

А. А. Талалян и И. О. Хачатрян

К обратной задаче теории наилучших приближений

Как известно, С. Н. Бернштейном установлена следующая
Теорема. Каковы бы ни были числа

$$A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$$

существует такая непрерывная, 2π -периодическая функция $f(x)$, для которой именно эти числа являются наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами.

Далее, в работе М. М. Джрбашяна, посвященной обратной задаче теории наилучших приближений (и опубликованной в настоящем номере, стр.), установлен аналогичный результат в случае приближения функций класса $L_2(-\infty, \infty)$ целыми функциями экспоненциального типа по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

В связи с указанным результатом Джрбашяна возникла аналогичная задача при равномерном приближении на оси. Решению этой задачи и посвящена настоящая заметка.

Именно, утверждается следующее.

Теорема. Какова бы не была невозрастающая функция $\psi(\sigma)$, определенная на $[0, +\infty)$ и стремящаяся к нулю при $\sigma \rightarrow +\infty$, существует равномерно непрерывная и ограниченная на всей оси функция $f(x)$, для которой наилучшее приближение функциями класса B_σ^ равно $\psi(\sigma)$.*

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma) \quad (0 \leq \sigma < +\infty).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы С. Н. Бернштейна [1].

Доказательства следующих лемм не отличаются от доказательств соответствующих лемм для случая конечного промежутка.

*Лемма 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции из B^{**} , то величина*
$$\varphi(\lambda) = E_\sigma(f + \lambda g)$$

есть непрерывная функция аргумента λ .

* Через B_σ обозначается совокупность всех целых трансцендентных функций экспоненциального типа с показателем $< \sigma$, для которых

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| < \infty.$$

** Через B мы обозначаем класс функций, равномерно непрерывных и ограниченных на всей оси.

Лемма 2. Если в условиях леммы 1 функция $g(x)$ не входит в B_1 , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = +\infty.$$

Лемма 3. Если $T(x)$ — функция из класса B_2 , то для всякой $f(x) \in B$ имеет место

$$E_2(f+T) = E_2(f).$$

Имеет место также следующая

Лемма 4. Если $f(x)$ есть функция из класса B , то для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' > \varepsilon$ можно найти функцию $T(x)$ из B_2 такую, что

$$E_2(f+T) = E_2(f).$$

В самом деле, пусть $T(x) \in B_2$ такая, что

$$|f(x) - T(x)| \leq E_{\varepsilon'}(f).$$

Очевидно,

$$E_2(f-T) \leq E_{\varepsilon'}(f).$$

С другой стороны,

$$E_2(f-T) \geq E_{\varepsilon'}(f-T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Следовательно

$$E_2(f-T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Лемма 5. Пусть $f(x)$ есть функция класса B и $\varepsilon > 0$ $\varepsilon' > \varepsilon$. Если

$$A > E_{\varepsilon'}(f)$$

то существует $T(x) \in B_2$ такая, что

$$E_2(f+T) = A.$$

В самом деле. Случай $A = E_{\varepsilon'}(f)$ сводится к лемме 4. Пусть $A > E_{\varepsilon'}(f)$. Возьмем функцию $T(x) \in B_2$ такую, что

$$E_2(f+T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Это можно сделать в силу предыдущей леммы.

После этого возьмем какую-нибудь функцию $T_0(x) \in B_2$ с показателем, большим чем ε , и рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = E_2(f+T+\lambda T_0)$$

Так как

$$\varphi(0) = E_{\varepsilon'}(f) < A,$$

то в силу леммы 1 и леммы 2 существует λ_0 такое, что

$$\varphi(\lambda_0) = E_2(f+T+\lambda_0 T_0) = A.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть имеем $A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_n \geq 0$ и

$$0 \leq \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma.$$

Существует функция $T(x) \in B_2$ такая, что

$$E_{\sigma_k}(T) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

и

$$|T(x)| \leq A_0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Эта лемма доказывается путем многократного применения леммы 5, аналогично случаю конечного промежутка.

Употребляя эту лемму, можно доказать, что для любых последовательностей $A_0 \geq A_1 \geq \dots \geq A_n$ и $0 \leq \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \dots$, где $A_n \rightarrow 0$ и $\sigma_n \rightarrow +\infty$, существует $f(x) \in B$, такая, что имеем

$$E_{\sigma_k}(f) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

Доказательство этого факта тоже аналогично случаю конечного промежутка.

Для доказательства теоремы поступаем следующим образом.

Пусть $\psi(\sigma)$ невозрастающая функция, определенная на $[0, +\infty)$ и стремящаяся к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$.

Перенумеруем все ее точки разрыва:

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

Рассмотрим систему последовательностей $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) точек $(0, +\infty)$, обладающую следующими свойствами:

1) Для любого n

$$0 \leq \sigma_0^{(n)} < \sigma_1^{(n)} < \sigma_2^{(n)} < \dots < \sigma_k^{(n)} < \dots; \quad \sigma_k^{(n)} \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow +\infty$$

и точки последовательности $\{\sigma_k^{(n)}\}$ принадлежат последовательности $\{\sigma_k^{(n+1)}\}$.

2) Совокупность точек $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) всюду плотна на $[0, +\infty)$ и содержит в себе все точки разрыва функции $\psi(\sigma)$, т. е. точки τ_n ($n = 1, 2, \dots$) и точку $\sigma = 0$.

