], стр, 201, теорема 101.

Применение этой теоремы завершает доказательство леммы, так как
$$\Phi(x) = \varphi(x) - S \to 0, \text{ когда } x \to 0+$$
и
$$x^n \Phi^{(n)}(x) = x^n \varphi^{(n)}(x) = o(1),$$
значит
$$x^n \varphi^{(n)}(x) = o(1), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Лемма 5. Пусть $|a_n| < \frac{C}{\gamma_n}$, *где* $C > 0$ — *не зависящая от* n *постоянная*
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \ x \in [0, 1], \ \lim_{x \to 0+} \varphi(x) = S,$$
тогда
$$\varphi_p(x) = o(x^{-\gamma_p - 1}), \quad \text{когда} \quad x \to 0+,$$
где
$$\varphi_1(x) = \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{\gamma_1 - 1}}\right)', \qquad \varphi_p(x) = \left(\frac{\varphi_{p-1}(x)}{x^{\gamma_p - \gamma_{p-1} - 1}}\right)', \qquad p = 2, 3, \cdots.$$
Имеем
$$\varphi_1(x) = \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{\gamma_1 - 1}}\right)' = \varphi''(x) x^{-\gamma_1 + 1} + \varphi'(x)(1 - \gamma_1) x^{-\gamma_1} = o(x^{-\gamma_1 - 1}),$$
$$\varphi_2(x) = [\varphi_1(x) x^{-\gamma_2 - \gamma_1 - 1}]' = \varphi_1'(x) x^{-\gamma_2 - \gamma_1 + 1} + (\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) \varphi_1(x) x^{-\gamma_2 + \gamma_1} =$$
$$= o(x^{-\gamma_1 - 2}) x^{-\gamma_2 + \gamma_1 + 1} + o(x^{-\gamma_1 + 1}) x^{-\gamma_2 + \gamma_1} = o(x^{-\gamma_2 - 1}).$$

Продолжая этот процесс и применяя математическую индукцию, получим, что
$$\varphi_p(x) = o(x^{-\gamma_p - 1}), \quad p = 1, 2, \cdots.$$

Лемма 6. Если ряд $\sum\limits_0^{\infty} a_n$ *суммируем к* S *по методу* (A_γ), *то*
$$x^{\gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{\prod\limits_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_1^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)} \to S;$$
и
$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{p+n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} \to S,$$
когда $x \to 0+$. *При* $n = 0$, $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_{p+\nu}$ *равно единице.*

Для доказательства рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{q} a_n \omega_n(x) = \sum_{n=p}^{q-1} \left(\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x)\right) \sum_{m=p}^{n} a_m + \omega_q(x) \sum_{n=p}^{q} a_n$$

и зная, что $\sum_{n=p}^{q} a_n$ в силу леммы 3 равномерно ограничено, переходя к пределу, когда $q \to \infty$, $p = 0$, получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Это значит, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \to S.$$

когда $x \to 0+$.

Для получения второго тождества, утвержденного леммой, будем $p+1$ раз обобщенно дифференцировать ряд

$$\varphi(x) = S_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_1} + S_1 \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \cdots.$$

Нами ранее доказано, что в $(0, 1]$ такой ряд можно дифференцировать, а следовательно и обобщенно дифференцировать любое число раз.

Будем иметь

$$\psi_p(x) = (-1)^{p+1} \frac{\varphi_p(x) x^{\gamma_p + 1}}{\prod_{1}^{p+1} \gamma_\nu} = \frac{S_p}{\gamma_{p+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} +$$

$$+ \frac{S_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + S_{p+2} \frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{3} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} + \cdots$$

или

$$\psi_p(x) = \frac{S_p}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{1} - S_p \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} +$$

$$+ S_{p+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+2}} - S_{p+1} \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} +$$

$$+S_{p+2}\frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+3}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_{p+2})(\zeta+\gamma_{p+3})}-S_{p+2}\frac{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+3}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{3}(\zeta+\gamma_\nu)}+\cdots.$$

Пусть теперь

$$S_p\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+\gamma_{p+1}}+S_{p+1}\frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+2}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_{p+1})(\zeta+\gamma_{p+2})}+\cdots\to S, \tag{26}$$

когда $x\to 0+$, тогда в силу того, что $\psi_p(x)\to 0$, когда $x\to 0+$, в силу (26) будем иметь

$$S_{p+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+2}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+\gamma_{p+2}}+S_{p+2}\frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+3}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_{p+2})(\gamma-\gamma_{p+3})}+\cdots\to S,\quad x\to 0+.$$

Таким образом доказано, что для всякого целого положительного p справедливо

$$S_p\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+\gamma_{p+1}}+S_{p+1}\frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+2}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_{p+1})(\zeta+\gamma_{p+3})}+\cdots\to S,\quad x\to 0+.$$

Доказательство теоремы 11.

Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+\gamma_{p+1}}+\frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+2}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_{p+1})(\zeta+\gamma_{p+2})}+\cdots=1.$$

и составим

$$S_m-S=\sum_{n=0}^{\infty}(S_m-S)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+p+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(S_{p+n}-S)\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_{p+\nu})}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(S_m-S_{p+n})\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+\nu}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})},$$

где принято $\gamma_{p+0}=1$.

