ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 2, 1958 Физико-математические науки

НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

М. М. Джрбашян

Об обратной задаче наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$

Обозначим через W_σ совокупность всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$F(x) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Целью настоящей заметки является доказательство обратной теоремы наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$, когда аппроксимация производится функциями из класса W_σ *.

Пусть функция $\psi(\sigma) > 0$ определена на полуоси $[0, +\infty)$, абсолютно непрерывна, не возрастает и

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \psi(\sigma) = 0, \tag{1}$$

тогда справедлива.

Теорема. Для заданной функции $\psi(\sigma)$ существует четная вещественная функция $f_0(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, для которой

$$\min_{F \in W_\sigma} \mu(f_0 - F) = \min_{F \in W_\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x) - F(x)|^2 dx = \psi(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma < \infty. \tag{2}$$

Почти всюду на $(-\infty, +\infty)$

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \left\{-\frac{1}{2} \psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin xu}{u} du, \tag{3}$$

при этом для данного $\sigma > 0$ равенство (2) реализует функция

$$F_{0,\sigma}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\sigma \left\{-\frac{1}{2} \psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}} \cos zu\, du. \tag{4}$$

---

* В случае равномерного приближения полиномами на конечном отрезке, аналогичный результат впервые был установлен С. Н. Бернштейном [1].

Доказательство. Очевидно, что функция $\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}}$ почти всюду определена на полуоси $[0, +\infty)$ и принадлежит к классу $L_2(0, +\infty)$. Отсюда по теореме Планшереля [2] функция $f_0(x)$, определяемая по формуле (3), принадлежит к классу $L_2(-\infty, +\infty)$ и четная.

Из (3) и (4) по формуле Парсеваля получим:

$$\mu(f_0-F_{0,\sigma})=2\int_{\sigma}^{\infty}\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}du=\psi(\sigma). \tag{5}$$

Пусть $F(z)$ — произвольная функция из класса W_σ, тогда по теореме Палей и Винера имеет место представление вида

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\varphi(u)\,du, \tag{6}$$

где $\varphi(u)\in L_2(-\sigma, \sigma)$ — определенная функция.

Из обобщенной формулы Парсеваля для преобразований Фурье и из формул (3), (4), (6) получим

$$\int_{+\infty}^{+\infty}\left\{f_0(x)-F_{0,\sigma}(x)\right\}\overline{\{F(x)-F_{0,\sigma}(x)\}}\,dx=0, \tag{7}$$

откуда следует формула

$$\mu(f_0-F)=\mu(f_0-F_{0,\sigma})+\mu(F-F_{0,\sigma}). \tag{8}$$

Но

$$\mu(F-F_{0,\sigma})=\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}}-\varphi(u)\right|^2du, \tag{9}$$

поэтому из (8), (9) и (5) имеем

$$\min_{F\in W_\sigma}\mu(f_0-F)=\mu(f_0-F_{0,\sigma})=\psi(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma<\infty, \tag{10}$$

при этом равенство достигается лишь при $\varphi(u)=\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}}$ на $(-\sigma, \sigma)$, т. е. лишь при

$$F(z)=F_{0,\sigma}(z),$$

чем завершается доказательство теоремы.

Дополнительно получим теперь интегральное представление всех четных вещественных функций из $L_2(-\infty, +\infty)$, обладающих свойством (10).

Пусть вещественная функция $f_0^*(x)$, четная, из класса $L_2(-\infty, +\infty)$

и

$$\min_{F \in W_\sigma} \mu(f_0^* - F) = \psi(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma < +\infty. \tag{11}$$

Обозначим

$$g_0(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{du} \int_0^\infty f_0^*(x) \frac{\sin xu}{x} dx \in L_2(-\infty, +\infty)$$

и

$$F_{0,\sigma}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-izu} g_0(u)\, du \in W_\sigma,$$

тогда по равенству Парсеваля

$$\mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) = \int_{|u|>\sigma} |g_0(u)|^2 du = 2\int_\sigma^\infty |g_0(u)|^2 du, \tag{12}$$

так как $g_0(u)$ также вещественная четная функция.

Как и выше, легко убеждаемся, что если $F \in W_\sigma$ произвольная, то

$$\mu(f_0^* - F) = \mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) + \mu(F - F_{0,\sigma}),$$

откуда и из формул (11) и (12) получим

$$\min \mu(f_0^* - F) = \mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) =$$

$$= 2\int_\sigma^\infty [g_0(u)]^2 du = \psi(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma < +\infty. \tag{13}$$

Из (13) следует, что почти всюду на $(0, +\infty)$

$$g_0(u) = \varepsilon(u)\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\varepsilon(u)$ произвольная измеримая на $[0, +\infty)$ функция, принимающая лишь значения ± 1.

Но тогда из определения функции будет следовать, что

$$f_0^*(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \varepsilon(u) \left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin xu}{u} du. \tag{14}$$

Таким образом, четные вещественные функции из $L_2(-\infty, +\infty)$ обладающие свойством (10) представляются в виде (14).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 II 1958

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ՝ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ $L_2(-\infty, +\infty)$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

Եթե $\psi(\sigma) > 0$ բացարձակ անընդհատ, չաճող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ կիսառանցքի վրա և $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \psi(\sigma) = 0$, ապա գոյություն ունի $L_2(-\infty, +\infty)$ դասին պատկանող իրական, զույգ $f_0(x)$ ֆունկցիան, որի համար

$$\min_{F \in W_\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x) - F(x)|^2 \, dx = \psi(\sigma),$$

որտեղ, որպես թույլատրելի ֆունկցիաների W_σ դաս, վերցված են էքսպոնենցիալ տիպի σ-ից ոչ բարձր աստիճան ունեցող ամբողջ ֆունկցիաները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций, гл. V.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье (1948), гл. III, V.