Для каждого фиксированного n существует функция $f_n(x)$, такая, что

$$E_{\sigma_k^{(n)}}(f_n) = \psi(\sigma_k^{(n)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$|f_n(x)| \leq \psi(0); \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Из полученной последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

В самом деле. Заметим, что все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ обладают тем свойством, что

$$E_{\sigma_k^{(1)}}(f_n) = \psi(\sigma_k^{(1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$0 \leq \sigma_0^{(1)} < \sigma_1^{(1)} < \dots < \sigma_n^{(1)} < \dots; \quad \sigma_n^{(1)} \rightarrow +\infty$$

и

$$\psi(\sigma_0^{(1)}) \geq \psi(\sigma_1^{(1)}) \geq \dots \geq \psi(\sigma_n^{(1)}) \geq \dots; \quad \psi(\sigma_n^{(1)}) \rightarrow 0; \quad \sigma_n^{(1)} \rightarrow +\infty.$$

Поэтому выделение равномерно сходящейся подпоследовательности $\{f_{n_k}(x)\}$ делается аналогично случаю конечного промежутка.

Пусть $f(x)$ есть предел последовательности $\{f_{n_k}\}$. Покажем, что $f(x)$ есть искомая функция, т. е.

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < +\infty.$$

В самом деле, если σ есть число, входящее в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$), то, очевидно, для достаточно большого числа i_0 при $k \geq i_0$ для всех функций $f_{n_k}(x)$ будет

$$E_\sigma(f_{n_k}) = \psi(\sigma).$$

Отсюда легко следует, что для функции $f(x)$ тоже

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma).$$

Пусть теперь σ — любое число из $[0, +\infty)$, не входящее в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$.

σ будет точкой непрерывности функции $\psi(\sigma)$, так как все ее точки разрыва $\{\tau_n\}$ входят в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$, ($n = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots$). $\sigma > 0$ так как точка $\sigma = 0$ входит в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$. Если теперь σ' и σ'' принадлежат множеству $\{\sigma_k^{(n)}\}$ и $0 \leq \sigma' < \sigma < \sigma''$, то будет

$$E_{\sigma'}(f) \leq E_\sigma(f) \leq E_{\sigma''}(f),$$

где

$$E_{\sigma'}(f) = \psi(\sigma'); \quad E_{\sigma''}(f) = \psi(\sigma'').$$

Но в силу плотности множества $\{\sigma_k^{(n)}\}$, σ' и σ'' можно выбрать сколь угодно близкими к σ , а следовательно, в силу непрерывности функции $\psi(\sigma)$ в точке σ , будем иметь.

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma).$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 II 1958

Ա. Ա. Թալալյան և Ի. Օ. Խաչատրյան

ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ս. Ն. Բերնշտեյնի կողմից ապացուցված էր հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Նախորդ տրված ցանկացած $A_0, A_1, A_2, \dots$ թվերի համար, որպես

$$A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0,$$

գոյություն ունի այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա 2π պարբերությամբ, որի համար հենց այդ թվերը հանդիսանում են լավագույն մոավորություններ հոանկյունաչափական բազմանդամներով:

Այնուհետև U, U^* : Ջրբաշխանի, լավագույն մոտավորությունների տեսության հակադարձ խնդրին նվիրված աշխատության մեջ (որը հրապարակված է ներկա համարում) ապացուցված է նման թեորեմ $L_2(-\infty, \infty)$ դասի ֆունկցիաները այդ տարածության մետրիկայով էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաներով մոտարկելու դեպքում:

U, U^* . Ջրբաշխանի նշված արդյունքների կապակցությամբ նման հարց առաջանում է առանցքի վրա հավասարաչափ մոտարկումների դեպքում:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. $(0, +\infty)$ -ի վրա որոշված ցանկացած չափող և զրոյի ձգտող $\psi(\sigma)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի ամբողջ առանցքի վրա սահմանափակ և հավասարաչափ անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա, որի համար B_σ դասի ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորությունը հավասար է $\psi(\sigma)$

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma) \quad (0 < \sigma < +\infty):$$

Թեորեմի ապացույցը կատարվում է մի քանի լեմմաների օգնությամբ, որոնք հանդիսանում են վերջավոր ինտերվալի համար հայտնի լեմմաների անալոգները:

Լեմմա 1. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ պատկանում են B դասին, ապա

$$\varphi(\lambda) = E_\sigma(f + \lambda g)$$

մեծությունը անընդհատ ֆունկցիա է λ -ից:

Լեմմա 2. Եթե լեմմա 1-ի մեջ $g(x)$ -ը չի պատկանում B_σ -ին, ապա

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty:$$

Լեմմա 3. Եթե $T(x)$ -ը պատկանում է B_σ -ին, ապա ցանկացած $f(x) \in B$ ֆունկցիայի համար

$$E_\sigma(f + T) = E_\sigma(f):$$

Լեմմա 4. Եթե $f(x) \in B$, ապա ցանկացած $\sigma \geq 0$ և $\sigma' > \sigma$ թվերի համար կարելի է գտնել $T(x) \in B_\sigma$ ֆունկցիա, այնպես որ

$$E_\sigma(f + T) = E_{\sigma'}(f):$$

Լեմմա 5. Ենթադրենք ունենք $A_0 > A_1 > A_2 > \dots > A_n > 0$ և $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma$:

Գոյություն ունի $T(x) \in B_\sigma$ այնպես, որ

$$F_{\sigma_k}(T) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n:$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. «Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций», Собрание сочинений, том II, стр. 292.

* B_σ -ով նշանակվում է բոլոր էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց ցուցիչը $< \sigma$ և որոնց համար

$$\sup_{-\infty < x < \infty} (f|)(x) < \infty;$$