Так как согласно лемме 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{p+n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} \to S, \text{ когда } x \to 0+,$$

то при достаточно малом $x = x(\varepsilon) > 0$, будем иметь

$$S_m - S = \Delta(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (S_m - S_{p+n}) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} =$$

$$= \Delta(\varepsilon) + \sigma_{mp}(x), \quad \text{где} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(\varepsilon) = 0. \tag{27}$$

Разобьем $\sigma_{mp}(x)$ на три слагаемые:

I $I_1(x)$ от 1 до $m_1 - p$,

II $I_2(x)$ от $m_1 - p + 1$ до $m_2 - p$,

III $I_3(x)$ от $m_2 - p + 1$ до ∞,

так, чтобы имели

$$\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} = \varepsilon^{\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\gamma_p = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{28}$$

$$x^{\varkappa} = \varepsilon \exp\left(-\varkappa \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}}\right),$$

$$\varkappa = \frac{1}{\varepsilon^{\beta}},$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$, $1 - 2\beta - \alpha \geqslant 0$, $m_1 < m < m_2$.

Заметим, что $x \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$.

Действительно

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{\varkappa}} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}}\right) = \varepsilon^{\varepsilon^{\beta}} e^{-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}} \to 0, \quad \text{когда} \quad \varepsilon \to 0.$$

В силу лемм

$$|I_1(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{m_1-p} |S_m - S_{p+n}| \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} <$$

$$< A\cdot \sum_{\nu=0}^{m_1-1} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} =$$

$$= A\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{m_1}}\left[1-\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m_1-1}\gamma_{p+\nu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{m_1-p}(\zeta+\gamma_{p+\nu})}\right]\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta} =$$

$$= A\,[1-\omega(x,\ \gamma_{p+1},\ \cdots\gamma_{m_1})] < A\prod_{\nu=1}^{m_1-p}\frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}-\varkappa}x^{\varkappa},$$

то есть

$$|I_1(x)| < A\prod_{\nu=1}^{m_1-p}\frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}-\varkappa}x^{\varkappa}. \qquad (29)$$

Для оценки сверху $I_2(x)$ заметим, что при $m_1 < m \leq m_2$ и $m_1-p < n < m_2-p$, согласно условию теоремы

$$|S_{p+n}-S_m| \leqslant |a_{m_1}|+|a_{m_1+1}|+\cdots+|a_{m_2}| < C\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p}\frac{1}{\gamma_{p+\nu}};$$

значит

$$|I_2(x)| \leqslant \sum_{n=m_1-p}^{m_2-p}|S_{p+n}-S_m|\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{p+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} <$$

$$< C\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p}\frac{1}{\gamma_{p+\nu}}\sum_{n=m_1-p}^{m_2-p}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_{n+\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{p+n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{p+\nu})} =$$

$$= C\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p}\frac{1}{\gamma_{p+\nu}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{m_2}}\left[\prod_{\nu=1}^{m_1-p}\frac{\gamma_{p+\nu}}{\zeta+\gamma_{p+\nu}}-\prod_{\nu=1}^{m_2-p}\frac{\gamma_{p+1}}{\zeta+\gamma_{p+\nu}}\right]\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta} =$$

$$= A_1\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p}\frac{1}{\gamma_{p+\nu}}\,[\omega_{m_1-p}(x,\ \gamma_{p+1},\ \cdots,\ \gamma_{m_1})-$$

$$-\ \omega_{m_2-p}(x,\ \gamma_{p+1},\ \cdots,\ \gamma_{m_2})] < A_1\sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p}\frac{1}{\gamma_{p+\nu}}.$$

Следовательно, согласно условию (28) получаем

$$|I_2(x)| < A\varepsilon^{\delta}. \tag{30}$$

Оценим, наконец, сверху и $|I_3(x)|$.

Имеем

$$|I_3(x)| < A_1' \sum_{\nu=m_1-p}^{\infty} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} =$$

$$= A_1' \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m_1-p} \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int\limits_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{m_1-p} (\zeta + \gamma_{p+\nu})}$$

или

$$|I_3(x)| < A_2 \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} + \varkappa} x^{-\varkappa} \tag{31}$$

В силу неравенства (27) и полученных оценок будем иметь

$$|S - S_m| < \Delta(\varepsilon) + Ax^{\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - \varkappa} +$$

$$+ A_1 \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + A_2 x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} + \varkappa}. \tag{27'}$$

Заметим теперь, что в силу (28) имеем

$$x^{\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_1-1} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - \varkappa} < \varepsilon \exp\left(-\varkappa \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \varkappa \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} + \cdots\right).$$

Это значит, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} + \frac{\varkappa^3}{3} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^3} + \cdots <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\varkappa^2}{2\gamma_{p+\nu}^2} \frac{1}{1 - \frac{\varkappa}{\gamma_{p+\nu}}} < \varkappa^2 \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2}, \tag{33}$$

следовательно,

$$x^{\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - \varkappa} < \varepsilon \exp\left(\varkappa^2 \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\rho}^2}\right) <$$

$$< \varepsilon \exp\left(\frac{\varkappa^2}{\gamma_{m_1}} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} \right) < \varepsilon \exp\left(\frac{\varkappa^2}{\gamma_p} \sum_{\nu=p}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} \right) <$$

$$< \varepsilon \exp\left(\varepsilon \cdot \varepsilon^{-2\beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha}\right) = \varepsilon \exp\left(\varepsilon^{1-2\beta-\alpha}\right) < e\varepsilon. \qquad (34)$$

Рассмотрим теперь

$$x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}+\varkappa}.$$

Имеем

$$x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}+\varkappa} < \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\varkappa \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \lambda(\varkappa, p, m_2) \right),$$

где

$$\lambda(\varkappa, p, m_2) = -\varkappa \sum_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} - \frac{\varkappa^3}{3} \sum_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^3} + \cdots.$$

Заметим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varkappa^2}{2\gamma_{p+\nu}^2} + \frac{\varkappa^3}{3\gamma_{p+\nu}^4} + \cdots < \frac{\varkappa^2}{\gamma_{p+\nu}^2},$$

значит

$$x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}+\varkappa} < \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varkappa \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \varkappa^2 \sum_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} \right) <$$

$$< \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon^{-\beta+\alpha} + \frac{\varepsilon^{-2\beta}}{\gamma_{m_1}} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^{-2\beta}}{\gamma_{m_1}} \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} \right) < \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon^{-\beta+\alpha} + \varepsilon^{1-2\beta-\alpha} + \varepsilon^{1-2\beta+\delta}\right),$$

или

$$x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}+\varkappa} < \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon^{\gamma}}},$$

где $\gamma = \beta - \alpha > 0$.

Таким образом при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$x^{-\varkappa} \prod_{\nu=1}^{m_2-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu}+\varkappa} < C\varepsilon. \qquad (35)$$

Из (27′) согласно оценкам (34) и (35) получаем

$$S - S_m = \Delta_1(\varepsilon), \quad \text{где} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_1(\varepsilon) = 0, \qquad (26'')$$

следовательно

$$\lim_{m \to \infty} S_m = S.$$

Этим теорема доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 14 I 1958

Հ. Վ. Բադալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՇԱՐՔԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են շարքերի գումարման Չեզարոյան և Աբելյան մեթոդների հետևյալ ընդհանրացումները՝

Դիտարկվում է թվերի $\{\gamma_\nu\}$ *հաջորդականությունը, որտեղ*

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_\mu < \gamma_{\mu+1} \leqslant \cdots \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^{-1} = \infty.$$

և թվային $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *շարք։*

Պայմանավորվենք ասել, որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *շարքը հանրագումարելի է* (C_γ, μ) *մեթոդով, եթե*

$$\left\{ S_n^{(\mu)} : \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu} \right\}, \; n = \mu+1, \mu+2, \cdots$$

հաջորդականությունը, որտեղ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_1)} S_{k-1},$$

$$S_n^{(\mu)} = \sum_{k=\mu}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{k-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu-1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} S_{k-1}^{(\mu-1)}, \quad \mu = 2, 3, \cdots$$

ունի վերջավոր սահման։

Մասնավոր դեպքում, երբ $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ (C_γ, μ) *մեթոդը դառնում է Չեզարոյան հայտնի* (C, μ) *մեթոդ։*

բ) Պայմանավորվենք ասելու, որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *շարքը հանրագումարելի է* (A_γ) *մեթոդով, եթե*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) \tag{1}$$

շարքը, որտեղ

$$\omega_n(x) = \frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}$$

$\varkappa > 0$ — *կամայական թիվ է,* $x \in (0, 1]$ *զուգամիտում է* $(0, 1]$ *միջակայքում և գոյություն ունի վերջավոր սահման՝*

$$S = \varphi(0+) = \lim_{x \to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)\text{։}$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ $\omega_n(x) = (1-x)^n$ *և* (A_γ) *մեթոդը դառնում է Աբելյան հայտնի* (A) *մեթոդ։*

Աշխատանքում շարադրված են

1) Աբելյան և տաուբերյան տիպի թեորեմներ (1) *շարքի վերաբերյալ, որոնք հանդիսանում են աստիճանային շարքերի վերաբերյալ նույնատիպ հայտնի թեորեմների ընդհանրացումը։*

2) Տաուբերյան թեորեմ շարքերի գումարման $(C_\gamma, 1)$ *մեթոդի վերաբերյալ։*

3) Ուսումնասիրված է (1) *շարքի վարքը, երբ* $x \to 0+$ *և նրա գործակիցները բավարարում են որոշ լրացուցիչ պայմանների։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
2. *Бадалян Г. В.* Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. Известия АН АрмССР, том VI, № 5—6, 1953.
3. *Widder D. V.* The Zaplace transform. London, 1946.
4. *Бадалян Г. В.* Обобщенные факторнальные ряды. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. V, 1950.